Math. A. Gemerich
8.9 h
(Atlas in fol. 39 c)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch der Perspective.

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Perspective

für

bildende Künstler.

Von

Otto Gennerich.

Mit 101 in den Text eingedruckten Holzschnitten

und

einem Atlas, 28 lithographirte Tafeln enthaltend.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

—

1865.

Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Vorwort.

Nachdem für die Perspective, als einen der bildenden Kunst dienenden Zweig der angewandten Mathematik, durch Aufstellung des dem Wesen dieser Wissenschaft durchweg entsprechenden, directen Constructionsverfahrens gewissermaßen der wissenschaftliche Abschluß gefunden, wie dies nach dem schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts erfolgten Erscheinen von J. H. Lambert's «Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral» wohl anzunehmen ist, kann ein neu erscheinendes Lehrbuch desselben Gegenstandes nicht Neues im strengeren Sinne des Wortes bieten wollen. Für den der Sache Kundigen zumal finden sich in dem erwähnten, an sich so wenig umfangreichen Werke die Grundlagen zu den weitestgehenden Nutzanwendungen so vollständig, daß ihm jedes Wort mehr überflüssig erscheinen muß. Das Unternehmen einer neuen Bearbeitung der in Rede stehenden Disciplin kann deshalb wohl nur eine andere Rücksicht rechtfertigen. Als eine solche wird man unbedenklich die Rücksicht auf den Lernenden gelten lassen. Aus einer wesentlich auf die Darlegung der Grundzüge einer Wissenschaft abzielenden Schrift ist selbst der begabtere Schüler nicht im Stande, die ihm für den Augenblick der

Digitized by Google

Anwendung nützlichen Elemente herauszuerkennen und daraus die Antworten auf seine Bedenken zu lesen; ihm muß ein Rathgeber, welcher die in verschiedenen einzelnen Fällen auftretenden Schwierigkeiten vorhersieht und ihm bei deren Lösung die Anwendung jener Grundzüge zeigt, so lange willkommener als der erste Aufsteller derselben sein, bis er selbst zu den Kundigen zählt.

In dieser Ansicht glaubte der Verfasser des vorliegenden Werkes die äußere Rechtfertigung seiner literarischen Bemühungen in dieser Richtung überhaupt zu finden. Die einzelnen Werke der seit dem vorigen Jahrhundert angewachsenen, die Perspective betreffenden Literatur schienen ihm vollends eher Momente der Ermuthigung zu seinem Unternehmen, als Anlaß zu Bedenken dagegen darzubieten.

Was in diesen Werken bisher auch Verdienstliches geleistet worden, so schienen dem Verfasser bei dem einen methodische Einseitigkeit oder Eingeschränktheit in dem angerathenen Verfahren, bei dem andern entweder gelehrte Wortknappheit an der unrechten Stelle, oder das bis zur Unrichtigkeit und Unverständlichkeit sich verirrende Bemühen, in der Unwissenschaftlichkeit des Ausdruckes und der Erörterung die Allgemeinverständlichkeit zu finden, bei noch anderen ein nicht lohnender Aufwand an blendenden und dabei unerklärt dargebotenen Constructionsproben, bei den meisten entweder der Mangel einer hinlänglich eingehenden Berücksichtigung der von der Linearperspective untrennbaren Luftperspective, oder eine Behandlung derselben nach veralteten Anschauungen — kurz, eine Fülle von besonders dem Schüler sehr fühlbaren Mängeln Veranlassung genug zu bieten, um seine eigenen, in vieljähriger Erfahrung Lernenden gegenüber gemachten Erfahrungen in der Bearbeitung des vorliegenden Stoffes zu versuchen. Er steht jedoch nicht an, hierbei dankbar hervorzuheben, wie förderlich seinen Bestrebungen der anregende Einfluß gewesen, welchen vordem der geistige Verkehr mit dem Lehrer an der hiesigen königlichen Akademie

Digitized by Google

der Künste, Herrn Professor K. Pohlke, und dessen geistvolle Auffassungsweise des Gegenstandes auf ihn und seine Anschauungen geübt.

Was schon Lambert und ältere Autoren vor ihm beklagt und mit unverkennbarer Erregtheit bekämpft haben: die Nachlässigkeit vieler Kunstjünger im Studium der Perspective, sollte in einer Zeit, in welcher der Strebsame die Zugänge zur Wissenschaft geebnet und geweitet vorfindet, füglich nicht mehr Gegenstand des Vorwurfs sein können. Nichtsdestoweniger begegnet man heutzutage noch hier und da sogar der Meinung, daß der Genius die Fesseln der Mathematik nicht vertrage, und weisen auch auf den Kunstausstellungen nicht wenige und sonst nicht unbedeutende Gemälde und Basrelief-Sculpturen das Walten einer ähnlichen Meinung in den unzweideutigen Merkmalen jener behaglichen Fessellosigkeit deutlich genug auf. Die Anhänger dieses Genius-Cultus ernüchtern zu wollen, ist ein selten dankbares Unternehmen, da sie zunächst nicht mehr die erforderliche Ausdauer im Studium besitzen und dann, bei der etwaigen Umkehr von dem süßgewohnten Tasten nach dem Rechten zu dem bewußten Schaffen, in der Regel in eine, der früheren Fessellosigkeit entgegengesetzte widerliche Trockenheit und Absichtlichkeit in ihren Schöpfungen verfallen. Günstiger Erfolg von dem Rathe, das Studium der Perspective mit allem Eifer aufzunehmen, ist nur bei den Kunstbeflissenen zu erwarten, welche, von Erstlingserfolgen noch nicht beirrt, unbefangen einstweilen mehr dem Fleiße als dem Genie vertrauen.

Für Architekten, welche die Nothwendigkeit, den landschaftlichen Eindruck von Bauprojecten in einer perspectivischen Darstellung derselben vor ihrer Ausführung zu übersehen, auf das Studium der Perspective selbst hinweist, bedarf es der besondern Empfehlung desselben nicht.

Die hier der Linearperspective vorangeschickte Optik darf nicht als der entbehrlichere Theil des Studiums betrachtet werden.

Digitized by Google

Abgesehen davon, daß Denjenigen, welche für das Auge schaffen, vorweg daran liegen muß, die Functionen desselben und das Wesen der durch den Gesichtssinn wahrnehmbaren subjectiven und objectiven Erscheinungen zu verstehen, dient die Befolgung der optischen Gesetze, welche von den Künstlern unter dem Namen der Luftperspective begriffen wird, der linearperspectivischen Construction erst zur Ergänzung, und hat die letztere keinen Werth, wo jene mit ihr in Widerspruch steht. Die wissenschaftlichen Ermittelungen auf diesem Gebiete gewähren, insofern sie das Verständniß der natürlichen Erscheinungen geben, für deren bildliche Darstellung so vollkommenen Anhalt, daß sie für den Künstler direct benutzbar sind. Es ist deshalb hier von dem andererseits mit wenig Glück gemachten Versuche, ihre besondere Anwendung auf die künstlerische Darstellung darzulegen, Abstand genommen worden. Was den Umfang und die Darstellungsart der Optik betrifft, so mußte es hier darauf ankommen, den neueren Anschauungen zu genügen, jedoch unter Verzichtleistung auf wissenschaftliches Entwickeln das dem künstlerischen Bedürfnisse entsprechende Maß zu treffen.

Trotz des ernstesten Bemühens hierbei, den Vortrag auch dem Standpunkte geringerer wissenschaftlicher Vorbildung anzupassen, erweist sich doch immer, sowohl hinsichtlich der Optik als insbesondere der Linearperspective, die Kenntniß der Elemente der Geometrie und der Methode des orthographischen Projicirens als unerläßliche Vorbedingung für das Verständniß.

In Bezug auf die Bearbeitung der Optik bekennt sich der Verfasser als zu aufrichtigem Dank verpflichtet gegen seinen lieben Freund, den Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an der Gewerbschule zu Stralsund, Herrn Dr. F. Plettner, unter dessen treuem Beirathe Bedenken mannichfacher Art ihre Erledigung gefunden.

Was der Verfasser in anderen perspectivischen Lehrbüchern

Digitized by Google

meist vermißte: eine gründliche Anleitung bei der Wahl des Gesichtspunktes für bildliche Darstellungen, bei der Orientirung der Natur gegenüber u. s. w., bieten im Allgemeinen das erste Kapitel der Linearperspective und ein, mehr auf das Bedürfniß des Malers eingehendes, dem Schlusse angefügtes Beispiel.

In den im ersten Abschnitte enthaltenen Constructionen mußte im Allgemeinen der von Lambert in ihren Grundzügen zusammengestellten, förderlicheren Verschwindungspunkt-Methode der Vorzug gegeben werden; nichtsdestoweniger sind dabei doch, im Mißtrauen gegen strenge Methodik, die in verschiedenen Fällen durch diese selbst gebotenen verschiedenen, hin und wieder auch zu der vor Lambert üblichen Grundrißmethode zurückkehrenden Behandlungsarten vorgeführt worden. Der gestellten Aufgabe gemäß sind, insbesondere bei der Auswahl der im sechsten Kapitel enthaltenen Beispiele, alle diejenigen Constructionsübungen ausgeschlossen geblieben, welche den künstlerischen Zwecken nicht direct dienen; doch ist aller verwickelteren Fälle gedacht worden. Die Hülfsconstructionen, welche es ermöglichen, daß man die perspectivische Construction durchaus innerhalb der Grenzen der gewählten Bildfläche, ohne Benutzung außerhalb derselben liegender Hülfspunkte, ausführen kann, und auf deren praktische Anwendung in einem neueren Werke das Hauptgewicht gelegt ist, haben dem Verfasser eben nur als weniger wesentliche Hülfsmittel erscheinen können. Denn da ein gewissenhafter Künstler die Grenzen seiner Bildfläche überhaupt erst nach der Construction der Perspective ihres Inhaltes definitiv festzustellen vermag, ist er schon dadurch in dem Falle, die Construction zuvor auf einer andern als der eigentlichen Bildfläche vornehmen zu müssen, und hat er es dabei in der Hand, durch Ausführung derselben in kleinerem Maßstabe einem großen Theile jener keineswegs schwer aufzufassenden, wohl aber außerordentlich umständlichen Hülfs-

Digitized by Google

constructionen aus dem Wege zu gehen. Eigentliche Schwierigkeiten, zu deren Ueberwindung der Anfänger der Anleitung bedarf, bietet nur die Inangriffnahme der Construction und die Wahl des nächstliegenden und sichersten unter den mancherlei dabei einzuschlagenden Wegen. Hierin den Lernenden anzuleiten, ihm aber für die Fälle, in welchen jene Hülfsconstructionen unvermeidlich sind, den ganzen Vorrath derselben (Kapitel 5 und 24) zur Verfügung zu stellen und deren Anwendung an geeigneten Beispielen zu zeigen, erschien dem Verfasser die zweckmäßigere Art der Lösung der Aufgabe eines Lehrbuches.

Mit der Ausführlichkeit in der Behandlung der Constructionen schiefer Objecte (erster Abschnitt, B) ist es insbesondere darauf abgesehen, das Verständniß der Constructionsmittel zu vervollkommnen. Neben den hierbei nöthigsten Beispielen boten die Constructionen der Spiegelbilder (sechster Abschnitt), bei welchen deshalb auch gekrümmte Spiegel Berücksichtigung gefunden haben, ein vortreffliches Material zu ebendahin gehörigen und übrigens an sich selbst lehrreichen Beispielen. Wer dem Studium dieser Abschnitte ausweichen wollte, weil ihr Inhalt auf den ersten Blick seltener praktisch verwerthbar erscheint, verkennt die beste Gelegenheit zur Stärkung des Vorstellungsvermögens und zur Uebung in der Handhabung der Constructionsmittel.

In dem dem Lehrbuche beigefügten Atlas sind auf 28 lithographirten Tafeln neben einer Anzahl Figuren, welche, die Entwickelungen der Regeln erläuternd, wegen ihrer größeren Ausdehnung nicht, wie ein anderer Theil derselben Figurengattung, in den Text eingedruckt dargeboten werden konnten, die den Beispielen entsprechenden Constructionen vorgeführt. Es wird für das Studium des Werkes von nachhaltigerem Erfolge sein, wenn dieselben nicht blos gelegentlich eingesehen, sondern größerentheils unter Annahme kleiner Veränderungen, etwa in der Orientirung der Bildebene und des Gesichtspunktes, nachconstruirt werden. Die in diesen

Digitized by Google

Constructionen, den gegebenen Regeln zuwider, meist zu kurz angenommene Distanz wird den Studirenden nicht irreleiten, wenn er erwägt, daß nur auf diesem Wege die Constructionslinien und -Punkte hinlänglich weit aus einander zu rücken waren, um das Verfahren verständlich darlegen zu können. Nachdem er hierdurch den Gang der Construction und gerade durch die Uebertreibung den Charakter der unvermeidlichen perspectivischen Verzerrung nur desto sicherer aufgefaßt hat, wird ihm die Befolgung der Mahnung, sich bei der praktischen Anwendung des Gelernten streng an die im ersten Kapitel hinsichtlich der Distanz gegebenen Regeln zu binden, nirgend Schwierigkeit machen.

Die Anordnung des Stoffes ergab sich aus der durch die Verständlichkeit bedingten Folgerichtigkeit seiner Theile von selbst. Die Terminologie ist mit geringen Abweichungen die durch den mündlichen Unterricht und das Lehrbuch des verstorbenen, um die Perspective und ihre didaktische Behandlung hochverdienten Professor Hummel*) üblich gewordene.

Schließlich glaubt der Verfasser noch aussprechen zu müssen, daß die Ausführlichkeit der Erörterung und die hin und wieder dabei vorkommenden Wiederholungen auf mehr als einer Nachgiebigkeit gegen seine Eigenthümlichkeit beruhen. Mancherlei autodidaktische Bemühungen haben ihm die Wahrnehmung aufgedrängt, daß die Autoren von Lehrbüchern, im Hinblick auf die Anschauungen eines Eingeweihten und dessen Kritik, es häufig hintansetzen, den vielen, und einem Lehrer meist vorher bekannten, Zweifeln und Bedenken eines Lernenden vornehmlich gerecht zu werden und möglichen Mißverständnissen lieber durch größere Ausführlichkeit und allenfalls durch Wiederholungen vorzubeugen. Diesen Fehler zu vermeiden, gebot hier außerdem schon die Rücksicht

*) „Die freie Perspective für Maler und Architekten" (Berlin 1824).

Digitized by Google

auf den ungleichen wissenschaftlichen Standpunkt der Jünger der Kunst.

Ob die gewählte äußere Form dem Bedürfnisse wirklich entspreche, ob endlich in der vollendeten Arbeit die beim Beginn derselben ins Auge gefaßten Ziele erreicht vorliegen, sind Fragen, deren Beantwortung von der Zukunft erwartet werden muß. Möchte die freudig aufgewandte Mühe in jedem Falle wenigstens dazu beitragen, die Kunstbeflissenen mehr und mehr für das eifrige Studium der Wissenschaft zu gewinnen, deren Strenge ihnen die Corrective gegen die Mängel der freien Auffassung an die Hand giebt.

Berlin, im November 1864.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Seite

Vorwort V
Einleitung 1

Erste Abtheilung.
Luftperspective.

Optik 7

Erstes Kapitel. Das Licht.

a) Allgemeines 7
b) Stärke der Erleuchtung 9
c) Reflexion des Lichtes 13
d) Brechung oder Refraction des Lichtes 21
e) Farbe 31
f) Interferenz und Inflexion (Beugung) des Lichtes 42
g) Polarisation des Lichtes 46

Zweites Kapitel. Das menschliche Auge.

a) Die Camera obscura 48
b) Das Auge 51
c) Bedingungen des deutlichen Sehens 59
d) Das Sehen mit beiden Augen 65
e) Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte 70

Digitized by Google

Zweite Abtheilung.

Linearperspective.

Seite

Erstes Kapitel. Allgemeine Erklärungen, Annahmen und Benennungen . . 77

Erster Abschnitt.

Constructionen auf der lothrechten ebenen Bildfläche.

A. Construction der Perspectiven von lothrechten und horizontalen Objecten.

a. Geradlinige geometrische Figuren und Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt sind.

Zweites Kapitel. Perspectiven lothrechter und horizontaler Linien . . . 101
Drittes Kapitel. Perspectiven horizontaler und lothrechter Ebenen . . . 114
Viertes Kapitel. Perspectiven gegebener Strecken auf horizontalen und lothrechten Linien. — Der Theilpunkt 121
Fünftes Kapitel. Hülfsconstructionen.
A. Die Distanzpunkte außerhalb der Constructionsfläche 133
B. Der herabgeschlagene Gesichtspunkt liegt außerhalb der Constructionsfläche 135
C. Die Perspective des Verschwindungspunktes liegt außerhalb der Constructionsfläche 140
D. Der Theilpunkt liegt außerhalb der Constructionsfläche 154
Sechstes Kapitel. Beispiele 157
Siebentes Kapitel. Nachträgliche Ermittelung der zur Construction erforderlichen Hülfspunkte u. dgl. aus dieser selbst . . 201

b. Krummlinige geometrische Figuren und Körper, welche von krummen Flächen begrenzt sind.

Achtes Kapitel. Perspectiven krummer Linien 210
Neuntes Kapitel. Beispiele. Perspectiven von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt sind 219

B. Construction der Perspectiven von schiefen Objecten.

Zehntes Kapitel. Perspectiven schiefer Linien und Ebenen 249
a) Lothrecht-schiefe Ebenen 251
b) Andere einfach-schiefe Ebenen 253
c) Doppelt-schiefe Ebenen 261
Elftes Kapitel. Beispiele 268
d) Ebenen, welche schief zu schiefen Ebenen sind 272
e) Schnittlinien schiefer Ebenen 274

Zweiter Abschnitt.

Zwölftes Kapitel. Constructionen auf der horizontalen ebenen Bildfläche . . . 294

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Seite

Dreizehntes Kapitel. Constructionen auf der schiefen ebenen Bildfläche. . . . 296

Vierter Abschnitt.

Constructionen auf der gekrümmten Bildfläche.

Vierzehntes Kapitel. Das Panorama 299
Funfzehntes Kapitel. Das Kuppelbild 307

Fünfter Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Schattengrenzen.

Sechzehntes Kapitel. Allgemeines 308
Siebzehntes Kapitel. Constructionen 317
Achtzehntes Kapitel. Die künstliche Flamme 322
Neunzehntes Kapitel. Sonnen- und Mondlicht 335
a) Die Sonne im Horizonte 336
b) Die Sonne im Zenithe 336
c) Die Sonne in der verlängerten Bildebene 337
d) Die Sonne hinter der Bildebene 344
e) Die Sonne vor der Bildebene 350
Zwanzigstes Kapitel. Atmosphärisches Licht 356
Einundzwanzigstes Kapitel. Construction der Schattenperspectiven auf der horizontalen ebenen Bildfläche 364
Zweiundzwanzigstes Kapitel. Construction der Schattenperspectiven auf der schiefen ebenen Bildfläche 366
Dreiundzwanzigstes Kapitel. Construction der Schattenperspectiven auf der cylindrisch gekrümmten (Panorama-) Bildfläche 367
Vierundzwanzigstes Kapitel. Hülfsconstructionen 370

Sechster Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Spiegelbilder.

Fünfundzwanzigstes Kapitel. A. Ebene Spiegel 374
Sechsundzwanzigstes Kapitel. Construction der Spiegelbilder der Schatten 393
Siebenundzwanzigstes Kapitel. B. Gekrümmte Spiegel 393
Achtundzwanzigstes Kapitel. a) Convexe Spiegel 396
Neunundzwanzigstes Kapitel. b) Concave Spiegel 413
Dreißigstes Kapitel. Anleitung zur Berichtigung der Perspective in einer Skizze und zur Verwendung der letzteren bei der Construction der Perspective im ausgeführten Bilde selbst 423
Tabelle der Winkel-Tangenten 431
Register zur ersten Abtheilung 433
Register zur zweiten Abtheilung 434

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

Der dem Menschen inwohnende Trieb, sinnlich Wahrgenommenes, Empfundenes oder Gedachtes Anderen mitzutheilen, findet verschiedene Mittel, sich zu äußern. Entweder dienen ihm hierzu Sprache, oder Töne, oder Geberden, oder bildliche Darstellungen. Geschieht die Anwendung dieser Mittel auf eine wahre und zugleich schöne Weise, so ist sie Kunst, und gehört je nach der Art der Mittel dem Gebiete der Poesie, oder der Musik, oder der Schauspielkunst, oder dem der sogenannten bildenden Künste an.

Um der Aufgabe dieser Blätter nahe zu bleiben, sehen wir von einem Eingehen auf das Wesen der Kunst im Allgemeinen ab und fassen nur die letztgenannten Künste, welche die Malerei, die Sculptur und die Architektur in sich begreifen, ins Auge. Es leuchtet ein, daß diese ihre Typen ausschließlich dem sinnlich Wahrnehmbaren entlehnenden Künste vor allen anderen der Bestimmtheit und Gediegenheit des Ausdruckes bedürfen, da ihre Erzeugnisse nicht allein vor den Sinnen des Beschauers ruhend verweilen und nur allmählich auf seine Vorstellung wirken, sondern auch, was wesentlich die Schöpfungen der Malerei und Sculptur betrifft, die Aufgabe haben, eine ganze Reihe von Momenten in einen einzigen ausführlich beschreibend zusammenzufassen.

Digitized by Google

Obgleich den beiden anderen Künsten nahe verwandt, nimmt doch die Architektur eine etwas gesonderte Stellung ein, weil sie nicht beschreibend, sondern erfindend und construirend verfährt. Jene beiden haben die Darstellung des Schönen mit den ihnen eigenthümlichen Mitteln zum Zweck, diese bedient sich des Schönen, um einen materiellen Zweck in schöner Form zu verwirklichen.

Von den beiden obengenannten Erfordernissen eines Kunstwerkes, der Schönheit und der Wahrheit — womit hier die absolute äußerliche, nicht die poetische Wahrheit gemeint ist — läßt sich die erstere nicht lehren, kaum definiren. Obgleich dem Eindrucke des Schönen Jeder mehr oder weniger zugänglich ist, so können das Wesen und die Bedingungen der Schönheit doch nur nach einer durch Anschauen und Vergleichen edler Vorbilder selbstvollbrachten Läuterung des Gefühls erkannt werden.

Das andere Erforderniß, die Wahrheit, läßt sich definiren und lehren. Die Wahrheit eines Werkes der bildenden Kunst ist die Uebereinstimmung seines Eindruckes auf die menschliche Empfindung mit dem Eindrucke des natürlichen Vorbildes selbst.

Um die Bedingungen dieser Uebereinstimmung erfüllen zu können, reicht nicht die technische Befähigung allein des Künstlers aus; es muß ihr vielmehr die Vertrautheit mit gewissen Zweigen des Wissens, ohne welche sie nie den erschöpfenden Ausdruck zu finden vermag, zur Seite stehen. Als die vornehmlichsten unter diesen sind folgende hervorzuheben:

1) Anschauen, Beobachten und Vergleichen der natürlichen Gegenstände haben zur Erkenntniß gewisser Normen und Gesetze in ihrer Bildung geführt, welche verschiedenen Wissenschaften als Grundlage dienen. Mit diesen muß sich der selbständig schaffende Künstler wenigstens theilweise bekannt gemacht haben, wenn er zuvörderst die Beschaffenheit und die Formen seiner Vorbilder selbst verstehen und in seine Vorstellung überhaupt richtig aufnehmen will. Dahin gehört z. B. die Kenntniß des Baues des menschlichen Körpers, der Anatomie der Thiere, der Botanik u. s. w.

2) Da ferner jeder natürliche Gegenstand anders erscheint, als er ist, bedarf es für den Künstler sowohl des Verständnisses

Digitized by Google

der aus der räumlichen Beziehung seines Auges zu seinem Vorbilde hervorgehenden scheinbaren Veränderungen des letzteren, als auch der Kenntniß derjenigen Veränderungen, welche das Licht in der Erscheinung der natürlichen Vorbilder theils wirklich, theils vermöge seiner Einwirkung auf das Auge nur scheinbar hervorbringt; also überhaupt der Gesetze der sinnlichen Wahrnehmung mittels des Auges.

Die Wissenschaft, welche dieses Verständniß darbietet, ist die Optik; der Theil jedoch ihrer Gesetze, welcher speciell auf die bildliche Darstellung anwendbar ist, wird unter Künstlern gewöhnlich mit dem Namen der Luftperspective bezeichnet, würde jedoch passender Lichtperspective heißen.

3) Endlich ist es erforderlich, daß der Künstler die Regeln kenne, deren Befolgung die bildliche Darstellung der vollen körperlichen Form auf einer Fläche dem Auge natürlich erscheinen läßt. Diese Regeln lehrt die Linearperspective; zur Unterscheidung von der Luftperspective so genannt, weil sie, ein Zweig der darstellenden Geometrie, sich wesentlich auf die mathematische Construction durch gerade Linien stützt und darauf abzielt, die scheinbaren Umrisse der Objecte und ihrer Theile vermittelst Linien auf der Fläche des Bildes zu bezeichnen.

Die Belehrung in den unter 2) und 3) erwähnten, dem Künstler unentbehrlichen Wissenszweigen ist als Aufgabe der beiden Abtheilungen des vorliegenden Werkes ins Auge gefaßt.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erſte Abtheilung.

Luftperſpective.

Digitized by Google

Digitized by Google

Optik.

Unter den Sinnen, durch welche wir von dem Vorhandensein §. 1.
und der Beschaffenheit des außer uns Befindlichen eine Vorstellung bekommen, ist der Gesichtssinn, in dem Auge verkörpert, der am meisten thätige insofern, als er uns im wachenden Zustande auch ohne unsere besondere Willensthätigkeit ununterbrochen Eindrücke von der Außenwelt zuführt. Nächst dem Tastsinn ist er zugleich der zuverlässigste; durch ihn pflegen wir die Richtigkeit der mittels anderer Sinne gemachten Wahrnehmungen gewissermaßen zu controliren.

Wie alle anderen Sinne, um thätig zu sein, eine unmittelbare oder mittelbare körperliche Berührung mit dem Wahrgenommenen erfordern, so besteht auch für den Gesichtssinn keine andere als körperliche Vermittelung zwischen ihm und dem Wahrgenommenen. Sie wird hergestellt durch das Licht. Ohne dasselbe ist das Sehen unmöglich.

Erstes Kapitel.

Das Licht.

a) Allgemeines.

Um die Erscheinung des Lichtes zu erklären, nimmt man an, §. 2.
daß der Weltenraum und mehr oder weniger alle Körper von einem überaus feinen, unwägbaren, elastischen Mittel, dem Aether, erfüllt seien, und daß ein leuchtender Körper, als Ursache des Lichtes, den Aether in eine Bewegung versetze, welche sich durch ihn nach

Digitized by Google

allen Richtungen hin fortpflanzt. Diese Bewegung, nächst der des elektrischen Stromes die schnellste, besteht in außerordentlich feinen, wellenartigen Schwingungen, welche in Ebenen geschehen, die rechtwinklig zur Fortpflanzungsrichtung sind.

§. 3. Selbstleuchtende Körper sind: die Sonne, die Fixsterne, glühende, elektrische, phosphoreszirende und durch Insolation, d. h. dadurch leuchtend gewordene Körper, daß sie dem Sonnenlicht eine Zeit lang ausgesetzt gewesen; außerdem faulende Stoffe aus dem Thier- und Pflanzenreiche und verschiedene Insekten.

Einen leuchtenden Körper denkt man sich als aus unendlich vielen leuchtenden Punkten zusammengesetzt. Ein leuchtender Punkt entsendet sein Licht geradlinig nach allen Richtungen. Jede einzelne dieser Richtungen kann als ein Lichtstrahl aufgefaßt werden.

Solche Körper, welche nicht die Eigenschaft haben, selbst zu leuchten, sondern nur dann erhellt erscheinen, wenn sie dem Lichte selbstleuchtender Körper ausgesetzt sind, nennt man dunkle Körper. Je nach dem Verhalten des Lichtes bei der Berührung mit ihnen unterscheidet man unter ihnen durchsichtige und undurchsichtige Körper, und nimmt an, daß die ersteren dem in ihnen vorhandenen Lichtäther die Schwingungen gestatten, während die undurchsichtigen Körper diese Schwingungen ganz oder doch zum größeren Theile verhindern.

Durchsichtige Körper sind: die Luft, das Wasser, krystallisirte Körper, Glas u. m. a. Bis zur Vollkommenheit besitzt jedoch kein Körper die Eigenschaft, das Licht hindurchzulassen; in zu großem Volumen wird er für dasselbe undurchdringlich, sowie andererseits als undurchsichtig bekannte Körper, z. B. einige Metalle, in sehr geringem Volumen, etwa zu Blättchen geschlagen, das Licht theilweise hindurchlassen.

§. 4. Trifft Licht auf die Oberfläche eines Körpers, so hindert dieser, da seine Masse den Schwingungen des Aethers hinderlich ist, die Fortsetzung der ursprünglichen Lebhaftigkeit und Richtung des Lichtes, und nur ein Theil desselben pflanzt sich in dem Innern des Körpers in veränderter Richtung und in minder schnellen und minder großen Schwingungen fort (Lichtbrechung, Refraction). Ein anderer Theil

Digitized by Google

folgt dem weiter unten ausgeführten Gesetze, welchem die Wellen flüssiger Körper folgen, die in ihrer Bewegung auf ein festeres Hinderniß treffen: sie werden von dem Körper aufgehalten und zurückgeworfen (Reflexion). Von der Oberfläche des hemmenden Körpers ist ein Theil erleuchtet und leuchtet nunmehr selbst, weshalb man ihn das Licht des Körpers nennt. Der Theil der Oberfläche, welcher dem Lichte abgewendet ist, bleibt unerleuchtet, er befindet sich im Schatten. Ebenso heißt der Raum hinter dem Körper, welchen keine Lichtstrahlen erreichen können, weil die dahin gerichteten von dem Körper aufgefangen werden, der Schatten, genauer der Schlagschatten. Tritt ein Theil eines andern von demselben Lichte beleuchteten Körpers in diesen Raum, so wird auf diesem Theile der Schlagschatten im Gegensatze zu den beleuchteten Theilen dieses Körpers sichtbar, und wird die Erscheinung der Dunkelheit auf dem letzteren der Schlagschatten des ersten Körpers genannt.

Ausführlicheres hierüber enthält der fünfte Abschnitt der zweiten Abtheilung.

b) Stärke der Erleuchtung.

§. 5. Die Stärke der wirklichen Erleuchtung eines Körpers hängt ab

1) von der Lichtstärke des leuchtenden Körpers;
2) von der Entfernung vom leuchtenden Körper;
3) von dem Winkel, unter welchem die erleuchtete Körperfläche gegen die Lichtstrahlen geneigt ist;
4) von der Beschaffenheit und dem Volumen der Körper, welche das Licht durchdringen muß, z. B. Luft oder Dünste, um den erleuchteten Körper zu erreichen.

Die Stärke der scheinbaren Erleuchtung, d. h. der Grad von Helligkeit, welchen das menschliche Auge wahrnimmt, hängt außerdem noch ab von der Beschaffenheit der erleuchteten Körperfläche, von dem Winkel, unter welchem das Auge die Fläche sieht, von der Entfernung der Fläche vom Auge, von der Stärke der Erleuchtung, in welcher andere in der Nähe befindliche Körper erscheinen,

Digitized by Google

und von noch anderen Umständen, welche erst weiter unten Erwähnung finden können.

Zur Erläuterung der obengenannten Bedingungen der Stärke der wirklichen Erleuchtung ist anzuführen:

§. 6. Zu 1. In je größere Schwingungen ein leuchtender Körper die Aethertheilchen zu versetzen vermag, desto stärker ist sowohl sein Licht, als auch die erhellende Wirkung auf einen von diesem Lichte getroffenen Körper.

§. 7. Zu 2. Indem sich die Lichtschwingungen von einem zum andern Aethertheilchen fortpflanzen, vertheilt sich dieselbe ursprüngliche Kraft auf immer mehr Theile, muß also für jedes einzelne entferntere Theilchen entsprechend geringer werden. In gleichem Maße nimmt auch die erhellende Kraft ab. Diese Abnahme findet nach folgendem Gesetze statt: „Die Stärke der Erleuchtung nimmt in demselben Verhältnisse ab, in welchem das Quadrat der Entfernung zunimmt."

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich am einfachsten beweisen, wenn man allein die Lichtquantität ins Auge faßt; nämlich:

Von allen von dem leuchtenden Punkte L (Fig. 1) ausgehenden Lichtstrahlen empfängt eine 3 Ellen entfernte und 9 Quadratfuß große Fläche C nur die innerhalb der Strahlenpyramide d e f g L liegenden Strahlen. Eine gleiche Strahlenmenge empfangen aber auch sowohl die nur 2 Ellen entfernte und 4 Quadratfuß große Fläche B, als die 1 Elle entfernte und 1 Quadratfuß große Fläche A. Es muß daher die dreifach entfernte Fläche C = 9 mal schwächer, die zweifach entfernte Fläche B = 4 mal schwächer erleuchtet sein als die einfach entfernte Fläche A, da dieselbe Lichtquantität bei C sich auf eine 9 mal größere, bei B auf eine 4 mal größere Fläche, als A ist, vertheilt.

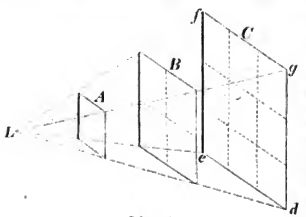

Fig. 1.

§. 8. Zu 3. Je mehr sich die Winkel, unter welchen Lichtstrahlen eine Körperfläche treffen, dem rechten Winkel

nähern, in desto höherem Grade ist die Fläche erleuchtet. Ist L in Fig. 2 ein leuchtender Punkt, A B eine ebene Fläche, welche von dem von L ausgehenden Lichte erleuchtet ist, und nimmt man der Einfachheit wegen von diesem Lichte nur 7 gleichweit von einander entfernte Strahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, von denen der mittelste die Fläche rechtwinklig trifft, in Betracht, so liegen die Wirkungspunkte E, C und F der Strahlen 3, 4 und 5, welche die Flächen unter nahezu rechten Winkeln treffen, offenbar näher an einander, als die Wirkungspunkte E, D, A und F, G und B der Strahlen 3, 2, 1, 5, 6 und 7, welche die Fläche unter kleineren Winkeln treffen, und muß deshalb der kleinere Raum zwischen E und F mehr erleuchtet sein, als die ebenfalls von nur je drei Strahlen getroffenen größeren Räume zwischen E und A und zwischen F und B. Hiernach muß denn auch die Stärke der Erleuchtung bei C am größten sein und von hier aus nach A und nach B hin allmählich abnehmen.

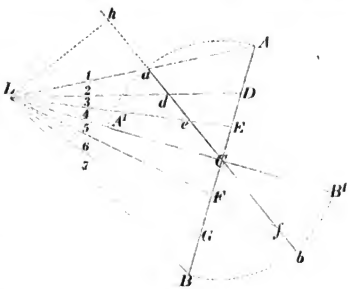

Fig. 2.

In der Lehre von der perspectivischen Construction der Beleuchtung und der Schatten nennt man den rechtwinklig einfallenden Strahl L C den Hauptstrahl, und seinen Wirkungspunkt C den Fußpunkt des Lichtes.

Wird die Fläche um C gedreht, bis sie in die Lage a b kommt, so wird sie nur von dem kleineren Strahlenbüschel a L b erleuchtet, welches aus etwas mehr als 5 Strahlen besteht. Sie muß deshalb, und da vollends diese Strahlen unter kleinen Winkeln einfallen, im ganzen weniger erleuchtet sein, als in der Lage A B. Theilweise wieder aufgehoben wird diese Abnahme der Erleuchtung dadurch, daß der Theil C a der Lichtquelle näher gekommen ist, als irgendein Theil der Fläche in der Lage A B, und zugleich dadurch, daß die

Digitized by Google

Wirkungspunkte a, d und e näher bei einander liegen, als in A B. Dafür ist aber auch die andere Hälfte C b der Lichtquelle weiter entrückt.

Will man den Fußpunkt des Lichtes für die Fläche in der Lage a b bestimmen, so verlängert man die Fläche über a hinaus und fällt von L aus eine Normale L h auf sie, wonach h dieser Fußpunkt ist.

Gar nicht erleuchtet wird die Fläche, sobald sie um C in die Lage $A^1 B^1$ gedreht ist, in welcher sie mit dem Hauptstrahle zusammenfällt. Sie empfängt in dieser Lage nur Streiflicht.

§. 9. Auffallender ist die Verschiedenheit der Erleuchtungsgrade auf einer gekrümmten Fläche. Tritt in Fig. 3 eine Kugelfläche an die Stelle der ebenen Fläche, so wird wieder im Punkte C, auf dessen Tangente der Hauptstrahl normal steht, die stärkste Erleuchtung sein. Nach F, G und B und nach E, D und A hin wird die Erleuchtung schneller abnehmen, als dies auf der ebenen Fläche geschah, weil die Winkel, unter welchen hier die Lichtstrahlen einfallen, nicht allein kleiner sind, sondern auch die Wirkungspunkte der Strahlen verhältnißmäßig entfernter von der Lichtquelle und zugleich entfernter von einander liegen. — Die Punkte B und A liegen im Streiflicht und bezeichnen die Grenze, bis zu welcher die Kugelfläche erleuchtet ist. An dieser Grenze fängt der Schatten der Kugel und zugleich ihr im Raume einen abgekürzten Kegel bildender Schlagschatten an.

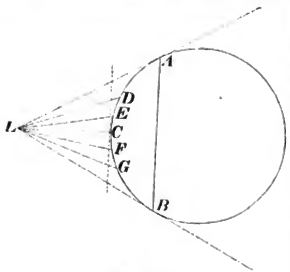

Fig. 3.

Die Stelle der stärksten Erleuchtung an einem Objecte pflegt man schlechthin das höchste Licht desselben zu nennen.

§. 10. Zu 4. Licht, welches nicht schon durch andere Körper hindurchgegangen wäre, ist nur oberhalb der Erdatmosphäre, allenfalls unter dem Recipienten der Luftpumpe denkbar. In der Nähe der Erdoberfläche wird die wirkliche Erleuchtung stets durch das Vorhandensein irgendeines die Lebhaftigkeit der Aetherschwingungen

Digitized by Google

hemmenden Körpers, wie Luft und Dünste, gemindert sein, und zwar je nach dem Maße, in welchem dieser Körper dicht und die Strecke lang ist, welche das Licht in demselben zu durchlaufen hat.

c) Reflexion des Lichtes.

Wenn Licht auf die Oberfläche eines Körpers trifft, so wird, §. 11.
wie schon oben (§. 4) angeführt ist, je nach der Beschaffenheit des Körpers ein größerer oder geringerer Theil des Lichtes von der Oberfläche zurückgestoßen (reflectirt), und zwar nach dem unten folgenden Gesetze.

Ist L in Fig. 4 ein leuchtender Punkt, von dessen Lichte man der Einfachheit wegen nur einen auf die vollkommen ebene Oberfläche OF eines Körpers schief einfallenden Strahl Lr in Betracht nimmt, so nennt man zuvörderst eine auf der Oberfläche in dem Punkte r normale Linie er das Einfallsloth, den Punkt r den reflectirenden Punkt, den Winkel Lre, welchen der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe bildet, den Einfallswinkel, den Winkel LrF, welchen der Strahl mit der Oberfläche bildet, den Neigungswinkel, und den zurückgestoßenen Strahl rA den reflectirten oder Ausfallstrahl.

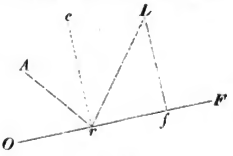

Fig. 4.

1) Die Zurückstoßung erfolgt nun an dem reflectirenden Punkte (r);

2) der Winkel OrA, welchen der reflectirte Strahl (rA) mit der Oberfläche bildet, ist gleich dem Neigungswinkel FrL des einfallenden Strahles; es ist deshalb auch der Winkel (Are), welchen der reflectirte Strahl mit dem Einfallslothe bildet, der Reflexionswinkel, gleich dem Einfallswinkel (Lre);

3) der reflectirte Strahl liegt in einer durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth denkbaren, auf der Oberfläche also normalen Ebene (Reflexionsebene).

Digitized by Google

§. 12. Ist die Oberfläche des Körpers gut polirt, so geschieht die Reflexion regelmäßig und die Lichtstrahlen werden mit geringerem Verlust an Stärke reflectirt, als bei der unregelmäßigen Reflexion von einer matten Oberfläche.

§. 13. Befindet sich in der Richtung reflectirter Strahlen ein Auge, so erwecken jene in demselben ebenso wohl die Thätigkeit des Sehens, wie vom leuchtenden Körper direct in dasselbe gelangende Strahlen.

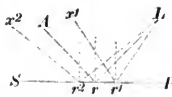

Fig. 5.

Ist nun die gerade Linie S P in Fig. 5 der Durchschnitt einer gut polirten ebenen Fläche eines Körpers, etwa einer Metallplatte, mit der Zeichnungsebene, ist L ein leuchtender Punkt innerhalb letzterer, so werden sämmtliche auf S P fallende Lichtstrahlen dem obigen Gesetze nach derart reflectirt, daß z. B. der Strahl L r¹ nach der Richtung r¹ x¹, der Strahl L r nach der Richtung r A, der Strahl L r² nach der Richtung r² x² zurückgestoßen wird u. s. f. In ein in der Richtung r A befindliches Auge A gelangt jedoch nur der eine bei r gebrochene Strahl L r A, und das Auge macht in der Richtung nach r hin fast dieselbe Wahrnehmung, als wenn es den leuchtenden Punkt L selbst sähe. Es wird daraus entnehmen, daß die Lichterscheinung in der Richtung nach r hin ein Spiegelbild des Punktes L und daß die Metallplatte ein Spiegel sei.

§. 14. Weil, wie gesagt, außer dem Strahle L r kein anderer nach A, dem Orte des Auges, reflectirt wird, Körper ohne eigenes oder reflectirtes Licht aber nicht sichtbar sind, so ist ferner außer dem hellen Punkte r die übrige Oberfläche der Metallplatte dem Auge nicht wahrnehmbar. Je vollkommener polirt die Oberfläche eines Körpers ist, je vollkommener sie reflectirt, desto weniger ist sie selbst dem Auge wahrnehmbar.

§. 15. Die mit einem Auge gemachte Wahrnehmung eines Spiegelbildes in einer gewissen Richtung reicht nicht hin, um eine richtige Vorstellung von der Entfernung desselben vom Auge, von seinem scheinbaren Orte, zu erwecken; es bedarf hierzu, aus weiter unten zu entwickelnden Gründen, der Mitthätigkeit des zweiten Auges.

Digitized by Google

Obgleich in das zweite Auge A^1, Fig. 6, ein anderer durch Reflexion abgelenkter Strahl $L r^1 A^1$ gelangt, als der in das erste Auge A reflectirte Strahl $L r A$, so nimmt der Träger der beiden Augen doch nur ein Spiegelbild des leuchtenden Punktes L wahr; und zwar liegt seine Wahrnehmung sowohl in der Richtung $A r$, als in der Richtung $A^1 r^1$, also im Schnittpunkte l der beiden Richtungen.

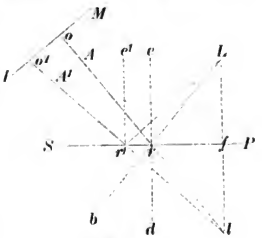

Fig. 6.

§. 16.

Vergleicht man nun den Ort des Spiegelbildpunktes l mit der Lage der Spiegelfläche SP und dem Orte des leuchtenden Punktes L selber, so ergiebt sich Folgendes:

1) Die Strecke $l r$ (Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles) ist gleich der Länge des Strahles $L r$, und der Winkel $l r P$ ist gleich dem Winkel $L r P$, da die Dreiecke $l r^1 r$ und $L r^1 r$ wegen Gleichheit einer Seite und der anliegenden Winkel einander gleich sind. Seite $r^1 r$ nämlich ist sich selbst gleich; Winkel $l r^1 r$ ist gleich dem Winkel $L r^1 r$, weil jener gleich seinem Scheitelwinkel $A^1 r^1 S$, und dieser gleich dem Neigungswinkel $L r^1 r$ ist; Winkel $l r r^1$ ist gleich dem Winkel $L r r^1$, weil die einzelnen Theile jenes, nämlich die Winkel $l r d$ und $d r b$ und $b r S$ den einzelnen Theilen dieses, $A r e$ und $e r L$ und $S r A$ (gleich $f r L$) gleich sind, weshalb auch ihre Summen gleich sein müssen.

2) Die Dreiecke $l r f$ und $L r f$ sind einander gleich wegen Gleichheit zweier Seiten und der von diesen eingeschlossenen Winkel. Nämlich Seite $r f$ ist sich selbst gleich; Seite $l r$ ist gleich der Seite $L r$, weil sie entsprechende Seiten der vorher als gleich erwiesenen Dreiecke $l r^1 r$ und $L r^1 r$ sind; Winkel $l r f$ ist gleich dem Winkel $L r f$, weil sie Nebenwinkel der in den gleichen Dreiecken $l r^1 r$ und $L r^1 r$ entsprechend liegenden Winkel $l r r^1$ und $L r r^1$ sind.

3) Die Strecke $l f$ des verlängerten Hauptstrahles ist gleich dem Strahle $L f$ selbst, weil sie beide entsprechend liegende Seiten der gleichen Dreiecke $l r f$ und $L r f$ sind.

Digitized by Google

§. 17. Aus diesen drei Sätzen sind folgende für die Construction der Perspectiven der Spiegelbilder wichtigen Regeln abzuleiten:

aus 1: Die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles bis zum Spiegelbilde ist gleich der Länge des einfallenden Strahles, und bildet mit der Spiegelfläche denselben Winkel, welchen der einfallende Strahl mit ihr bildet;

aus 2: Das Spiegelbild liegt im Schnittpunkte des verlängerten Hauptstrahles mit der Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles;

aus 3: Das Spiegelbild liegt in dem verlängerten Hauptstrahle so weit hinter der Spiegelfläche, wie das Object selbst vor derselben.

§. 18. Die Reflexion aller auf eine Spiegelfläche einfallenden Strahlen eines leuchtenden Punktes geschieht in Richtungen, welche sämmtlich durch den Spiegelbildpunkt gehen, sodaß dieser dem leuchtenden Punkte ähnlich zu leuchten scheint. Fängt man die reflectirten Strahlen auf einem nicht spiegelnden Schirme auf, so wird auf diesem eine Lichterscheinung von einer der des Spiegels ähnlichen, nur größeren Gestalt sichtbar — eine Lichterscheinung, welche in der Folge der Kürze wegen das Schirmbild, zur Unterscheidung von dem im Spiegel selbst wahrnehmbaren sogenannten subjectiven (Spiegel-) Bilde des Punktes, heißen möge. Hat z. B. die spiegelnde Fläche nur die Ausdehnung der Strecke $r^1 r$ (Fig. 6), und ist ein Schirm wie die Linie I M gerichtet, so wird das ganze auf den Spiegel $r^1 r$ einfallende Strahlenbüschel $r^1 L r$ so reflectirt, daß es auf dem Schirme den Raum zwischen o^1 und o erleuchtet, wie wenn dahin ein Büschel $o^1 l o$ directer Strahlen aus dem Punkte l gelangte.

§. 19. Da die Richtung des reflectirten Lichtes der des einfallenden Lichtes entgegengesetzt ist, sieht man häufig das Spiegelbild eines Objectes, ohne daß dieses selbst sichtbar ist.

§. 20. Das von einer spiegelnden Fläche nach einer andern ebensolchen reflectirte Licht wird von dieser wieder reflectirt, sodaß sich auf ihr ein Spiegelbild von dem Spiegelbilde jener zeigt. Dadurch kann,

Digitized by Google

je nach der Stellung der spiegelnden Flächen zu einander, die Zahl der einem einzelnen Objecte entsprechenden Spiegelbilder unendlich groß werden. Nimmt man der Einfachheit wegen nur zwei, etwa lothrechte, einander in einer Linie schneidende Spiegelflächen in Betracht, so ist, wenn man die Zahl der Grade des Winkels, welchen die Spiegel mit einander bilden, in 360° dividirt, die Zahl der einem Objecte entsprechenden Spiegelbilder gleich dem Quotienten minus 1.

Bilden z. B., wie in Fig. 7, die beiden Spiegel L I und S I mit einander den Winkel von 90°, so zeigen sich einem etwa in O befindlichen Auge außer den Bildern l I und s I der Grundlinien der Spiegel drei Bilder von dem einen Objecte E, und zwar scheinbar an den Orten e, e^2 und e^1. Es gelangen in diesem Falle von allen von dem Objecte ausgehenden Strahlen die beiden E ε O und E $ε^1$ O durch je einmalige Reflexion, der Strahl E $ε^0$ $ε^2$ O aber durch zweimalige Reflexion in das Auge.

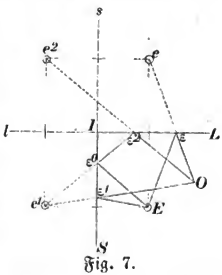

Fig. 7.

§. 21. Inwiefern aber das Zutreffen obiger Rechnung von dem Orte des Auges und dem des Objectes zwischen den Spiegeln abhängig ist, ist aus Fig. 8 zu ersehen, wo die Spiegel den Winkel von 120° mit einander bilden, und wo, außer dem überall, nur nicht von einem Punkte der Linie G I aus sichtbaren einen Spiegelbilde I P der beiden Spiegel-Grundlinien, dennoch

einem Auge an dem Orte O^1 nur ein Bild e des Objectes E vermittelst des einmal bei

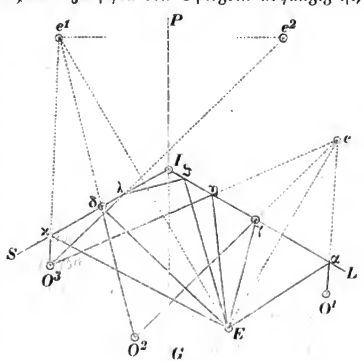

Fig. 8.

α reflectirten Strahles $E\alpha O^1$ und kein anderes Bild sichtbar wird, während

ein Auge am Orte O^2 zwei Bilder e und e^1 vermittelst der je einmal bei γ und δ reflectirten beiden Strahlen $E\gamma O^2$ und $E\delta O^2$,

ein Auge am Orte O^3 aber drei Bilder e, e^1 und e^2 vermittelst der beiden je einmal bei η und $\varkappa$ reflectirten Strahlen $E\eta O^3$ und $E\varkappa O^3$, und des dritten zweimal, bei ϑ und λ, reflectirten Strahles $E\vartheta\lambda O^3$ sieht.

§. 22. Sind die beiden Spiegelflächen einander parallel gestellt, wie K S und L G in Fig. 9, so zeigen sich einem an einem beliebigen Orte zwischen den Spiegeln befindlichen Auge O der Theorie nach

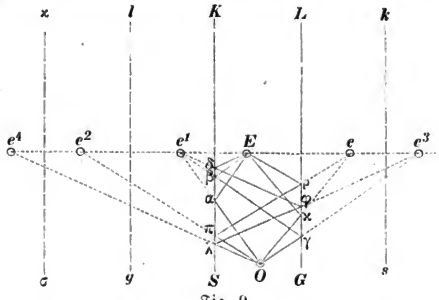

Fig. 9.

unendlich viele Bilder von dem einen Objecte E. Die Bilder e und e^1 sieht es vermittelst der je einmal reflectirten Strahlen $E\varkappa O$ und $E\alpha O$, die Bilder e^2 und e^3 vermittelst der je zweimal reflectirten Strahlen $E\varrho\pi O$ und $E\beta\gamma O$, das Bild e^4 vermittelst des dreimal reflectirten Strahles $E\delta\varphi\lambda O$ u. s. f. Da bei jeder Reflexion aber ein Lichtverlust eintritt, so werden die scheinbar entfernteren Bilder immer undeutlicher und endlich vollends durch das Spiegelbild des Beobachters selbst verdeckt.

§. 23. Glasspiegel sind zu Beobachtungen der Spiegelbilder ungeeignet, da ihre vordere und hintere Fläche zugleich reflectiren und dadurch an sich doppelte, sich theilweise deckende Bilder entstehen.

Digitized by Google

§. 24. Der an Körpern mit polirter oder von Natur glatter Oberfläche wahrnehmbare sogenannte Glanz ist nichts anderes als das, häufig unvollkommene, Spiegelbild des leuchtenden Körpers.

§. 25. Die Erörterung der zwar nach denselben Gesetzen erfolgenden, jedoch complicirteren Reflexionserscheinungen auf gekrümmten spiegelnden Flächen wird in der Lehre der perspectivischen Construction der Spiegelbilder angemesseneren Platz finden. Vorläufig genügt es, darauf hinzuweisen, daß die zweite der in §. 17 für ebene Spiegel hervorgehobenen Regeln auch für gekrümmte Spiegel gilt.

§. 26. Ist die Oberfläche eines Körpers nicht polirt oder von Natur spiegelnd, so geschieht die Zurückstoßung der Lichtstrahlen an jedem einzelnen Punkte der Oberfläche an sich regelmäßig, nach dem §. 11 gegebenen Reflexionsgesetze; da aber wegen der in der Fläche befindlichen Erhabenheiten und Vertiefungen die Lage der reflectirenden Punkte neben einander eine unregelmäßige ist, so werden auch die Strahlen in allen Richtungen unregelmäßig durch einander reflectirt.

Es mag sich daher ein Auge gegenüber der reflectirenden Fläche befinden, wo es wolle, es werden die kleinen Erhabenheiten und Vertiefungen der Fläche immer irgendeinen Punkt haben, an welchem ein Lichtstrahl in der Richtung nach dem Auge reflectirt wird, wie dies Fig. 10 veranschaulicht,

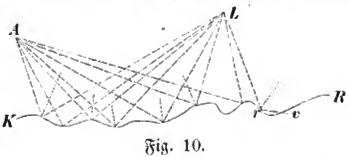

Fig. 10.

worin die krumme Linie zwischen den Punkten K und R die rauhe Oberfläche eines Körpers, L den leuchtenden Punkt und A den Ort des Auges vorstellt.

Demzufolge ist eine dem Licht ausgesetzte nicht polirte Oberfläche eines Körpers nicht allein sichtbar, sondern auch in ihrer ganzen Ausdehnung und von allen Seiten sichtbar.

§. 27. Sind die Erhabenheiten einer solchen Oberfläche an sich glatt, wie z. B. die einer Schneefläche, so bringt jede ein kleines subjectives Spiegelbild des leuchtenden Körpers hervor, und die ganze Fläche glänzt.

Digitized by Google

Uebrigens ist die Figur geeignet, das flatternde, sich unter Umständen vom Horizonte bis fast zu den Füßen des Beschauers hinziehende Spiegelbild der Sonne oder des Mondes zu erklären, welches man auf ausgedehnten Wasserflächen wahrnehmen kann, wenn dieselben vom Winde bewegt sind. Es ist dann von jeder Welle ein kleiner Flächentheil so gerichtet, daß er ein, meist unvollkommenes, Spiegelbild der Lichtquelle in das Auge reflectirt.

Ebenso ist der Glanz des Erdbodens in Landschaften nach dem Regen, der Glanz bethauter Wiesenflächen und Blättergruppen zu erklären als der Gesammteindruck der auf den Oberflächen der einzelnen Wasserpfützen, Thautropfen u. s. w. sich gestaltenden unregelmäßigen Spiegelbilder des leuchtenden Himmels auf das Auge.

§. 28. Sind die Erhabenheiten einer unvollkommen polirten Oberfläche nur gering, wie z. B. an polirtem Holze oder geglättetem Papier, so zeigt die Fläche annähernd die Eigenschaft eines Spiegels, und bringt ein um so weniger unvollkommenes subjectives Spiegelbild des leuchtenden Körpers hervor, je schiefer die Strahlen auf sie einfallen und demgemäß reflectirt werden; denn es werden in diesem Falle nur die Gipfel der Erhabenheiten vom Lichte getroffen und letzteres wird demnach gleichartiger reflectirt.

§. 29. Außer dem mit jeder Berührung mit einem Körper zusammenhängenden Verluste an Lebhaftigkeit seiner Schwingungen überhaupt erleidet das Licht bei unregelmäßiger Reflexion auch noch einen scheinbaren Mengeverlust insofern, als durch die Erhabenheiten einer nicht polirten Fläche ein großer Theil der Strahlen längs der Fläche oder seitwärts zu anderen Erhabenheiten hin reflectirt wird, wie dies in Fig. 10 der Strahl L r v zeigt.

§. 30. Das Schirmbild einer nicht polirten Fläche ist, weil diese das Licht in allen Richtungen durch einander reflectirt, sehr ausgedehnt und nicht begrenzt. Alle nicht hinter der Fläche und nicht mit ihr in einer Ebene befindlichen Gegenstände zeigen Spuren von dem von ihr reflectirten Lichte (Reflexlicht, Reflexe), am deutlichsten jedoch die Gegenstände an dem Orte, nach welchem die regelmäßige Reflexion gerichtet ist.

§. 31. Dem Umstande, daß das Licht von allen Körpern mehr oder weniger

Digitized by Google

zurückgestoßen wird und, auf andere reflectirt, von dort wieder zurückgestoßen, ins Auge gelangt, namentlich der unregelmäßigen Reflexion ist es zuzuschreiben, daß die nicht von directem Lichte erleuchteten oder in Schlagschatten befindlichen Theile der Körper nicht ganz unerleuchtet, d. h. schwarz erscheinen, vielmehr unterscheidbar sind.

d) Brechung oder Refraction des Lichtes.

§. 32. Daß der in einen Körper eindringende Theil des Lichtes innerhalb desselben fortgepflanzt wird, erklärt man durch die Annahme, daß zwischen den Massentheilchen der Körper Aether vorhanden sei.

Da ein Licht einlassender Körper demnach gewissermaßen selbst als Fortpflanzungsmittel der Lichtschwingungen angesehen werden kann, pflegt man ihn schlechthin ein Mittel oder Medium zu nennen.

Man nimmt ferner an, daß die Massentheilchen der Körper die Elasticität des in letzteren enthaltenen Lichtäthers modificiren und dieser deshalb die Lichtschwingungen langsamer fortpflanze als der Aether im leeren Raume. Man erklärt hiermit, und zugleich gestützt auf die Gesetze der Wellenbewegung, welchen auch die Lichtschwingungen unterliegen, die Erscheinung, daß normal auf die Oberfläche eines Körpers treffende Strahlen in diesen, ohne die ursprüngliche Richtung zu ändern, geradlinig eindringen, daß jedoch nicht normal auf die Oberfläche treffende Strahlen eine an der Oberfläche stattfindende Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, eine Brechung erleiden.

§. 33. Stellt z. B. in Fig. 11 die Linie K P die Oberfläche eines Körpers vor, eines Mittels wie etwa Wasser, die Linie L b einen durch den leeren Raum gehenden, auf die Oberfläche schief einfallenden Lichtstrahl, welcher innerhalb des Körpers nach der Richtung b g gebrochen ist, so heißt zuvörderst der Winkel g b f, welchen der gebrochene Strahl b g mit dem Einfallslothe e f bildet, der Brechungswinkel, der Winkel g b a, welchen der gebrochene

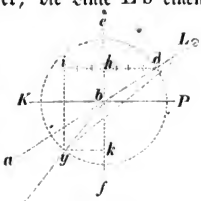

Fig. 11.

Digitized by Google

Strahl mit der geradlinigen Fortsetzung ba des einfallenden Strahles bildet, der Ablenkungswinkel, der Punkt b der brechende Punkt.

Die Brechung geschieht nun nach folgendem Gesetze:

1) Sie geschieht an der Grenzfläche (KP) der beiden Mittel (leerer Raum und Wasser) im Treffpunkte des einfallenden Strahles.

2) Der gebrochene Strahl liegt mit dem einfallenden Strahle und dem Einfallslothe in Einer, zur Oberfläche demnach normalen, Ebene.

3) Der Brechungswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel, wenn der Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres Mittel übergeht; im entgegengesetzten Falle größer.

Dieser letzte sehr allgemein aufzufassende Satz findet jedoch mannichfache Modificationen, da sogar manche als dichter bekannte Körper, wie z. B. Wasser, das Licht nicht so stark brechen wie andere als dünner bekannte, wie z. B. Spiritus. Im Allgemeinen brechen die brennbaren durchsichtigen Körper das Licht stärker.

§. 34. Unter denselben zwei Mitteln besteht jedoch immer dasselbe Verhältniß zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels: ein Verhältniß, welches der Brechungsexponent der beiden Mittel genannt wird. Für je zwei Mittel, wie z. B. für Luft und Wasser, kann dasselbe veranschaulicht werden, wenn man, sobald der einfallende Strahl, Lb in Fig. 11, gegeben ist, um den brechenden Punkt b mit beliebigem Radius einen Kreis schlägt, das Einfallsloth zieht, vom Schnittpunkte d des einfallenden Strahles mit dem Kreise eine Normale dh auf das Einfallsloth fällt und dieselbe, da der Brechungsexponent für Luft zu Wasser annähernd gleich 4:3 ist, in 4 gleiche Theile theilt, 3 dieser Theile auf die Verlängerung der Normalen von h aus in hi aufträgt und von i aus eine Normale durch die Wasserfläche zieht. Legt man dann durch den Punkt g, in welchem sie den Kreis schneidet, wieder eine zum Einfallsloth normale Linie gk, so ist in hd und kg das Verhältniß wie 4:3 des

Digitized by Google

Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels hergestellt, und b g ist die Richtung des gebrochenen Lichtstrahles.

Ein im Punkte g befindliches Auge würde hiernach den leuchtenden Punkt L nicht in der Richtung nach L hin, sondern in der nach b hin wahrnehmen, sowie andererseits, befände sich das Auge im Punkte L, und im Punkte g ein leuchtender Gegenstand, die von diesem verursachte Lichterscheinung dem Auge nicht in der Richtung nach g hin, sondern in der nach b hin wahrnehmbar sein würde. §. 35.

Eine die Brechung des Lichtes deutlich veranschaulichende Beobachtung läßt sich leicht anstellen, wenn man eine gerade, lange Nadel N L (Fig. 12) in ein mit Wasser gefülltes cylindrisches Glas derart schief stellt, daß sie einerseits in L auf der Peripherie des Bodens aufsteht, andererseits an den obern Rand des Glases lehnt. Hält man nun das Auge O in der Nähe des Punktes N, aber in der Verlängerung der Nadel, sodaß diese selbst von ihrer Grundfläche bei N gedeckt erscheint, so gelangt von allen von dem Punkte L ausgehenden Lichtstrahlen wenigstens einer, etwa der an der Wasseroberfläche (als Grenzfläche zwischen den beiden Mitteln Wasser und Luft, deren Brechungsexponent annähernd 3 : 4 ist) gebrochene Strahl L b O in das Auge, und erscheint diesem der Punkt L nicht in der Richtung O L, sondern in der Richtung O b liegend. Ebenso werden die von den zwischen A und L liegenden Punkten ausgehenden Lichtstrahlen an der Grenzfläche gebrochen; z. B. der des Punktes D so, daß sein gebrochener Strahl D c O in einer Richtung in das Auge gelangt, welche diesem den Punkt D an dem Orte d liegend erscheinen läßt. Demnach erscheint dem Auge das ganze im Wasser befindliche Stück der Nadel in der Lage A l, während doch bei der angenommenen Stellung des Auges die ganze Länge der Nadel selbst von ihrer Grundfläche bei N verdeckt ist.

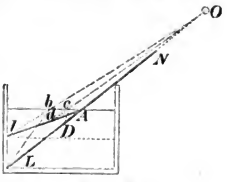

Fig. 12.

Da hiernach der Punkt L, welcher auf dem Boden des Gefäßes ruht, bis l gehoben erscheint, so erscheint auch der Boden selbst des Gefäßes gehoben.

Digitized by Google

Es ist hiermit zugleich erklärt, aus welchem Grunde klare Gewässer, deren Boden überhaupt sichtbar ist, weniger tief erscheinen, als sie wirklich sind.

§. 36. Es folgt aus dem Gesagten von selbst, daß Lichtstrahlen, welche, aus einem Mittel kommend, ein anderes durchdringen und dann wieder in das erste Mittel treten, an beiden Grenzflächen der Mittel nach dem entsprechenden Brechungsexponenten gebrochen, eine bedeutende Ablenkung von der geraden Linie erfahren, sodaß einem Auge, in welches der mehrmals gebrochene Strahl endlich gelangt, die Lichtquelle gänzlich von der Stelle gerückt erscheinen muß. Es kann ihm deshalb auch, wenn die Lichtquelle zugleich selbst vermöge der directen Strahlen sichtbar ist, dieselbe doppelt, unter Umständen auch häufiger vervielfältigt erscheinen.

Ist z. B. P R I in Fig. 13 der zur Achse normale Durchschnitt eines dreiseitigen Glasprismas, ist L ein leuchtender Punkt in Luft, und ist in A das Auge, so gelangt in dasselbe nach zweimaliger Brechung der von L in der Richtung L b ausgehende Strahl, indem er an der Fläche R I, dem Brechungsexponenten für Luft zu Glas (3 : 2) gemäß, in die Richtung b d und an der Fläche I P, dem Brechungsexponenten für Glas zu Luft (2 : 3) gemäß, in die Richtung d A, d. h. in das Auge gebrochen wird. Diesem scheint demnach der Ort der Lichtquelle nicht in L, sondern in der Richtung nach l zu liegen. Befände sich das Auge aber in O, so würde es, außer dieser Lichterscheinung in der Richtung nach l, den leuchtenden Punkt L zugleich direct sehen können.

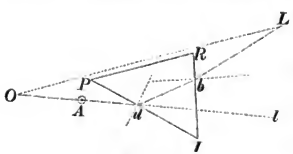

Fig. 13.

Die mit solcher Brechung der Strahlen weißen Lichtes stets verbundenen Farbenerscheinungen werden weiter unten erörtert werden.

Der Winkel P I R, welchen die beiden brechenden Flächen P I und R I des Prismas mit einander bilden, wird der brechende Winkel, die Kante I die brechende Kante des Prismas genannt.

Digitized by Google

Geht jedoch ein Strahl durch ein Mittel, dessen brechende Flächen §. 37.
eben und parallel sind, so tritt der an diesen zweimal gebrochene Strahl parallel dem einfallenden Strahle aus. Ist z. B. in Fig. 14 das Rechteck SCHE der zur Achse normale Durchschnitt eines vierseitigen Glasprismas mit parallelen gegenüberstehenden Flächen, und ist Lb ein von L aus durch Luft gehender Lichtstrahl, so wird derselbe an der Fläche HE dem Brechungsexponenten 3 : 2 gemäß in die Richtung bd gebrochen. Der gebrochene Strahl bd wird aber an der Fläche SC beim Uebergange aus Glas in Luft dem Brechungsexponenten 2 : 3 gemäß wieder in die Richtung dA gebrochen, welche mit dem einfallenden Strahle Lb parallel ist, da die Einfallslothe parallel und der erste Brechungswinkel β dem zweiten Einfallswinkel γ, und der erste Einfallswinkel α dem zweiten Brechungswinkel δ gleich ist.

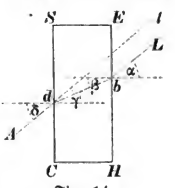

Fig. 14.

Befindet sich in der Richtung dA, etwa in A, ein Auge, so nimmt dasselbe sonach den leuchtenden Punkt zwar in einer zum einfallenden Strahle Lb parallelen Richtung, nach l hin, jedoch von der Stelle gerückt wahr, ein Vorgang, der alltäglich bei dem Durchblicke durch dicke Fensterscheiben zu beobachten ist.

Es läßt sich hiernach auch leicht erweisen, daß der austretende Lichtstrahl dem einfallenden auch parallel ist, wenn das Licht durch mehr als zwei an einander grenzende Mittel von verschiedenem Brechungsvermögen, aber mit unter einander parallelen ebenen Oberflächen, gegangen ist.

Nach denselben Gesetzen findet der Durchgang der Lichtstrahlen §. 38.
durch Mittel mit gekrümmten Oberflächen statt, z. B. durch sogenannte Glaslinsen. Zu verschiedenen optischen Zwecken werden diese bald auf beiden Seiten convex (biconvex), bald auf einer Seite eben und auf der andern convex (planconvex), bald auf einer Seite convex und auf der andern concav (convexconcav) u. s. w. angefertigt. Ohne auf die Erscheinungen, welche die Lichtbrechung durch diese verschiedenartig begrenzten Mittel bietet, näher einzugehen, sei hier

Digitized by Google

nur die Lichtbrechung durch eine auf beiden Seiten convexe Glaslinse in Betracht genommen:

Ist A B in Fig. 15 eine auf beiden Seiten convexe Glaslinse, so heißen zunächst die Mittelpunkte c und c^1 der kugelartigen Krüm-

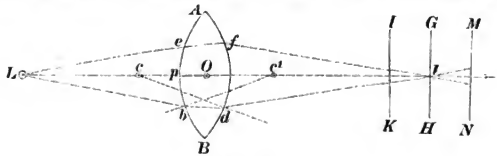

Fig. 15.

mungen der Oberflächen die Krümmungs-Mittelpunkte, eine Linie durch diese die Achse der Linse, der Punkt O der Achse in der Mitte zwischen beiden Krümmungen der optische Mittelpunkt.

Befindet sich nun in einiger Entfernung von der Linse in deren Achse ein leuchtender Punkt L, so geht der mit der Achse der Linse zusammenfallende Strahl desselben, L p, als normal auf die Oberfläche fallend, geradlinig hindurch. Ein anderer Strahl L b wird im Punkte b, wozu der Radius c^1 b das Einfallsloth ist, dem Brechungsexponenten für Luft zu Glas gemäß in die Richtung b d, und im Punkte d, wozu c d das Einfallsloth ist, dem Brechungsexponenten für Glas zu Luft gemäß in die Richtung d l gebrochen, sodaß er in l den Achsenstrahl schneidet. Ebenso wird ein dritter Strahl L e, dessen Punkt e ebenso weit von p entfernt ist wie b, erst in die Richtung e f und dann in die Richtung f l gebrochen. Faßt man nun das Ziel der zweimaligen Brechung aller innerhalb des Lichtbüschels e L b liegenden Strahlen ins Auge, so ergiebt sich, daß diese alle sich nach der Brechung im Punkte l oder doch in dessen nächster Nähe vereinigen oder vielmehr durchschneiden.

§. 39. Fängt man das Strahlenbüschel nach der Brechung auf einem Schirme G H, welcher durch den Punkt l gestellt wird, auf, so tritt hier als sogenanntes objectives Bild eine dem leuchtenden Punkte L ähnliche Lichterscheinung auf, während, wenn man den Schirm der Linse nähert oder von ihr entfernt, also in I K oder M N stellt,

Digitized by Google

sich eine kreisrunde Lichterscheinung zeigt, deren Größe mit der Entfernung vom Punkte l zugleich zunimmt.

Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes L einen körperlichen, leuchtenden Gegenstand, wie etwa eine Kerzenflamme, so zeigt sich auf dem Schirme, wenn er durch Punkt l steht, ein verkleinertes, umgekehrtes objectives Bild der Flamme und auch der Kerze, während, wenn der Schirm sich der Linse nähert oder von ihr entfernt, das Bild sich vergrößert, aber zugleich immer mehr an Deutlichkeit verliert, je mehr der Schirm sich nach jeder Seite vom Punkte l entfernt.

Die Begrenzung der Lichterscheinung auf dem Schirme ist bestimmter, wenn man durch eine Vorrichtung, etwa einen vor der Linse angebrachten rund ausgeschnittenen Schirm dafür sorgt, daß nur ein kleines Lichtbüschel in der Nähe der Achse durch die Linse geht und die nahe am Rande der Linse durchgehenden sogenannten Randstrahlen ausgeschlossen werden, weil diese nach zweimaliger Brechung zu weit vom Vereinigungspunkte der anderen Strahlen vorbeigehen.

§. 40. Je mehr der leuchtende Punkt sich der Linse nähert, desto mehr entfernt sich sein durch Brechung entstandenes Bild davon; je weiter der leuchtende Punkt von der Linse rückt, desto mehr nähert sich derselben sein Bild; und wenn er in unendliche Ferne rückt, sodaß seine Strahlen als parallel kommend angesehen werden können, wie die der Sonne, so vereinigen sich die gebrochenen Strahlen in einem Punkte der Achse, welcher der Brennpunkt der Linse genannt wird. Die Entfernung desselben vom optischen Mittelpunkte heißt die Brennweite der Linse. Befindet sich umgekehrt der leuchtende Punkt im Brennpunkte, so treten seine Strahlen nach der zweimaligen Brechung parallel aus; befindet er sich zwischen dem Brennpunkte und der Linse, so treten sie divergirend aus. Treffen convergirende Strahlen die Linse, so vereinigen sie sich nach der Brechung in einem Punkte, welcher der Linse näher liegt als der Brennpunkt.

§. 41. Eine mehrmalige Brechung hat auch das Licht erfahren, welches von nicht im Zenith stehenden Himmelskörpern zu uns gelangt, und

Digitized by Google

zwar eine desto stärkere Brechung, je näher dieselben dem Horizonte stehen, da ihre Strahlen alsdann durch die tieferen und darum dichteren Schichten der Erdatmosphäre gehen. Wenn z. B. die Sonne in der That unter dem Horizonte des Beobachters steht, so, daß der oberste Punkt ihrer Scheibe eben den Horizont berührt, so ist die Brechung ihrer Strahlen so stark, daß sie völlig über dem Horizonte zu stehen scheint.

Da ein an der oberen Grenze der Erdatmosphäre zuerst gebrochener Strahl, je mehr er sich der Erdoberfläche nähert, in den allmählich dichter werdenden Luftschichten, deren Oberflächen zudem zwar als parallel aber nicht als eben zu denken sind, allmählich immer stärker gebrochen wird, so ist seine Bahn in der Luft nicht eine gerade Linie, wie im Weltraume jenseit unserer Atmosphäre, sondern eine Curve, und der leuchtende Körper, von welchem er ausgegangen, erscheint in der Richtung der letzten in unser Auge tretenden Strahlenstrecke, also gehoben.

§. 42. Eine Ablenkung von der geradlinigen Bahn ist jedoch nicht allein bei dem Lichte der Himmelskörper nachweisbar, es können vielmehr in besonderen Fällen, bei eigenthümlichen Dichtigkeitsverhältnissen der untersten Luftschichten an der Erdoberfläche, auch irdische Objecte, welche unter dem Horizonte des Beobachters sind, diesem über dem Horizonte wahrnehmbar werden; von andern wieder, welche selbst direct sichtbar sind, können zugleich Spiegelbilder über oder unter ihnen sichtbar werden — Erscheinungen, welche unter den Namen der Fata Morgana und der Luftspiegelungen bekannt sind, bei deren Auftreten jedoch noch ein anderes hiernächst zu erörterndes optisches Gesetz, das der totalen Reflexion, mitwirkt.

Im Allgemeinen ist jedoch die Ablenkung der Lichtstrahlen von der geraden Linie, in der Nähe der Erdoberfläche, wenn es sich nicht um Wahrnehmungen in großer Entfernung, wie bei trigonometrischen Berghöhenmessungen, handelt, so unerheblich, daß für die gewöhnliche Beobachtung irdischer Objecte der Lichtstrahl in Luft als geradlinig angesehen werden darf.

§. 43. Untersucht man, wenn man das in §. 34 gezeigte Verfahren bei der Construction des einem gegebenen Einfallswinkel entsprechenden

Digitized by Google

Brechungswinkels ins Auge faßt, vermittelst mathematischer Construction, wie groß der Brechungswinkel zu dem größtmöglichen Einfallswinkel, nämlich dem rechten Winkel sein müsse, so findet man damit auch die Grenze der natürlichen Brechungserscheinungen selbst.

Handelt es sich z. B. um die Brechung eines aus Luft in Glas gehenden Lichtstrahles und man nähme in Fig. 16 den größtmöglichen, also 90° betragenden Einfallswinkel an, sodaß der Strahl L b mit der Glasoberfläche K R zusammenfiele, so müßte man dem gezeigten Verfahren gemäß um den brechenden Punkt b einen Kreis mit beliebigem Radius, etwa mit L b selbst, schlagen, dem Brechungsexponenten für Luft und Glas gemäß L b in drei gleiche Theile theilen, b i gleich zweien dieser Theile machen und durch i eine zur Glasoberfläche normale Linie ziehen, um in g den Punkt zu erhalten, nach welchem der gebrochene Strahl des größten Einfallswinkels gerichtet ist. Wenn nun, nach §. 32, ein normal einfallender Strahl e b sich geradlinig, also in der Richtung b f fortpflanzt, so ist es unzweifelhaft, daß alle zwischen L b und e b im Punkte b unter irgendeinem Winkel einfallenden Strahlen so gebrochen werden, daß ihre gebrochenen Strahlen zwischen b g und b f hindurchgehen.

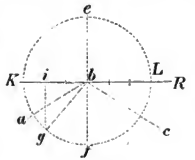

Fig. 16.

Wäre aber g b als ein bei b aus Glas in Luft tretender Strahl, dessen Einfallswinkel also g b f sein würde, gegeben, und man sollte seinen Brechungswinkel construiren, so müßte man das obige Verfahren umgekehrt anwenden und würde finden, daß g b in die Richtung b L, also die Trennungsfläche entlang, gebrochen wird und daß demnach auch die Richtungen der gebrochenen Strahlen aller im Punkte b innerhalb des Winkels g b f einfallenden Strahlen innerhalb des Winkels L b e liegen.

Alle im Punkte b, aber unter einem größeren als dem Winkel g b f, also innerhalb des Winkels g b K einfallenden Strahlen, wie z. B. a b, unterliegen dem Gesetze der sogenannten totalen oder innern Reflexion; sie werden nämlich vom Punkte b aus in das Glas zurückreflectirt und zwar mit einem geringeren Lichtverluste, als §. 44.

Digitized by Google

Strahlen erleiden, die von einem Metallspiegel innerhalb Luft reflectirt werden; ja der längs der Trennungsfläche gebrochene Strahl b L ist um vieles intensiver als der einfallende Strahl g b selbst. Es erklärt sich hierdurch der auffallend lebhafte Glanz geschliffener Edelsteine und Gläser nach gewissen Richtungen hin.

Sowohl für die Richtung als für die Schwingungsgeschwindigkeit der so reflectirten Strahlen ist in dem Gesetze der Wellenbewegung eine genügende Erklärung zu finden.

Indem der Strahl b g die Grenze des Einfallswinkels f b g bezeichnet, über welche hinaus Lichtstrahlen nicht mehr aus dem dichteren Mittel Glas in das dünnere Mittel Luft treten, sondern nur reflectirt werden können, heißt der Winkel f b g der Grenzwinkel für die Brechung aus Glas in Luft. Er beträgt annähernd 41°, während der Grenzwinkel für die Brechung aus Wasser in Luft annähernd $48\frac{1}{2}°$, der für (den überhaupt stark brechenden) Diamant in Luft ungefähr 24° beträgt.

§. 45. Das Gesetz der totalen Reflexion hat man bei Anfertigung eines Instrumentes für zeichnende Künstler, nämlich der Camera lucida benutzt. Dieselbe besteht wesentlich aus einem auf einem Stativ befestigten vierseitigen Glasprisma, welches in Fig. 17 im Querschnitt a b c d gegeben ist. Dasselbe hat an der Kante b einen rechten Winkel, bei d den Winkel von 135°, bei a und bei c den Winkel von $67\frac{1}{2}°$. Fällt auf das Prisma ein zur Fläche b c normaler Lichtstrahl L s ein, so pflanzt sich derselbe im Glase in gerader Linie bis r fort. Hier kann er nicht gebrochen aus dem Glase treten, weil er mit dem Einfallslothe daselbst den Einfallswinkel e r s von $67\frac{1}{2}°$ bildet und der Grenzwinkel für die Brechung aus Glas in Luft nur 41° beträgt; der Strahl wird also in die Richtung r t total reflectirt, dann in t aus demselben Grunde in die Richtung t f total reflectirt, und tritt

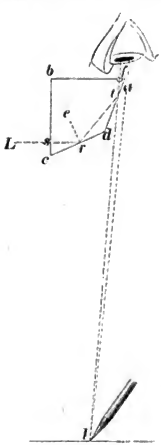

Fig. 17.

endlich in f fast normal zur Fläche a b aus dem Glase in Luft. Befindet sich nun in der Richtung t f des austretenden Strahles ein Auge, so nimmt dieses die Lichterscheinung in der Richtung f l wahr. Wird das Auge zugleich so gehalten, daß es neben der Kante a des Prismas vorbeiblicken kann, so vermag es die Spitze eines Zeichenstiftes auf einer unterliegenden Papierfläche dergestalt zu lenken, daß der Beobachter den Ort seiner Wahrnehmung auf dem Papiere markiren kann. Indem auf dieselbe Art das Licht anderer neben L liegenden, demselben Objecte wie L angehörigen Punkte gebrochen und total reflectirt wird, ist man im Stande, auf das Papier ein ziemlich richtiges perspectivisches Bild von dem in L befindlichen Objecte zu zeichnen.

Eine dem Gesetze der Brechung und der Reflexion zugleich §. 46.
folgende Erscheinung ist die des Regenbogens. Da jedoch die Berührung der Farbenerscheinungen bei einer Erklärung desselben unvermeidlich ist, so muß diese hiernächst in den von der Farbe handelnden Paragraphen ihren Platz finden.

e) Farbe.

Da es bis hierher nur darauf ankam, das Verhalten des Lichtes §. 47.
bei der Berührung mit Körpern in Bezug auf seine Bahn zu betrachten, konnte ein Lichtstrahl schlechthin als eine einzelne Richtung der von einem leuchtenden Punkte nach allen Richtungen sich verbreitenden Aetherschwingungen, wie eine mathematische gerade Linie angesehen werden. In den nunmehr folgenden Erörterungen besonderer Eigenschaften des Lichtes muß dem Wesen desselben gemäß ein Lichtstrahl als ein aus mehreren Theilen zusammengesetztes Ganzes, als ein feines Strahlenbündel aufgefaßt werden, schon weil ein einzelner Strahl von der Feinheit einer mathematischen Linie wohl zu denken, aber nicht zur Erscheinung zu bringen ist. Nichtsdestoweniger sind die Grenzen eines einzelnen Lichtstrahles in dieser Bedeutung, mag derselbe von der Sonne oder von irdischen leuchtenden Körpern herrühren, als parallel anzusehen.

Das von der Sonne kommende Licht ist weiß oder vielmehr §. 48.
farblos, jedoch, wie schon angedeutet, zusammengesetzt aus un-

Digitized by Google

zähligen farbigen Strahlentheilen, welche selbst in dem allerfeinsten Sonnenstrahle sämmtlich vorhanden sind. Es lassen sich diese farbigen Strahlentheile dadurch leicht zur Anschauung bringen, daß man einen durch eine feine kreisrunde Oeffnung in ein übrigens verfinstertes Zimmer dringenden Sonnenstrahl durch ein gläsernes dreiseitiges Prisma gehen läßt und in einiger Entfernung auf einem weißen Schirme auffängt.

Ist z. B. P in Fig. 18 das Prisma, durch welches ein bei der Oeffnung L eindringender Lichtstrahl geht, so ist, da hier die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet ist, die Lichterscheinung auf dem Schirme S M nach oben gerückt. Diese Lichterscheinung, das sogenannte Spectrum, ist aber nicht rund, wie sie, wenn das Prisma nicht wäre, bei l sein würde, sondern, bei einer der Oeffnung bei L gleichen Breite, in die Länge gezogen, und zwar oben und unten von Bogen, an den Seiten von geraden Linien begrenzt, wie dies in der Fig. 18 die Nebenfigur $r^1 v^1$ zeigt. Außerdem ist sie nicht weiß, sondern aus den sogenannten prismatischen Farben zusammengesetzt, welche, in einander übergehend, sich in folgender Ordnung von r nach v hin folgen: roth, orange, gelb, grün, hellblau, dunkelblau, violett.

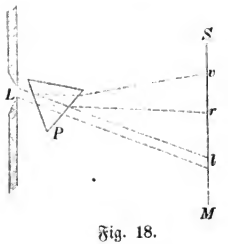

Fig. 18.

§. 49. Aus der Größe des Spectrums, verglichen mit dem Durchmesser der Oeffnung bei L ist ersichtlich, daß die Theile des Lichtstrahles in divergirende Richtungen ausgebreitet sind, daß der Lichtstrahl zerlegt, dispergirt (Dispersion: Farbenzerstreuung) ist. Die verschiedene Anordnung der Farben im Spectrum beweist, daß die Theile des Strahles von ungleicher Brechbarkeit sind und zwar, daß die rothen Theile weniger brechbar, die gelben mehr, noch mehr die blauen, am stärksten brechbar die violetten Strahlentheile sind: eine Erscheinung, die mit der für die verschiedenen Farben bestehenden Verschiedenheit der Wellenlängen und Schwingungsgeschwindigkeiten im Zusammenhange steht. Es haben

Digitized by Google

nämlich die rothen Farbenstrahlen längere Wellen und kleinere Vibrationsgeschwindigkeit, die violetten Strahlen halb so lange Wellen und doppelte Geschwindigkeit. Die größere Vibrationsgeschwindigkeit erfordert geringere Wellenlänge, damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Farben gleich sei. Die zwischen roth und violett liegenden Farben bilden zwischen beiden einen Uebergang hinsichtlich der Wellenlängen und Vibrationsgeschwindigkeiten, ohne daß jedoch eine dem Uebergange der Farben entsprechende gleichmäßige Abstufung besteht.

§. 50. Da man im Allgemeinen die Farben orange, grün und violett als Mischfarben aus roth und gelb, gelb und blau, blau und roth ansieht, so pflegt man die Farben roth, gelb und blau des Spectrums Hauptfarben zu nennen. Es entstehen jene Mischfarben des Spectrums jedoch keineswegs aus Vermischung der benachbarten Hauptfarben und sie können auch nicht in diese zerlegt werden. Denn durchlöchert man den Schirm z. B. an der Stelle, an welcher sich die grüne Farbe im Spectrum zeigt, und läßt diese grünen Strahlen abermals durch ein hinter die Oeffnung gehaltenes Prisma gehen, so werden sie hierdurch zwar von neuem gebrochen, keineswegs aber in gelb und blau zerlegt, sie bleiben vielmehr grün.

§. 51. Läßt man die bei dem (§. 49) mit dem Prisma angestellten Versuche in divergirende Richtungen ausgebreiteten Farbenstrahlen durch eine Glaslinse (oder auch ein dem ersten Prisma paralleles anderes Prisma mit demselben brechenden Winkel, dessen brechende Kante jedoch entgegengesetzte Lage hat) gehen und fängt sie in der Entfernung des Brennpunktes der Linse wiederum auf einem weißen Schirme auf, so zeigen sich auf diesem sämmtliche farbigen Strahlen wieder zu einer weißen Lichterscheinung vereinigt, so, als wenn diese von directem, ungebrochenem Lichte herrührte. Schließt man aber von diesem zweiten Durchgange eine oder mehrere Farben aus, so ergiebt die Vereinigung der übrigen nicht weißes Licht, sondern die complementäre Farbe (s. §. 52) der ausgeschlossenen Farben. Es ist hiernach zur Erscheinung weißen Lichtes die Vereinigung aller prismatischen Farben erforderlich.

§. 52. Wenn man nur die drei sogenannten Hauptfarben in Betracht

Digitized by Google

nimmt und die anderen schlechthin als Mischfarben ansieht, so wird nach dem Vorigen jede Hauptfarbe durch die Zumischung der beiden anderen zu weiß ergänzt, also roth durch die Zumischung von gelb und blau, d. i. grün; gelb durch die Zumischung von blau und roth, d. i. violett; blau durch die Zumischung von roth und gelb, d. i. orange. Man nennt deshalb grün, violett und orange die complementären Farben von roth, gelb und blau, und diese umgekehrt die complementären Farben von jenen.

§. 53. Untersucht man die Zusammensetzung des farbigen Spectrums genauer, so ergiebt sich, daß dasselbe aus einer unzählbaren Menge kreisförmiger, der Größe der Lichtöffnung entsprechender, verschiedenfarbiger Sonnenbildchen (Spectra) zusammengesetzt ist, die eine der verschiedenen Brechbarkeit der Farbenstrahlen entsprechende Anordnung im Spectrum haben, in einander eingreifen und sich vermischen. Betrachtet man nämlich das längliche Gesammtspectrum durch ein einfarbiges, z. B. rothes Glas, welches (s. §. 61) nur die vom Spectrum reflectirten rothen Strahlen durchläßt, so sieht man nur ein kreisrundes rothes Spectrum.

§. 54. Stellt man den das Spectrum auffangenden Schirm sehr nahe an das brechende Prisma, so erscheint die Mitte des so früh aufgefangenen Spectrums weiß und, wenn die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet ist, oben von einem violetten, unten von einem rothen Rande begrenzt. Es liegen in diesem Falle die den einzelnen Farbenstrahlen entsprechenden kleineren Spectra so nahe bei einander, daß sie sich größtentheils decken und zu weiß vermischen, während nur die am oberen und unteren Rande vereinzelt bleibenden sich unvermischt zeigen.

Hieraus läßt sich das Auftreten farbiger Ränder an den Grenzen heller Körper erklären, welche man wahrnimmt, wenn man letztere durch ein Prisma betrachtet. Die farbigen Säume an dunklen Körpern, oben roth und unten violett, wenn die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet ist, rühren nicht von diesen Körpern selbst, sondern von ihrer helleren Umgebung her.

§. 55. Wegen der verschiedenen Brechbarkeit der das Licht bildenden Farbenstrahlen hat auch jede einfache Glaslinse für die verschiedenen

Digitized by Google

Farben verschiedene, wenn auch nahe bei einander liegende Brennpunkte, und zwar liegt der Brennpunkt für die weniger brechbaren rothen Strahlen entfernter als der für die violetten Strahlen. Das von einer gewöhnlichen Linse erzeugte und auf einem weißen Schirme aufgefangene Bild der Sonne ist deshalb in der Mitte weiß, aber mit einem farbigen Rande versehen.

Um diesem die Reinheit und Schärfe der von einer Linse erzeugten Bilder störenden Umstande einigermaßen abzuhelfen, pflegt man in optischen Instrumenten eine biconvexe und eine convexconcave Linse von Glasarten (Crownglas und Flintglas) zu combiniren, welche ungefähr gleiche brechende, aber verschiedene zerstreuende Kraft haben.

Unter brechender Kraft oder Brechungsvermögen versteht man die Fähigkeit eines Mittels, das Licht von der geradlinigen Bahn abzulenken; unter zerstreuender Kraft oder Zerstreuungsvermögen die Kraft eines Mittels, die das Licht bildenden Farbenstrahlen unter einem größeren oder kleineren Winkel auszubreiten. Solche zusammengesetzten, das Auftreten farbiger Ränder an den durch sie erzeugten Bildern möglichst ausschließenden Linsen nennt man achromatische Linsen. Fügt man zwei Prismen von den genannten Glasarten zusammen und zwar so, daß ihre brechenden Kanten entgegengesetzte Lage haben, so erfährt das durch ein so combinirtes achromatisches Prisma gehende Licht zwar eine Brechung, jedoch keine Farbenzerstreuung.

§. 56. Die Vollkommenheit der Erscheinung des prismatischen Spectrums kann man dadurch steigern, daß man das mittels eines Metallspiegels durch einen, etwa verticalen, Spalt in ein übrigens verfinstertes Zimmer reflectirte Sonnenlicht durch ein dem Spalte paralleles Prisma und eine hinter diesem aufgestellte achromatische Linse von großer Brennweite gehen läßt und in einiger Entfernung auf einem weißen Schirme auffängt. Das Spectrum auf dem Schirme ist unter diesen Umständen sehr farbenrein und zeigt eine große Menge zu seiner Längenausdehnung normaler, unregelmäßig vertheilter feiner dunkler Streifen, die sogenannten Fraunhofer'schen Linien.

Digitized by Google

Ihretwegen, auch mit künstlichem irdischen Lichte angestellte Beobachtungen haben ergeben, daß jeder metallische Stoff, wenn er innerhalb einer Flamme glüht, in dem Spectrum derselben einen oder mehrere gewisse farbige Streifen verursacht; daß letztere aber dunkel, gewissermaßen verlöscht werden, wenn man durch die Flamme die Strahlen einer andern intensiveren Flamme leitet. Jene dunklen Streifen im Sonnenspectrum versucht man nun durch die Annahme zu erklären, daß sich in der Sonnenatmosphäre Stoffe der erwähnten Art in glühendem, dunstförmigem Zustande befinden, und daß die Farben der Streifen, welche dieselben an sich im Sonnenspectrum verursachen würden, durch den Durchgang des intensiveren Lichtes des Sonnenkörpers durch seine Atmosphäre verlöscht, zu dunklen Streifen umgewandelt werden.

Die Fraunhofer'schen Linien sind auch subjectiv durch ein achromatisches Fernrohr wahrzunehmen, wenn man dasselbe dicht hinter das Prisma hält und so weit ausgezogen hat, daß, wenn man das Prisma beseitigte, man den Spalt deutlich sehen kann.

§. 57. Eine die prismatischen Farben in großer Pracht zeigende Naturerscheinung ist der Regenbogen. Derselbe wird im niederfallenden Regen sichtbar, wenn der Beobachter sich zwischen der Sonne und der in Regen niederfallenden Wolke befindet und die Sonne weniger als 42° über dem Horizonte steht. Er ist ein kreisförmiger Bogen von $2\frac{1}{4}$° Breite, dessen Mittelpunkt in einer von der Sonne durch das Auge des Beobachters gezogenen geraden Linie liegt. Er ist demnach im Horizonte gelegen, wenn auch die Sonne im Horizonte steht, unter dem Horizonte, wenn die Sonne über demselben steht. Der Regenbogen zeigt die prismatischen Farben in der in §. 48 angegebenen Reihenfolge, jedoch so, daß roth nach außen, violett nach innen gelegen ist. Erscheint noch ein zweiter sogenannter Nebenbogen, so liegt dieser außerhalb des Hauptbogens und zeigt die prismatischen Farben schwächer als dieser und in umgekehrter Ordnung.

Der Ort, an welchem diese Naturerscheinung sich dem Beschauer zeigt, weist darauf hin, daß sie durch Reflexion entsteht; ihre Farbe aber, daß sie zugleich durch Dispersion des Sonnenlichtes entsteht. Diese findet durch Brechung an den Oberflächen der einzelnen

Digitized by Google

Tropfen statt, und der Weg, welchen das Licht hierbei zurücklegt, ist folgender:

Ist z. B. s z b in Fig. 19 der stark vergrößerte Schnitt einer durch die Sonne und das Auge des Beobachters gedachten, etwa lothrechten Ebene mit einem der augenblicklich obersten Tropfen, welche den Regenbogen erzeugen — wobei die gedachte Ebene offenbar zugleich durch die von der Sonne durch das Auge nach dem Mittelpunkte des Regenbogens denkbare gerade Linie (gewissermaßen Regenbogenachse) geht — und ist ferner S s ein in derselben Ebene einfallender Sonnenstrahl, so wird dieser im Punkte s in die Richtung s z gebrochen; in z tritt er zum Theil aus, zum Theil wird er in die Richtung z b reflectirt; in b wird er wieder zum Theil reflectirt, zum Theil tritt er gebrochen und in das Farbenbüschel v b r, in welchem die violetten Strahlen in b v, die rothen in b r liegen, dispergirt aus. Befindet sich nun in der Richtung b r das Auge des Beschauers, so empfängt dieses die rothen Strahlen, während die anderen darüber hinweggehen. Indem auf dieselbe Weise die augenblicklich tiefer befindlichen Tropfen das Licht ebenfalls in Farben dispergiren, müssen von den unter dem Tropfen s z b zunächst folgenden anderen Tropfen im selben Augenblicke die orangefarbigen, von noch tieferen die gelben u. s. w., von den tiefsten reflectirenden Tropfen die violetten Farbenstrahlen in dasselbe Auge gelangen. Was nun hier als in einer durch die Sonne, das Auge und die Regenbogenachse gehenden lothrechten Ebene vorgehend gezeigt worden, geht auch in allen anderen durch die genannten drei Stücke denkbaren schiefen Ebenen vor, sodaß sich hiermit auch der Bogen, in welchem die Farben erscheinen, erklärt.

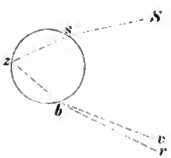

Fig. 19.

Die Erklärung der scheinbaren Breite des Regenbogens und die Begründung des Umstandes, daß diese Naturerscheinung nur bis zu einer gewissen Sonnenhöhe sichtbar werden kann, machen das Betreten des Gebietes der höheren Mathematik nothwendig, wovon hier füglich Abstand genommen werden muß.

Dem Vorigen ähnlich kommen die Farben des Nebenbogens zur

Digitized by Google

Erscheinung. Ist s z f b in Fig. 20 ein dem obigen gleicher Durchschnitt eines der augenblicklich obersten Tropfen des Nebenbogens,

Fig. 20.

so macht der Sonnenstrahl S s durch den Tropfen den Weg s z f b, wobei er zweimal, bei z und bei f, reflectirt wird; bei b tritt er in das Farbenbüschel r b v, in welchem die rothen Strahlen in b r, die violetten in b v liegen, zerstreut aus. Wird nun das Auge an demselben Orte, wie oben, angenommen, so gelangen in dasselbe von diesem Tropfen die violetten Strahlen, während die anderen Farben darüber hinweggehen. Von den zunächst tiefer folgenden Tropfen gelangen der Reihe nach die Farben dunkelblau, hellblau, grün u. s. w. in das Auge.

§. 58. In Bezug auf die bildliche Darstellung ist zu bemerken, daß, weil der Regenbogen eine durchaus subjective Erscheinung ist, derselbe für jeden Beobachter an einem andern Orte am Himmel sichtbar wird, und daß derselbe in bildlichen Darstellungen deshalb auch nicht objectiv, als Gegenstand der Wahrnehmung für gewisse selbst dargestellte Beobachter vorgeführt werden darf, sondern nur so, daß er dem Beschauer der Darstellung selbst als ein Kreisbogen erscheine, d. h., wenn sein Mittelpunkt mit dem Hauptpunkte der Darstellung zusammenfällt, als ein Kreisbogen, andernfalls als ein dem Kreise sehr ähnlicher Kegelschnitt.

Die im Wasserstaube der Wasserfälle und Springbrunnen wahrnehmbaren Farbenbogen sind dem Regenbogen völlig gleiche Erscheinungen.

§. 59. Da die durchsichtigen Körper die das weiße Licht zusammensetzenden Farbenstrahlen, wegen deren Verschiedenheit hinsichtlich der Wellenlängen und Vibrationsgeschwindigkeiten, nicht alle in gleichem Verhältnisse brechen und durchlassen können, so ist mit jeder Brechung eine Farbenzerstreuung verbunden, und ursprünglich weißes Licht ist nach dem Durchgange durch weiße oder farblose durchsichtige Körper gefärbt, wenn auch nur in geringem Grade. Als farblose durchsichtige Körper, welche das weiße Licht fast in der ihm eigenen Mischung, also kaum gefärbt, durchzu-

Digitized by Google

lassen vermögen, gelten Wasser und farbloses, sogenanntes weißes Glas.

Andere ebenfalls farblose durchsichtige Körper haben diese Eigen- §. 60.
schaft nicht, wie z. B. der Wasserdampf (welcher sonst alle Farbenstrahlen des weißen Lichtes in gleichem Verhältnisse durchläßt) während des Uebergangs in den dunstförmigen Zustand oder während der Rückkehr aus demselben. Indem er hierbei die anderen Farben meist absorbirt, läßt er vorzugsweise die rothen und gelben Strahlen durch. So entstehen die Erscheinungen der Abend- und Morgenröthe, welche zu Tageszeiten auftreten, an welchen der in der Atmosphäre schwebende Wasserdampf sich in dem gedachten Uebergangszustande befindet und die schwachen Farben nicht durch das grelle Sonnenlicht verdunkelt werden.

Haben durchsichtige Körper eine gewisse Farbe, so lassen sie be- §. 61.
sonders die Strahlen ihrer Farbe durch und absorbiren oder modificiren wenigstens die anderen. Deshalb scheinen Objecte, welche man durch ein farbiges Glas betrachtet, von der Farbe dieses Glases zu sein.

Die letzterwähnte Modificirung wird merklich an den von weitentfernten Objecten her in das Auge reflectirten Farben. Die helle gelblich weiße Farbe der Spitzen sehr entfernter Schneeberge vermag wegen ihrer Lichtstärke die blaue Luftmasse so weit zu durchdringen, daß sie dem Auge noch ziemlich erkennbar, wenngleich durch blau modificirt, ist. Sind jene Spitzen durch die Morgen- oder Abendröthe gefärbt, so erscheinen sie violettlich. Die dunkleren, weniger lichtstarken Farben jener Berge aber und der Schattenmassen derselben gelangen kaum merklich verschieden von der Farbe der Luft in das Auge.

Da bis hierher nur von den mit der Lichtbrechung zusam- §. 62.
menhängenden Farbenerscheinungen die Rede gewesen, bleibt noch übrig, die bei der Lichtreflexion auftretenden anzuführen:

Wegen der mit jeder Reflexion verbundenen Störung der Vibrationsgeschwindigkeiten der das weiße oder vielmehr farblose Licht bildenden einzelnen Farbenstrahlen ist das farblose Licht auch nach der Reflexion etwas geschwächt und durch die dabei statt-

Digitized by Google

findende Absorption gewisser Farbenstrahlen gefärbt, was selbst bei der regelmäßigen Reflexion durch gut spiegelnde Körper wahrnehmbar ist.

Mehr noch wird die Absorption merklich bei der Reflexion farbigen Lichtes. Die auf der Oberfläche selbst der klarsten Gewässer sich gestaltenden Spiegelbilder ziemlich hell- und reinfarbiger Objecte und des Himmels lassen deutlich eine Verdunkelung und Trübung der diesen eigenen Farben erkennen. Die dunklen Farben der Objecte und die Schatten derselben erscheinen bei der Spiegelung nicht sowohl dunkler, als stumpfer. Trübe Gewässer mischen, wie farbige Spiegel überhaupt, den Farben der Spiegelbilder die ihrige bei.

§. 63. Hat ein Körper die Eigenschaft, die das farblose Licht bildenden Farbenstrahlen alle in ziemlich gleichem Verhältnisse zu reflectiren und zwar so, daß dabei zugleich die unerträgliche Ueberreizung, die Blendung, des Auges aufgehoben ist, so nennt man ihn weiß, und das von ihm reflectirte Licht ist mittels des Prismas in die sieben prismatischen Farben zerlegbar; absorbirt ein Körper aber einen so großen Theil der Farbenstrahlen, daß der reflectirte Rest kaum einen Eindruck im Auge hervorbringt, so nennt man ihn schwarz, mit welcher Bezeichnung man den Begriff der Abwesenheit des Lichtes überhaupt verbindet. Unter grau versteht man die Vermittelung zwischen weiß und schwarz, gewissermaßen nur eine Trübung.

Weder grau, noch weiß oder schwarz haben Anspruch auf den Namen einer Farbe, denn grau ist stets eine trübe Nüance irgendeiner der prismatischen Farben, und weiß und schwarz sind Extreme der Helligkeit und Dunkelheit aller Farben zugleich.

§. 64. Reflectirt ein Körper vorzugsweise Lichtwellen von einer gewissen Geschwindigkeit, z. B. der der rothen Farbenstrahlen, so ruft deren Eintreten in das Auge die Vorstellung der entsprechenden Farbe, hier also des Rothen hervor, und man legt dem Körper die wahrgenommene Farbe als eine Eigenschaft bei. Die blaue Farbe der Luft (des Himmels) läßt annehmen, daß die Lufttheilchen von den das weiße Licht zusammensetzenden Farbenstrahlen vorzugsweise die blauen zu reflectiren vermögen. Es geschieht dies um so

Digitized by Google

vollkommener und ist darum die blaue Farbe der Luft um so reiner, je freier diese von Dünsten, Rauch- und Staubtheilchen ist, wie etwa nach dem Regen. Bei den Erscheinungen der Morgen- und Abendröthe ist die Luft von Wasserdampf (s. §. 60) erfüllt.

Farbestoffe oder Pigmente sind solche Körper, welche eine bestimmte Farbe fast vollständig absorbiren und daher die complementäre Farbe sehr rein und gesättigt reflectiren und, auf andere Körper übertragen, diesen die Eigenschaft mittheilen, wie sie selbst zu reflectiren.

§. 65. Da kein Körper von gewisser Farbe alle anderen Farbenstrahlen gänzlich zu absorbiren vermag und jeder Körper die Vibrationsgeschwindigkeit selbst der von ihm vorzugsweise reflectirten Farbe stört, so sind die reflectirten Farben niemals einfach und völlig rein, wie die des prismatischen Sonnenspectrums, sondern stets gemischt und getrübt.

§. 66. Wird ein Körper nicht von farblosem, sondern von einfarbigem Lichte getroffen, so reflectirt er vorzugsweise dieses, und zwar ziemlich rein, wenn er selbst weiß oder farblos ist. Schneeflächen und Wolken z. B. erscheinen im rothen Abendlichte geröthet. Hat der Körper aber eine bestimmte Farbe, so reflectirt er eine Mischung seiner Farbe mit der des Lichtes. Im gelben Kerzenlichte z. B. zeigen blaue Körper eine grünlichblaue Farbe.

§. 67. Bei Beobachtungen dieser Art hat man sich davor zu hüten, einem Körper unbedingt eine Farbe zuzuschreiben, welche, im Auge möglicherweise durch den Contrast mit anderen Farbenwahrnehmungen hervorgerufen, als sogenannte physiologische Farbe subjectiv zur Wahrnehmung kommt. (S. hierüber §. 108.)

Außer den beiden bisher behandelten, bei der Berührung des Lichtes mit Körpern auftretenden Erscheinungen, der Reflexion und der Brechung, giebt es noch andere Erscheinungen, deren Kenntniß für das Verständniß des Wesens des Lichtes von Wichtigkeit ist, und welche daher, wenn auch nur in Kürze, Erwähnung finden müssen. Es sind dies die durch Interferenz, durch Inflexion und durch Polarisation des Lichtes hervorgerufenen Erscheinungen.

Digitized by Google

f) Interferenz und Inflexion (Beugung) des Lichtes.

§. 68. Wie Eingangs gesagt, pflanzt sich das Licht durch wellenartige Schwingungen (Vibration) des Aethers fort, in welche denselben ein leuchtender Körper versetzt und welche ein Aethertheilchen dem andern mittheilt. Es ist dies nicht so zu verstehen, als rückten hierbei die einzelnen Aethertheilchen in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes mit vor; es bewegen sich dieselben vielmehr jedes innerhalb einer zur Fortpflanzungsrichtung normalen Ebene in allen Richtungen um jene hin und her.

Bezeichnet z. B. in Fig. 21 die krumme Linie ABCDE....G für einen bestimmten Moment die Orte A, B, C, D, E u. s. w. gewisser von der Seite A her erschütterten Aethertheilchen — wobei für den Augenblick von dem Schwingen derselben in allen Richtungen abgesehen ist — so schwingt das Theilchen A in der Ebene $a\,a^1$, das Theilchen B in der Ebene B b u. s. w.; die gerade Linie A G würde die Fortpflanzungsrichtung und die Länge A C die Länge einer Welle bedeuten. Da die Mittheilung der Bewegung eines Aethertheilchens an das andere Zeit erfordert, so beginnen die dem leuchtenden Körper ferneren Theilchen C, D und E, der Reihe nach später zu schwingen, als die ihm näheren A und B, sodaß, wenn z. B. B eben den Raum b^1B durchlaufen hat, um in B nach b umzuwenden, etwa C erst anfängt, sich nach c zu bewegen u. s. f.

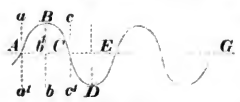

Fig. 21.

§. 69. Von einem leuchtenden Körper ausgehende Lichtstrahlen können wegen ihrer Divergenz an sich keinerlei Einfluß auf einander ausüben; wohl aber, wenn durch äußere Einwirkung die Richtung eines Theiles derselben so geändert wird, daß sie sich schneiden können. Zwei solcher von einer Lichtquelle ausgehenden, etwa vermittelst zweier beinahe in einer Ebene liegenden Spiegel nach einem Punkt reflectirten, nahezu parallelen Strahlen haben, in ihrem Schnittpunkte angekommen, offenbar verschieden lange Wege durchlaufen. Faßt man nun die Richtung ihrer Vibrationen im Schnittpunkte für

Digitized by Google

ienen bestimmten Moment ins Auge, so sind hier unter den vielen möglichen Fällen zwei besonders wichtig:

Sind z. B. in Fig. 22 die beiden im Punkte e sich schneidenden Linien a b und c d die beiden Lichtstrahlen, für welche die augenblickliche Lage der ihnen zugehörigen vibrirenden Aethertheilchen durch die geschlängelten Linien angedeutet sein möge, so bewegen sich hier die Aethertheilchen beider Strahlen durch den Punkt e hindurch augenblicklich nach einer Richtung.

Fig. 22.

Fig. 23.

Hat aber der eine der beiden Strahlen eine Verzögerung von einer gewissen Größe, nämlich einer halben Wellenlänge oder einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen erfahren, sodaß, wie Fig. 23 zeigt, die Wellen entgegengesetzte Lage haben, so bewegen sich die den beiden Strahlen entsprechenden Aethertheilchen durch den Punkt e hindurch in einem gegebenen Momente in entgegengesetzter Richtung.

Die Gleichheit der Richtung der Vibrationen im Schnittpunkte hat, der Theorie der Wellenbewegung gemäß, eine Verstärkung der Vibrationen und also auch der Erleuchtung des Schnittpunktortes, die Entgegengesetztheit der Richtung eine Schwächung oder Aufhebung der Vibrationen, also auch der Erleuchtung, zur Folge.

Die von einer derartigen Einwirkung der Lichtstrahlen auf einander herrührenden Erscheinungen nennt man Interferenz-Erscheinungen.

Diese Erscheinungen kommen besonders bei stattfindender Beugung des Lichtes zur Wahrnehmung. Der Theorie der Wellenbewegung gemäß erleidet nämlich das Licht beim Vorübergange an scharfen Kanten und beim Durchgange durch schmale Oeffnungen eine Störung der geradlinigen Fortpflanzungsrichtung, eine Beugung (Inflexion) insofern, als die in der Oeffnung befindlichen und

§. 70.

Digitized by Google

erschütterten Aethertheilchen hier als Mittelpunkte neuer sich seitlich verbreitenden Wellensysteme auftreten. Indem sich hierbei mehr gebeugte Strahlen mit weniger gebeugten schneiden, interferiren sie.

§. 71. Objectiv beobachten kann man diese Erscheinung, wenn man einfarbiges Licht, also etwa durch rothes Glas gegangenes Sonnenlicht, durch einen schmalen Spalt in ein übrigens verfinstertes Zimmer eintreten und in einiger Entfernung, etwa 6—9 Fuß weit von dem Spalte, durch einen, diesem parallelen, zweiten sehr feinen Spalt eines am besten metallenen Schirmes gehen läßt und in einiger Entfernung hinter diesem auf einem weißen Schirme auffängt. Es zeigt sich hier alsdann nicht allein ein heller, dem Spalte paralleler rother Lichtstreifen, sondern nach den beiden Seiten desselben hin außerdem noch mehrere durch dunkle Streifen getrennte, an Helligkeit allmählich abnehmende rothe Lichtstreifen. Für die verschiedenen Farben haben diese hellen und dunklen Streifen verschiedene Breite; im rothen Lichte sind sie am breitesten, im violetten Lichte am schmälsten. Dieser Umstand erklärt es, daß, wenn man statt einfarbigen Lichtes das sogenannte weiße Sonnenlicht durch den Spalt gehen läßt, sich keine dunklen Streifen, sondern neben dem mittleren sehr hellen Lichtstreifen prismatisch gefärbte Säume zeigen; denn hier fallen die hellen Streifen der verschiedenen, das weiße Licht zusammensetzenden Farben so dicht neben einander, daß sie die dunklen aufheben.

§. 72. Bequemer noch kann man eine durch Inflexion hervorgerufene Interferenz-Erscheinung subjectiv beobachten, wenn man durch ein sehr feines, durch ein Stanniolblättchen gestochenes kreisrundes Loch nach dem in einer kleinen Thermometerkugel gespiegelten Bilde der Sonne blickt. Es entsteht dann auf der Netzhaut des Auges eine der vorigen analoge Lichterscheinung. Man nimmt hier nämlich, weil die das Licht durchlassende Oeffnung kreisrund ist, einen hellen kreisrunden, von concentrischen Farbenringen umgebenen Fleck wahr.

§. 73. Am leichtesten und einfachsten beobachtet man die Inflexions-Erscheinung durch die Augenwimpern, indem man durch dieselben nach einer Flamme blickt.

Digitized by Google

Auf der Inflexion des Lichtes beruht auch das Farbenspiel der Perlmutter, der Flügeldecken mancher Insekten u. dgl. m., kurz solcher Körper, deren Oberflächen durch sehr feine Furchen durchzogen sind.

§. 74. Durch Interferenz sind die Farbenerscheinungen zu erklären, welche Körper von sehr geringer Dicke, dünne Schichten, hervorbringen, z. B. Seifenblasen, dünne Fischschuppen, eine dünne Schicht auf Wasser schwimmenden Oeles u. dgl. m. Es ist hier nämlich Interferenz folgendermaßen nachweisbar: Stellen z. B. in Fig. 24 die Linien C D und E F die Oberflächen eines der in Rede stehenden, hier stark vergrößerten Körpers vor, so wird ein auf denselben einfallendes Lichtstrahlenbündel L r bei r zum Theil in die Richtung r A reflectirt, zum Theil dringt es, in die Richtung r b gebrochen in den Körper ein. Der eingedrungene Theil r b tritt bei b zum Theil gebrochen aus, zum Theil wird er in die Richtung b s reflectirt. Der Theil b s wird in s abermals theils reflectirt, theils tritt er, in die Richtung s A gebrochen und, wegen der Dünne des Körpers, mit dem bei s einfach reflectirten Strahle s A fast zusammenfallend, aus. Wegen der Verzögerung — sie beträgt jedesmal eine halbe Wellenlänge, wenn das Licht an der Grenze eines dichteren Mittels durch ein dünneres gespiegelt wird — welche er im Vergleich mit dem einfach reflectirten Strahle s A erfahren, interferirt er mit diesem, und wegen der den verschiedenen Farbenstrahlen entsprechenden verschiedenen Wellenlängen verstärken sich hierbei einige der Farben, andere schwächen sich, und befindet sich in der Richtung nach A hin ein Auge, so kommen in demselben die verstärkten Farben vor den anderen zur Wahrnehmung. Eine geringe Aenderung in der Dicke der Schicht verursacht demgemäß auch andere Farbenerscheinungen.

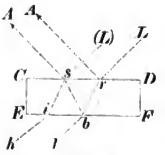

Fig. 24.

§. 75. Ebenso sind die sogenannten Newton'schen Farbenringe zu erklären, welche sichtbar werden, wenn man eine Glaslinse von geringer Krümmung auf eine ebene Glasplatte drückt. Hier verursacht die zwischen beiden Gläsern vorhandene dünne Luftschicht, welche

Digitized by Google

von allmählich abnehmender Dicke ist, die Interferenz der nahezu parallel in das Auge gelangenden, theils von ihrer oberen, theils von ihrer unteren Grenzfläche reflectirten Strahlen.

§. 76. Außer den reflectirten Strahlen interferiren auch, nur schwächer wahrnehmbar, die von dünnen Schichten durchgelassenen Strahlen (b l und i h in Fig. 24) und zeigen dann die complementären Farben zu denen der interferirten reflectirten Strahlen.

g) Polarisation des Lichtes.

§. 77. Dem in §. 4 Gesagten gemäß wird ein auf eine Glastafel einfallender Lichtstrahl von dieser zum Theil reflectirt, zum Theil durchgelassen, gewissermaßen also in zwei Theile gespalten. Beträgt der Neigungswinkel des einfallenden Strahles gerade $35\frac{1}{2}°$, so bekommt sowohl der durchgelassene als der reflectirte Theil — dieser jedoch in vollkommenerem Grade — eine hiernächst zu erörternde Eigenschaft, welche der einfallende Strahl selbst nicht hat und wegen welcher man die beiden Strahlentheile polarisirt nennt.

Läßt man nämlich zunächst den reflectirten Theil auf eine zweite Glastafel fallen, welche der ersten reflectirenden Glastafel parallel ist, so wird er von derselben wiederum reflectirt; dreht man sie aber so um den reflectirenden Punkt, daß sie fortwährend denselben Winkel mit dem reflectirten (polarisirten) Strahle bildet, so wird dieser, wenn die Drehung 90° oder 270° beträgt, von ihr nicht wieder reflectirt, wohl aber, wenn die Drehung 180° beträgt. Fig. 25, in welcher L r den unter $35\frac{1}{2}°$ (Neigungswinkel) einfallenden, r p den polarisirten Strahl vorstellt, veranschaulicht die Stellung der zweiten Glastafel in dem Falle, daß sie nicht gedreht ist, Fig. 26 die Stellung derselben in dem Falle, daß sie um 90° gedreht ist.

Fig. 25.

Fig. 26.

§. 78. Während also ein von der Lichtquelle direct einfallender Strahl von einer Glastafel, wie dieselbe auch bei fortwährend

Digitized by Google

gleichem Neigungswinkel um den reflectirenden Punkt gedreht wird, stets mit gleicher Intensität reflectirt wird, ist die abermalige Reflexion eines unter den oben angegebenen Umständen *reflectirten* (polarisirten) Strahles in zwei Fällen gänzlich aufgehoben. Man erklärt diese Erscheinung durch die Annahme, daß durch einen polarisirten Strahl die Aethertheilchen nicht wie durch den direct einfallenden Strahl *nach allen Seiten* um die Fortpflanzungsrichtung schwingen, sondern — wie in Fig. 27, wo Lr den auf die Glastafel ABC einfallenden Strahl vorstellt, angedeutet ist — *in einer Ebene* (EFGH), welche normal zu der Reflexionsebene (zugleich Polarisationsebene) des einfallenden Strahles ist, und daß auch diese Schwingungen aufgehoben werden, wenn sie auf eine Glastafel stoßen, deren Reflexionsebene für den polarisirten Strahl mit der Polarisationsebene einen rechten Winkel bildet. Diese Erklärung entspricht auch zugleich der Erscheinung, daß polarisirte Strahlen, wenn ihre Polarisationsebenen mit einander einen rechten Winkel bilden, mit einander nicht interferiren; sie erzeugen vielmehr unter Umständen circular- oder elliptisch-polarisirtes Licht.

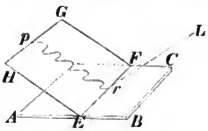

Fig. 27.

§. 79. Läßt man einen Lichtstrahl unter einem andern Winkel als $35\frac{1}{2}°$ auf eine Glastafel fallen, so wird er unvollständig polarisirt, d. h. er wird bei der unter den oben angeführten Umständen ausgeführten Drehung der zweiten reflectirenden Glastafel nicht gänzlich aufgehoben.

Für andere reflectirende Stoffe als Glas ist die Größe des Polarisationswinkels eine andere. Metalle vermögen das Licht überhaupt nur unvollständig zu polarisiren.

§. 80. Außer an dem reflectirten Theile des unter $35\frac{1}{2}°$ auf die Glastafel einfallenden Strahles ist auch an dem durchgelassenen Theile desselben eine, jedoch nur unvollständig erfolgte Polarisation nachweisbar. Es läßt sich diese vervollkommnen, wenn man den durchgelassenen Strahl durch mehrere parallele Glasplatten gehen läßt. Die Schwingungen des durchgelassenen polarisirten Strahles geschehen in einer Ebene, welche normal zu der der Schwingungen des reflectirten polarisirten Strahles ist.

Digitized by Google

Ein Eingehen auf die im polarisirten Lichte auftretenden, an sich äußerst interessanten Farbenerscheinungen würde, da sie für die künstlerische Wahrnehmung nie in Betracht kommen, zu weit von der Aufgabe dieser Blätter abführen, und muß deshalb dem Interesse des Einzelnen überlassen bleiben.

Zweites Kapitel.

Das menschliche Auge.

a) Die Camera obscura.

§. 81. Um das Verständniß der Einrichtung des menschlichen Auges zu erleichtern, ist es zweckmäßig, zuvor einen Apparat zu betrachten, welcher die Erscheinungen, mit welchen die Thätigkeit des Auges, insbesondere des Augapfels, in Zusammenhang steht, in größerer Einfachheit vorführt. Dieser Apparat ist die sogenannte Camera obscura.

Im Allgemeinen kann man jeden hohlen Körper, in dessen Inneres durch eine besondere Oeffnung Licht dringen kann, als eine Camera obscura in rohester Verfassung ansehen.

§. 82. Läßt man das Licht eines leuchtenden Punktes, z. B. einer sehr kleinen Flamme, durch eine kleine Oeffnung in das Innere eines etwa würfelförmigen Kastens dringen, so wird von allen von dem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen nur ein kleines Bündel von einem der Begrenzungsfigur der Oeffnung entsprechenden Querdurchschnitte eingelassen. Ist die Oeffnung rund, so ist das Strahlenbündel kegelförmig, ist die Oeffnung eckig, so ist das Bündel pyramidenförmig; in jedem Falle erleuchtet dasselbe auf der der Oeffnung gegenüberstehenden Wand eine der Oeffnung ähnlich begrenzte Stelle. So erleuchtet die in ein Zimmer scheinende Sonne auf dem Fußboden oder auf einer der Wände eine der Figur des Fensters entsprechend begrenzte Stelle.

§. 83. Läßt man das Licht eines leuchtenden Körpers von gewissen Dimensionen durch die Oeffnung dringen, so erleuchtet

Digitized by Google

jeder Punkt des Körpers eine der Figur der Oeffnung ähnlich begrenzte Stelle; da jedoch diese hellen Stellen in einer solchen Ordnung neben einander liegen, wie die leuchtenden Punkte des Körpers selbst, und sie sich zudem größtentheils decken, so wird der Einfluß der Figur der Oeffnung fast aufgehoben und es entsteht, wenn die Oeffnung nicht zu groß ist, auf der ihr gegenüberstehenden Wand ein mehr oder weniger scharf begrenztes, jedoch ziemlich deutliches, umgekehrt stehendes Bild des leuchtenden Körpers.

Ist z. B. in Fig. 28 der Stab S B ein solcher vor der kleinen kreisrunden Oeffnung O des Kastens C M E R befindlicher Körper, und man nimmt von allen leuchtenden Punkten desselben der Einfachheit wegen nur die vier Punkte S, T, A und B in Betracht, so vermag von allem von dem Punkte S ausgehenden Lichte nur ein kleines Strahlenbündel durch die Oeffnung O zu dringen und auf der Wand M E eine kreisrunde Stelle s, natürlich mit der dem Punkte S eigenen Lichtfarbe, zu erleuchten. Auf gleiche Weise werden die Stellen t, a und b von dem von den entsprechenden Punkten T, A und B ausgehenden Lichte, und ebenso auch alle anderen zwischen s und b liegenden Stellen erleuchtet. Da in der Oeffnung O die Strahlenbündel sich kreuzen, so muß das aus der Summe der erleuchteten Stellen auf der Wand M E entstehende Bild ein umgekehrtes sein. Ist die Wand M E der Oeffnung so nahe wie der Stab selbst, so muß das Bild so groß wie dieser sein; ist die Wand der Oeffnung näher, so muß das Bild kleiner, im entgegengesetzten Falle größer sein.

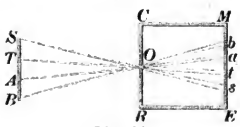

Fig. 28.

Hiernach ist es auch zu erklären, daß, wenn die Sonne durch sehr kleine Lichtungen des Laubes der Bäume scheint, die auf dem Boden erleuchteten Stellen stets kreisrund, nämlich Bilder der Sonne sind.

Stellt man die der Oeffnung gegenüberstehende Wand aus einem das Licht einigermaßen durchlassenden Stoffe, etwa aus mattem Glase oder geöltem Papiere her, so wird das hierauf fallende Bild einem außerhalb des Kastens befindlichen Auge sichtbar.

Digitized by Google

§. 84. Alle in einem Apparate von dieser einfachen Einrichtung entstehenden Bilder leiden jedoch an dem Uebelstande, daß, wegen der Kleinheit der Oeffnung, ihre Lichtstärke sehr gering ist und, wegen der Ausbreitung der von den einzelnen Punkten eines Objectes her eindringenden Strahlenbüschel, die Umrisse unbestimmt sind. Es wird dem dadurch abgeholfen, daß man, wie in Fig. 29, die Oeffnung O vergrößert und darin einen eine Sammellinse enthaltenden, an den Grundflächen offenen Cylinder K I anbringt, welcher je nach der Entfernung der zu beobachtenden Objecte so weit ausgezogen oder eingeschoben werden kann, daß der Vereinigungspunkt der durch die Linse nunmehr convergirend eindringenden Strahlen genau auf die Wand M E fällt. Aus der Figur ist leicht zu erkennen, daß durch die größere Oeffnung O ein größeres Strahlenbüschel von irgendeinem Punkte S des Stabes S B her eindringen kann, und daß die Grenzen dieses Büschels nicht wie in Fig. 28 sich innerhalb des Kastens erweitern, sondern durch die brechende Kraft der Linse zu einem Punkte s auf der Wand M E vereinigt werden. Es muß daher das Bild jedes einzelnen Punktes eines Objectes und deshalb auch das von diesem selber an Lichtstärke und Bestimmtheit der Begrenzung gewinnen.

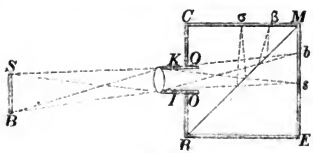

Fig. 29.

§. 85. Der in diesem Apparate gewöhnlich noch angebrachte, gegen die die Oeffnung enthaltende Wand unter 45° geneigte Spiegel, M R in Fig. 29, durch welchen je nach seiner Lage das Bild (in der Figur $\sigma\beta$) nach einer beliebigen Wand des Kastens (in der Figur nach der Wand C M) reflectirt wird, dient dazu, die umgekehrte Stellung des Bildes aufzuheben, und vermittelt zugleich eine bequemere Art der Betrachtung desselben.

Fügt man an Stelle der Wand, auf welche das Bild fällt, matt geschliffenes Glas oder durchsichtiges Papier ein, und zeichnet darauf die Umrisse des Bildes nach, so erhält man eine richtige perspectivische Darstellung des Objectes, soweit nicht darin durch die Krümmung der Glaslinse eine Abweichung verursacht ist.

Digitized by Google

Der Kasten, in welchem die Daguerreotypbilder aufgenommen werden, ist ebenfalls eine Camera obscura, deren Bilder auf chemischem Wege fixirt werden.

Eine Camera obscura in höchster Vollendung ist der menschliche Augapfel. Die nächsten Paragraphen werden zeigen, inwiefern derselbe der Camera obscura, wenn man den letztgedachten Spiegel hieraus entfernt, ähnlich eingerichtet ist und wie einfach sich die Entstehung der Bilder im Auge durch die Camera obscura erklärt.

b) Das Auge.

§. 86. In den Augenhöhlen des Kopfes, welche zwei Pyramiden zu vergleichen sind, deren Grundflächen an der Gesichtsfläche liegen und deren Spitzen, sich einander nähernd, nach dem Hinterkopfe gerichtet sind, liegen die Augäpfel, innerhalb der Augenhöhlen umgeben von weichem, Fett enthaltendem Zellgewebe, nach vorn geschützt durch die Augenlider. Sie sind durch Muskeln nach allen Seiten um ihre Mittelpunkte drehbar.

§. 87. Der Augapfel ist fast kugelförmig und hat ungefähr 1 Zoll Durchmesser. Er ist außen — s. Fig. 30, welche den Horizontaldurchschnitt des linken Augapfels in natürlicher Größe darstellt — bis auf eine kleine Ausdehnung von einer undurchsichtigen, harten, weißen Haut, s (Sclerotica), dem „Weißen im Auge", umkleidet. Sie geht nach vorn in die etwa ein Sechstel des Umfanges des Augapfels einnehmende farblose und durchsichtige Hornhaut (Cornea) c über, die, wie ein Segment einer kleineren Kugel, nach außen gewölbt vortritt. Hinter der Hornhaut ist die Regenbogenhaut (Iris) i, deren bläuliche, grünlichgraue oder braune, in seltenen Fällen röthliche Farbe durch die Hornhaut hindurch sichtbar ist, fast eben ausgespannt. Ziemlich in ihrer Mitte, jedoch der Nase etwas näher, ist eine kreisrunde Oeffnung P, das Sehloch oder die Pupille, durch welche das Licht in das Innere des Augapfels eingelassen wird und welche selbst schwarz erscheint. Hinter der Iris liegt in einer eigenen, mit ihren

Fig. 30.

Digitized by Google

Rändern an der inneren Bedeckung des Augapfels befestigten, häutigen Kapsel die völlig durchsichtige und farblose Krystalllinse (Lens crystallina) L. Dieselbe ist biconvex, jedoch nach vorn minder stark gewölbt, als nach hinten.

Die innere Oberfläche des Augapfels bis in die Nähe der Krystalllinse wird durch die Netzhaut (Retina) r gebildet, eine feine, weiche, röthliche Haut, welche als eine im Innern des Augapfels sich ausbreitende Fortsetzung des aus dem Gehirn kommenden, die weiße und die sogleich zu erwähnende Aderhaut hinterwärts, der Nase etwas näher, durchbohrenden Sehnerven (Nervus opticus) n zu betrachten ist. Zwischen der weißen Haut und der Netzhaut liegt die Aderhaut (Choroidea) a, gebildet durch ein Gewebe von Blutgefäßen. Sie ist von einem schwarzen, schleimartigen Farbestoffe überzogen, dessen Dunkelheit jede Reflexion innerhalb des Augapfels aufhebt. Eine der Krystalllinse sich nähernde Fortsetzung dieser Haut bildet den Strahlenkörper (Corpus ciliare) p, welcher den Rand der Krystalllinse ringartig umgiebt.

Der Raum zwischen der Krystalllinse und der Hornhaut ist ausgefüllt durch die vollkommen durchsichtige wässerige Feuchtigkeit (Humor aqueus) h, sodaß davon die Iris auf ihren beiden Flächen umgeben ist. Den inneren Raum des Augapfels zwischen der Krystalllinse und der Netzhautfläche füllt der kugelförmige, nur vorn von der Krystalllinse etwas ausgehöhlte Glaskörper (Corpus vitreum) g aus, bestehend aus einer gallertartigen, völlig durchsichtigen Feuchtigkeit, der Glasfeuchtigkeit (Humor vitreus), welche von einer zarten durchsichtigen Haut umschlossen ist.

§. 88. Die Functionen der angeführten Organe sind folgende:

Die Hornhaut, die wässerige Feuchtigkeit, die Krystalllinse und der Glaskörper haben die Bestimmung, das durch die Hornhaut eindringende Licht allmählich so zu brechen, daß das etwa von einem Punkte herrührende, divergirend in das Auge tretende Lichtstrahlenbüschel auf der Netzhaut wieder zu einem Punkte, als dem Bilde des außerhalb befindlichen Punktes, vereinigt werde. In Verbindung miteinander wirken die vier genannten Organe wie Eine achromatische Sammellinse, ähnlich der Linse in der Camera obscura.

Digitized by Google

Die Hornhaut hat das Vermögen, sich, je nach der Entfernung des zu sehenden Gegenstandes und der demnach nöthigen stärkeren oder schwächeren Brechung der von ihm ausgehenden Strahlen, gewölbter oder flacher zu gestalten. Den hierbei eintretenden Veränderungen des Raumes hinter der Hornhaut folgt die denselben ausfüllende wässerige Feuchtigkeit und unterstützt durch diese ihre eigene Gestaltveränderung die Thätigkeit der Hornhaut.

Der Strahlenkörper scheint das Vermögen zu besitzen, die brechenden Medien des Auges hinsichtlich ihrer Stellung und Form und dabei die Tiefe des Augapfels von der Hornhaut bis zur Netzhaut zu verändern, sodaß er das Brechungsvermögen der Medien verstärken oder vermindern kann.

§. 89. Durch die Oeffnung der Iris, die Pupille, dringt das durch die Hornhaut und die wässerige Feuchtigkeit schon gebrochene Licht in das Innere des Augapfels. Indem die Iris diese Oeffnung zu vergrößern oder zu verkleinern vermag, dient sie, je nachdem das eindringende Licht zu schwach oder zu stark ist, um ein deutliches Sehen zuzulassen, dazu, ein größeres oder kleineres Lichtbüschel in das Auge einzulassen. Zugleich fängt sie, da der Durchmesser der Pupille gewöhnlich kleiner ist als der der Krystalllinse, vor dieser die Randstrahlen (s. §. 39) auf. Das der Hornhaut, dem Strahlenkörper und der Iris beiwohnende Vermögen, ihre Gestalt zu verändern, um das Auge für gewisse Umstände einzurichten, nennt man das Einrichtungsvermögen des Auges.

§. 90. Die Netzhaut vertritt im Auge die der Oeffnung gegenüberliegende Wand der Camera obscura. Auf ihr entstehen, wie in diesem Apparate, von allen vor dem Auge befindlichen Objecten vollkommen treue Bilder (natürliche oder physische Bilder, Netzhautbilder). Das Auftreten derselben kann man auf der Netzhaut eines aufgeschnittenen großen Thierauges, etwa dem eines Rindes, objectiv beobachten. Während jedoch die hier wie in der Camera obscura auftretenden Bilder als objective Erscheinungen für ein außerhalb befindliches Auge dastehen, vertritt die Netzhaut in Verbindung mit dem Sehnerven, gewissermaßen durch Betastung des Bildes, dieses Auge zugleich mit. Den verschiedenartigen Reiz

Digitized by Google

nämlich, welchen die verschiedenen Schwingungen des auf die Netzhaut treffenden Lichtes hier verursachen, pflanzt der Sehnerv in das Gehirn fort, und hier, im Centralorgan für den Verkehr mit der Außenwelt, entsteht dadurch eine hinsichtlich der räumlichen Ausdehnungen sich auf Erfahrung gründende Vorstellung (*scheinbares Bild*) von dem das Netzhautbild verursachenden Objecte — ein Vorgang, welchen man *Sehen* nennt.

§. 91. Wie in der Camera obscura ist das auf die Netzhaut fallende Bild verkleinert und verkehrt. Daß man die natürlichen Gegenstände dennoch nicht verkehrt, sondern aufrecht *sieht*, und an ihnen größere Dimensionen wahrnimmt, als das physische Bild selbst hat, erklärt sich wohl daraus, daß die Bilder im Augapfel eben nicht, wie die in der Camera obscura, von einem außerhalb desselben befindlichen Auge gesehen werden und daß auch die Empfindung auf der Netzhaut ebenso wenig als die Körperlichkeit dieser selbst dem Sehenden zum Bewußtsein kommt. Hauptsächlich aber beruht die Uebereinstimmung der Wahrnehmung mit der Wirklichkeit auf einem *Urtheil*, welches sich auf die von frühester Kindheit an durch den Tastsinn ausgebildete *Erfahrung* stützt.

Auch hinsichtlich der Größe und Entfernung der Objecte geben Erfahrung und augenblickliches Vergleichen den Anhalt zu einem Urtheil darüber, ob ein Lichtreiz im Auge von einer gewissen Ausdehnung von einem sehr kleinen nahen, oder sehr entfernten großen Objecte herrühre. Ein Mehreres hierüber enthält §. 123.

§. 92. Die Erregbarkeit der Netzhaut ist am größten um den Punkt herum, in welchem eine durch den Mittelpunkt der Pupille und den Mittelpunkt des Augapfels gedachte gerade Linie, die sogenannte *Augenachse*, sie berührt. Wegen dieser größeren Empfindlichkeit und weil an der gedachten Stelle das in das Auge gedrungene Licht die Netzhaut nahezu rechtwinklig trifft und darum das physische Bild weniger verzerrt projicirt, als an anderen Stellen der Netzhaut, wo das Licht schief einfällt, und endlich weil das Einrichtungsvermögen der Hornhaut, des Strahlenkörpers und der Iris hauptsächlich für das Bedürfniß dieser empfindlichen Stelle thätig ist: *richtet* der Sehende unwillkührlich die Augen so, daß deren Achsen genau auf

Digitized by Google

den zu sehenden Punkt gerichtet sind und demnach das Bild des Objectes, welchem der Punkt angehört, möglichst auf die empfindlichere Stelle der Netzhaut jedes Auges fallen muß.

§. 93. Da nach dem Obigen die Hornhaut und die von der Thätigkeit des Strahlenkörpers mitabhängigen Medien einer Veränderung fähig sind, sodaß sie von Punkten naher oder ferner Objecte mehr oder weniger stark divergirend eintretende Lichtbüschel stets in dem Grade zu brechen vermögen, daß die Vereinigung der Strahlen zu Punkten gerade auf der Netzhaut stattfindet, ist es erklärlich, daß ein normales Auge bis zu einem gewissen Grade nahe und ferne Objecte nach einander mit gleicher Deutlichkeit sehen kann. Gleichzeitig oder in zu schneller Abwechselung nahe und entfernte Objecte mit gleicher Deutlichkeit zu sehen, ist deshalb nicht möglich, weil der Einrichtungsproceß der einer Veränderung fähigen Organe jedesmal eine bestimmte, wenn auch nur kurze Zeit erfordert.

§. 94. In nicht normalen Augen, wie in denen der Kurzsichtigen und der Fernsichtigen, ist das Einrichtungsvermögen entweder von Natur oder durch Schwächung in dem Grade beschränkt, daß die Vereinigung der von einem Punkte her eindringenden Lichtstrahlen zu einem Punkte auf der Netzhaut nicht gelingt. Es entstehen deshalb auf dieser ebenso unbestimmt begrenzte Bilder, wie in der Camera obscura, wenn in dieser die Linse so weit ausgezogen oder so weit eingeschoben ist, daß ihr Brennpunkt, der Vereinigungspunkt aller gebrochenen Strahlen, nicht auf der das Bild auffangenden Wand, sondern vor oder hinter dieser liegt.

Ist z. B. A in Fig. 31 ein normales Auge, L ein leuchtender Punkt, so findet, sobald die betreffenden Organe sich entsprechend eingerichtet haben, die Vereinigung der von L ausgehenden Strahlen zu einem Punkte genau auf der Netzhaut in l statt. Ist A aber ein kurzsichtiges Auge, wobei die Hornhaut stärker gekrümmt sein müßte, so findet die Vereinigung der von einem Punkte L^1 ausgehenden Strahlen, trotz aller Anstrengungen

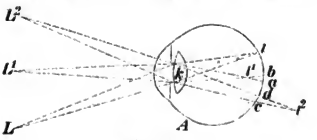

Fig. 31.

Digitized by Google

der mit Einrichtungsvermögen begabten Organe, etwa in l^1, also vor der Netzhaut statt, und auf dieser entsteht, wegen der schon in l^1 stattgehabten Kreuzung der gebrochenen Strahlen, ein sogenannter Zerstreuungskreis von dem Durchmesser ab, nämlich ein unbestimmtes Bild des Punktes L^1. Ist aber A das Auge eines Fernsichtigen, wobei die Hornhaut weniger gekrümmt sein müßte, und ist L^2 der leuchtende Punkt, so geschieht das Nämliche, mit dem Unterschiede, daß der Vereinigungspunkt l^2 hier hinter der Netzhaut liegt.

§. 95. Um diesen Schwächen des Sehorganes zu Hülfe zu kommen, müssen demnach die für Kurzsichtige gebräuchlichen Brillen concav geschliffene Gläser, Zerstreuungslinsen, haben, damit die in das zu stark brechende Auge gelangenden Strahlen schon stärker divergirend eintreten und sonach erst auf der Netzhaut vereinigt werden. Die Brillen für Fernsichtige müssen hingegen mit convexen Gläsern, Sammellinsen, versehen sein, damit die Lichtstrahlen bereits weniger divergirend eintreten und deshalb in kürzerer Entfernung, schon auf der Netzhaut, vereinigt werden.

§. 96. Das den brechenden Organen eines normalen Auges beiwohnende Einrichtungsvermögen ist nicht unbeschränkt. Befindet sich ein Object in sehr großer Nähe zum Auge, so divergiren die äußeren Strahlen der von den einzelnen Punkten des Objectes her in das Auge eingelassenen Lichtbüschel, selbst bei der stärksten Verengerung der Pupille stärker, als es der Fall wäre, wenn das Object sich in größerer Entfernung befände. Diese starke Divergenz der Strahlen vermögen die brechenden Organe nur so lange zu überwinden, als das Object sich nicht näher als 8—10 Zoll zum Auge (die richtige Sehweite) befindet; im andern Falle vermögen sie die Vereinigung der Strahlen nicht auf der Netzhaut zu bewerkstelligen, es entstehen auf dieser Zerstreuungskreise und das Auge sieht undeutlich. Augen, welche eine größere Annäherung des Objectes zulassen oder erfordern, sind kurzsichtig.

§. 97. Ein Object in größerer Nähe, als die richtige Sehweite erfordert, kann jedoch einem normalen Auge deutlicher sichtbar werden, wenn es durch eine kleine Oeffnung in einem dunklen Schirme, etwa einen

Digitized by Google

Nadelstich in einem Kartenblatte, gesehen wird. In diesem Falle dringen nur feine Lichtbüschel, deren äußere Strahlen in so geringem Grade divergiren, in das Auge, daß sie hierin hinreichend gebrochen werden können. Da jedoch solche Lichtbüschel nur sehr schmal sind, ist das Netzhautbild auch nur wenig hell und die Wahrnehmung unvollkommen. Am zweckmäßigsten hebt man die starke Divergenz der Strahlen von einem Objecte in zu großer Nähe zum Auge dadurch auf, daß man eine Sammellinse von kurzer Brennweite, eine Lupe, zwischen das Auge und das Object bringt, wonach die Strahlen schon insoweit gebrochen in das Auge eintreten, daß die brechenden Organe die Brechung vervollständigen können. Zugleich tritt hierbei kein Lichtverlust ein.

§. 98. Um die Stelle der Netzhaut leicht bestimmen zu können, auf welche das physische Bild von irgendeinem außerhalb des Auges gegebenen leuchtenden Punkte fallen müsse, hat man einen Punkt im Auge, den sogenannten Kreuzungspunkt, ermittelt, welcher so gelegen ist, daß eine von dem gegebenen leuchtenden Punkte aus durch ihn gezogene gerade Linie die Netzhaut gerade in dem Punkte trifft, auf welchen das physische Bild des leuchtenden Punktes fällt. Dieser Kreuzungspunkt, in den Figuren 30 und 31 durch k bezeichnet, liegt in der Achse der Krystalllinse, dicht an der hintern Fläche derselben.

§. 99. Ist demnach ein gewisses Object außerhalb des Auges gegeben, so ist es nicht schwer, die Ausdehnung des ihm entsprechenden Netzhautbildes zu bestimmen. Ist z. B. A in Fig. 32 das Auge,

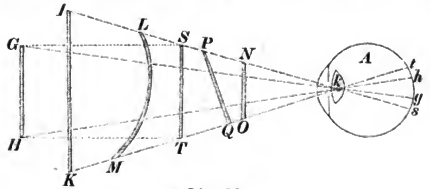

Fig. 32.

S T ein davor befindlicher lothrechter Stab, so ist nach dem Vorigen t das physische Bild des Punktes T, s das Bild des Punktes S, und sind die zwischen t und s gelegenen Punkte die Bilder der zwischen T und S gelegenen Punkte des Stabes.

Digitized by Google

Die Linien s S und t T, sowie überhaupt alle durch den Kreuzungspunkt k und irgendwelche Punkte des Objectes denkbaren geraden Linien nennt man hierbei Gesichtslinien, den Winkel S k T den Gesichtswinkel des Objectes.

§. 100. Es ergiebt der Anblick der Fig. 32 und bedarf keiner Erläuterung, daß die dort vorgeführten anderen Objecte, sowohl der entferntere gerade und lothrechte Stab I K, als der nähere gerade und lothrechte Stab N O, und der schiefstehende Stab P Q und auch der krumme Stab L M, sofern diese alle nur in Einer Ebene mit dem Stabe S T und dem Kreuzungspunkte k sich befinden, Netzhautbilder verursachen müssen, welche mit dem von S T verursachten Bild s t räumlich zusammenfallen. Verschieden große und verschieden entfernte Objecte also verursachen, wenn sie gleich große Gesichtswinkel haben, gleich große Netzhautbilder und das Auge würde an der Ausdehnung dieser allein nicht im Stande sein, einen Unterschied zwischen den Objecten wahrzunehmen, wenn es hierfür nicht in anderen weiter unten zu erwähnenden Umständen Anhalt fände.

§. 101. Nimmt man aber in Fig. 32 den Stab G H in Betracht, welcher dem Stabe S T an Größe gleicht, jedoch von dem Kreuzungspunkte k noch einmal so weit entfernt ist als jener, so bilden augenscheinlich die nach seinen Endpunkten gezogenen Gesichtslinien einen kleineren Gesichtswinkel G k H, und auch das Netzhautbild h g ist halb so groß als das des Stabes S T. Von gleich großen Objecten in verschiedener Entfernung vom Auge verursachen also die näheren größere Netzhautbilder, als die entfernteren.

§. 102. Da die Netzhaut die innere Oberfläche einer Kugel bildet, so sind die von geraden Linien, etwa von Kanten an Prismen, verursachten Netzhautbilder an sich offenbar Curven. Daß nun trotzdem in dem Gehirne die Vorstellung von einer geraden Linie entstehen kann, ist wohl damit zu erklären, daß eben nicht die Körperlichkeit der Netzhaut selbst zum Bewußtsein kommt, vielmehr das Gehirn seine Wahrnehmung aus der Gleichartigkeit der Richtung, in welcher die zu einer geraden Linie gehörenden und demnach in Einer Ebene

Digitized by Google

liegenden Gesichtslinien die Netzhaut treffen, zusammenstellt. Außerdem gründet sich hierbei wohl die Wahrnehmung mit auf die vermittelst des Tastsinnes früh gemachte Erfahrung.

c) Bedingungen des deutlichen Sehens.

Schon in den §§. 93 und 94 ist einer der Hauptbedingungen des deutlichen Sehens gedacht worden, daß nämlich das Bild eines Objectes genau auf die Netzhaut fallen müsse. §. 103.

Eine fernere wesentliche Bedingung ist, daß das Netzhautbild nicht zu klein sei, was die Folge entweder von einer sehr großen Entfernung des Objectes vom Auge, oder von der Kleinheit des Objectes selbst ist. §. 104.

Befindet sich ein Object in sehr großer Entfernung, so ist das ihm entsprechende Netzhautbild so klein, daß es von den Bildern der Umgebung des Objectes nicht deutlich unterschieden werden kann. Außerdem ist das von einem solchen Objecte in das Auge gelangende Lichtbüschel nur sehr schmal und von geringer Intensität. Die äußerste Grenze der Sichtbarkeit entfernter Objecte bei mittlerer Helligkeit derselben bildet für ein normales Auge der Gesichtswinkel von 30 Secunden. Ist aber ein sehr entferntes Object sehr hell, so kann es bei noch viel kleinerem Gesichtswinkel einen merklichen Reiz auf der Netzhaut hervorbringen und sichtbar werden, wie dies z. B. mit den Fixsternen der Fall ist, deren Durchmesser, oder was hier dasselbe bedeutet, deren Gesichtswinkel kleiner als 1 Secunde ist.

Um sehr entfernte Objecte mit einiger Deutlichkeit sehen zu können, bedient man sich des Fernrohres. Seine Einrichtung beruht im Wesentlichen darauf, daß durch entsprechende Anordnung gewöhnlich zweier biconvexen Linsen von sehr entfernten Objecten größere Lichtbüschel, als sonst durch die Größe der Pupille bedingt sind, dem Auge zugeführt werden, und daß deren Strahlen dabei unter möglichst großen Gesichtswinkeln in das Auge treten. Hierdurch wird das Netzhautbild, und scheinbar deshalb das Object, heller, größer und in seinen Theilen unterscheidbar.

Ist ein Object an sich so klein, daß es selbst in der richtigen Sehweite ein zu kleines Netzhautbild hervorbringt, um noch deutlich

Digitized by Google

gesehen werden zu können, so kann es sichtbar gemacht werden, wenn man es, um zuvörderst das Netzhautbild größer werden zu lassen, dem Auge näher als in die richtige Sehweite bringt, und dann, um die nunmehr zu starke Divergenz der Strahlen (§. 96) aufzuheben, zwischen Object und Auge eine Sammellinse (Lupe — Mikroskop) bringt. Es erscheint dann das Object in der richtigen Sehweite, vergrößert und deutlich.

§. 105. Ein anderes wesentliches Erforderniß zum deutlichen Sehen ist, daß daß Netzhautbild nicht zu hell oder zu wenig hell sei. Daß bei zu geringer Helligkeit eines Objectes dasselbe die Netzhaut auch nur in geringem Grade reizen kann und dadurch die Deutlichkeit der Wahrnehmung leiden muß, bedarf nach den oben über den Sehproceß gegebenen Erläuterungen keiner Erörterung. Wie groß übrigens die Empfindlichkeit der Netzhaut in dieser Beziehung ist, geht daraus hervor, daß ein gesundes Auge allenfalls im Sonnenlichte, aber auch in dem ungefähr 300000 mal schwächeren Lichte des Vollmondes zu lesen im Stande ist.

Ist das von einem Objecte herrührende Licht zu hell, wie etwa das directe oder durch Spiegel reflectirte Licht der Sonne, oder elektrisches Licht, so überreizt, blendet es die Netzhaut, und trotz der stärksten Verengerung der Pupille ist dem Auge die Intensität und Menge des Lichtes zu unerträglich, als daß es die Gestalt und Beschaffenheit der Lichtquelle zu erkennen vermöchte; es ist vielmehr gezwungen sich abzuwenden. Die überreizte Netzhaut ist auf eine kurze Zeit unfähig, schwächere Lichteindrücke wahrzunehmen und empfindet deshalb, wenn es auf mittelmäßig erleuchtete Objecte gerichtet wird, ohne von diesen bis zum Wiedereintreten ihres gewöhnlichen Zustandes etwas zu erkennen, das Bild eines dunklen Fleckes, welcher, verschiedene Farben nach einander annehmend, allmählich heller wird (Nachbild). Wird das Auge jedoch nach der Blendung sogleich geschlossen oder auf dunkle Objecte gerichtet, so bewahrt die Netzhaut den Eindruck eines hellen Scheines, der, ebenfalls die Farben wechselnd, sich allmählich verliert.

Geblendet, jedoch schneller vorübergehend, wird das Auge schon, wenn es aus der Dunkelheit plötzlich auf nur mäßig hell erleuchtete

Digitized by Google

Objecte gerichtet wird. Es bedarf die Netzhaut, um deutlich zu sehen, auch in diesem Falle einer kurzen Zeit der Gewöhnung an den stärkeren Lichtreiz, wobei die Iris wesentlich behülflich ist, durch Verengerung der Pupille die Menge des in das Auge dringenden Lichtes zu vermindern.

Ebenso ist die Netzhaut, wenn das Auge plötzlich von nur mäßig hellen Objecten auf dunkle Objecte gerichtet wird, augenblicklich unempfindlich für die schwächeren Lichteindrücke.

§. 106. Was aber von der Blendung der Netzhaut im Ganzen gesagt worden, betrifft auch einzelne Stellen derselben, selbst wenn das Licht nicht unerträglich hell ist. Richtet man z. B. das Auge einige Zeit hindurch unverwandt nach einem Fenster und blickt dann plötzlich auf sehr dunkle Objecte, so währt im Auge ein mattes Bild des Fensters der Art fort, daß die Lichtöffnungen hell, das Fensterkreuz dunkel erscheinen; blickt man hingegen plötzlich auf sehr helle Objecte, so sind im Nachbilde die Lichtöffnungen dunkel, das Fensterkreuz aber hell.

§. 107. Die Empfindlichkeit der Netzhaut für Lichteindrücke ist so groß, daß, wenn sie von einem sehr hell leuchtenden Objecte angeregt wird, nicht nur die von dem Lichte direct getroffene Stelle der Netzhaut, sondern auch die dieser Stelle zunächstliegenden Theile mitgereizt werden, und das leuchtende Object deswegen als größer wahrgenommen wird, als es der Erfahrung oder dem Vergleiche nach mit anderen weniger leuchtenden Objecten erscheinen dürfte. Beobachten kann man diese Erscheinung, welche man mit dem Namen Irradiation bezeichnet, sehr leicht. Richtet man das Auge z. B. nach dem Vollmonde und stellt sich so, daß ein Theil der Mondscheibe von einem dunklen Gegenstande, etwa von einer Kante eines Gebäudes verdeckt wird, so entsteht im Auge der Eindruck, als schneide der sichtbare Theil der Mondscheibe in die dunkle Kante, diese ein wenig aushöhlend, ein. Ebenso scheint die hinter dem Meereshorizonte auf- oder untergehende Sonne in denselben ein wenig einzuschneiden. Auf dem gleichen Grunde beruht die Erscheinung, daß der äußere Bogen der schmalen Mondessichel kurz vor oder nach dem Neumonde einer größeren Kreisperipherie anzugehören

Digitized by Google

scheint, als sie der dicht neben der Sichel matt erkennbare Mondkörper zeigt; ferner die im gewöhnlichen Leben häufig vorkommende Erscheinung, daß Personen, hell gekleidet, größer und stärker zu sein scheinen, als wenn sie dunkle Kleider tragen.

Es ist das Letztberührte ein für die Bildnißmaler insbesondere sehr beachtenswerther Umstand.

Würde aber die Frage aufgeworfen, ob bei der bildlichen Darstellung der von einem dunklen Gegenstande theilweise verdeckten Mondscheibe deren scheinbares Einschneiden in die Grenzen des letzteren, oder das Einschneiden der Sonne in den Meereshorizont wirklich dargestellt werden müsse, oder ob die Herbeiführung dieses Eindruckes der doch anzunehmenden ähnlichen Wirkung der hellen Farben im Bilde neben den dunklen zu überlassen sei, so wäre sie wohl dahin zu beantworten, daß bei der beschränkten Leuchtkraft der Farbestoffe, trotz allen Aufwandes von Contrasten, eine dem natürlichen Effect ähnliche Wirkung in zu geringem Grade zu erwarten ist, und daß der Maler deshalb, und um keines der Wirkungsmomente auf das Auge unbenutzt zu lassen, jenes Einschneiden, mit verschwommenen Umrissen, wie sie dem Auge der Natur gegenüber erscheinen, allerdings darzustellen habe.

Der Irradiations-Erscheinungen ist bei der Behandlung der Umrisse bildlicher Darstellungen dunkler Objecte auf hellen Gründen, und umgekehrt heller Objecte auf dunklen Gründen überhaupt stets zu gedenken.

§. 108. Wird das Auge eine kurze Zeit hindurch Lichteindrücken von einer bestimmten Farbe ausgesetzt, so wird die Empfindlichkeit der Netzhaut für diese Farbe vorübergehend abgestumpft. Blickt man z. B. unverwandt auf einen rothen Gegenstand, etwa ein kleines Blättchen rothes Papier, welches auf einer weißen Papierfläche liegt, und wird bei unveränderter Augenrichtung das rothe Blättchen plötzlich fortgezogen, so empfindet die Netzhaut, stellenweise abgestumpft für den Eindruck von rothem Lichte, von dem von dem weißen Papiere reflectirten Lichte augenblicklich alle anderen, nur nicht die rothen Farbenstrahlen, und, da die anderen Farbenstrahlen hauptsächlich blau und gelb, zusammenwirkend also grün sind, hat sie

Digitized by Google

genau an der Stelle, auf welche vorher das Roth wirkte, den Eindruck des Grünen. In gleicher Weise tritt nach jeder andern Farbe die entsprechende complementäre Farbe als farbiges Nachbild auf.

Farbenerscheinungen, welche wie diese aus einem in der Netzhaut selbst begründeten Zustande hervorgehen, nennt man subjective oder physiologische Farben.

Hierzu gehört auch das gleichzeitige Auftreten durch den Contrast hervorgerufener complementärer Farbenerscheinungen. Beleuchtet z. B. die untergehende Sonne Theile einer schneebedeckten Landschaft mit orangefarbigem Lichte, so erscheinen die Schatten nicht allzu breiter Objecte, selbst wenn der übrige Himmel bezogen ist, in lebhaftem Blau (farbige Schatten); oder, ist die Färbung der Wolken bei untergehender Sonne intensiv roth, so erscheinen die zwischen den Wolken sichtbaren Theile des Himmels grünlich. Betrachtet man ein lebhaft roth gefärbtes Zeug, welches mit kleinen schwarzen oder weißen Flecken gemustert ist, so erkennt man im ersten Augenblicke genau die Farblosigkeit der Flecken; bei längerem Verweilen des Auges jedoch nehmen dieselben scheinbar die zu roth complementäre Farbe grün an. Ebenso treten neben den anderen Farben jedesmal die entsprechenden complementären Farben auf. §. 109.

Neben diesen letzteren durch den Contrast hervorgerufenen subjectiven Erscheinungen sind auch diejenigen zu erwähnen, welche schon aus der Nebeneinanderstellung von hell und dunkel überhaupt entstehen. Sie erklären sich vornehmlich durch das §. 105 über die Blendung Gesagte. Legt man z. B. einen Streifen graues Papier quer über ein Blatt Papier, dessen eine Hälfte schwarz, die andere weiß ist, so erscheint der Theil des Streifens auf dem weißen Grunde viel dunkler als der Theil auf dem schwarzen Grunde; oder malt man eine Scala von schwarz zu weiß regelmäßig abgestufter grauer Töne unvermischt neben einander, so scheint jede Tonstufe nach der dunkleren Nachbarschaft zu heller, nach der helleren zu dunkler zu sein. §. 110.

Die subjectiven Farbenerscheinungen sind übrigens so complicirter Art, daß eine allseitig befriedigende Erklärung dafür bis jetzt nicht hat aufgestellt werden können. In Obigem ist die am meisten verbreitete Ansicht wiedergegeben worden.

Digitized by Google

§. 111. Ein letztes wichtiges Erforderniß zum deutlichen Sehen ist, daß sowohl das zu sehende Object, als das Auge sich möglichst unbewegt verhalten, da sonst die Lichteindrücke zu schnell über die Netzhaut gleiten, als daß hier eine Verschiedenheit ihrer einzelnen Theile wahrgenommen werden könnte. Die Vorstellung vermag einem zu schnellen Wechsel der Bilder auf der Netzhaut nicht zu folgen; außerdem bedürfen die veränderlichen Organe des Auges einer gewissen Zeit, sich einzurichten.

Die Nothwendigkeit möglichster Unbewegtheit des Auges selbst erweist sich deutlich, wenn man bei Fahrten auf der Eisenbahn die Landschaft betrachtet. Namentlich sind es hier die nächsten Objecte, welche wegen des plötzlichen Durchganges ihrer Bilder durch die Netzhaut, wegen der Flüchtigkeit ihrer Lichteindrücke undeutlich werden. Der Durchgang der an sich schon kleineren Bilder entfernterer Objecte ist minder plötzlich, das Auge kann seine Achse unverwandt auf dieselben richten und die Dauer der Lichteindrücke vergrößern; zudem haben die veränderlichen Organe Zeit, sich einzurichten.

Was andererseits das Erforderniß möglichster Unbewegtheit der Objecte betrifft, so bedarf es nur des Hinweises auf naheliegende Erfahrungen: man kann die Speichen eines schnell rotirenden Rades nur sehr undeutlich, eine im Fluge befindliche Flintenkugel gar nicht sehen. Hat jedoch ein sehr schnell bewegtes Object große Leuchtkraft, wie z. B. der elektrische Funke, der Blitz, so wird es dadurch sichtbar. Es ist diese Wahrnehmung jedoch mehr subjectiver als objectiver Art, indem die durch das intensive Licht des springenden Funkens nach einander stark gereizten Netzhautstellen noch nach dem Verschwinden des Funkens selbst den empfangenen Lichteindruck eine kurze Zeit hindurch bewahren, wie dies schon in den §§. 105 und 106 erwähnt ist; es wird deshalb auch eigentlich nicht der Funke selbst sichtbar, sondern die mit dem Namen Blitzstrahl belegte Bahn desselben.

Die Sichtbarkeit schnell bewegter Objecte ist also abhängig von der Schnelligkeit der Bewegung und von der Lichtstärke der Objecte, und zwar müssen beide in gleichem Maße wachsen.

Digitized by Google

Vermag das Auge die Bahn eines schnell bewegten Objectes zu übersehen und ist die Bewegung vollends eine gleichmäßige, so währt, auch wenn das Object nur mittelmäßige Leuchtkraft hat, der dadurch hervorgerufene Lichteindruck auf der Netzhaut noch fort, nachdem das Object den Ort verändert hat. So erscheint ein auf die Grundfläche eines Kreisels gemalter Fleck bei der Drehung als ein Kreis. §. 112.

Das Fortbestehen der von bewegten Objecten herrührenden Lichteindrücke auf der Netzhaut ist besonders deutlich durch den Busolt'schen Farbenkreisel nachzuweisen. Die Scheibe desselben ist mit den sieben prismatischen Farben in der Ordnung, wie sie das Sonnenspectrum zeigt, und in einem der Intensität der Farbestoffe entsprechenden Mengeverhältnisse bemalt. Wird der Kreisel in Bewegung gesetzt, so kann das Auge wegen der außerordentlich schnellen Rotation der Scheibe die einzelnen Farben nicht unterscheiden; es wirken vielmehr die Eindrücke aller Farben so schnell nach einander und so oft wiederholt auf die einzelnen Punkte der Netzhaut, daß das Auge den Eindruck einer weißlich leuchtenden Fläche empfängt. Wäre es möglich, die Farben des Sonnenspectrums in ihrer vollen Reinheit auf der Kreiselscheibe zu fixiren, so müßte diese während ihrer Rotation die sämmtlichen Farben zu hellem weißen oder vielmehr farblosen Lichte gemischt vorführen. §. 113.

Auf das Fortbestehen der Lichteindrücke im Auge nach dem Verschwinden ihrer Ursachen gründen sich mancherlei unterhaltende optische Beobachtungen, wie z. B. die am Thaumatrop, an den stroboskopischen Scheiben u. dgl. m., von deren Erörterung hier jedoch füglich Abstand genommen werden darf.

d) Das Sehen mit beiden Augen.

Bei dem Sehen mit beiden Augen stellen sich diese, wie schon in §. 92 angeführt ist, unwillkührlich so, daß ihre Achsen genau nach dem zu sehenden Punkte gerichtet sind und jedes Auge ein Bild des Punktes auf der empfindlichsten Stelle der Netzhaut empfängt. Die beiden Sehnerven, welche als Zweige eines und desselben Sinnesnerven thätig sind — denn schon vor ihrem Eintritt ins Gehirn kreuzen sie sich nicht allein, sondern Fäden des einen gehen in den §. 114.

Digitized by Google

andern über — übermitteln ihre gleichartigen Empfindungen dem Gehirn, welches die empfangenen Eindrücke zu der Vorstellung von einem Punkte zusammenstellt. So auch wird nur ein Object wahrgenommen, wenn selbst die beiden Bilder desselben nicht auf die empfindlichsten, sondern nur auf gleich- oder ähnlichgelegene Stellen der Netzhäute fallen. Wenngleich nämlich die beiden Augenachsen jedesmal nur nach einem Punkte gerichtet sein können und die Aufmerksamkeit des Sehenden sich demnach den das Auge anziehenden charakteristischen Stellen eines Objectes nur nach einander zuwenden kann, so lehrt doch die Erfahrung, daß man während des Sehens nach einem gewissen Punkte zugleich einige, wenn auch untergeordnete Augenthätigkeit anderen in der nächsten Nähe des fixirten Punktes belegenen Punkten zuzuwenden und diese mit einiger Sicherheit zu erkennen vermag. Die Bilder solcher nebenliegenden Punkte fallen selbstverständlich auch neben die empfindlichsten Stellen der Netzhäute.

§. 115. Sind also in Fig. 33 die Achsen der beiden Augen A und A^1 nach einem Punkte B gerichtet, so fallen die Bilder hiervon in den beiden Augen in die Punkte b und b^1, die empfindlichsten Stellen der Netzhäute, und der Sehende sieht einen Punkt B.

Ist C ein Punkt, welcher, während die Augen auf Punkt B gerichtet sind, gleichzeitig beobachtet wird, so fallen die Bilder davon

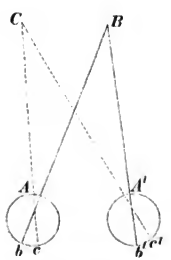

Fig. 33.

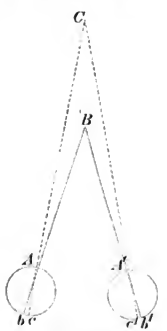

Fig. 34.

Digitized by Google

in c und c^1, nämlich in beiden Augen rechts von b und b^1, also auf ähnlich gelegene Stellen der Netzhäute, und der Sehende nimmt auch in diesem Falle außer dem Punkte B nur einen Punkt C wahr.

Ist C jedoch, wie in Fig. 34, vor oder hinter B gelegen, so §. 116.
fällt, wenn die Augenachsen auf B gerichtet sind, in dem linken Auge A das Bild c des Punktes C rechts von b, das Bild c^1 in dem rechten Auge A^1 links von b^1. Die Bilder von C fallen also auf nicht gleich- oder ähnlichgelegene Stellen, und der Sehende nimmt den Punkt C doppelt wahr. Eine Beobachtung dieser Art läßt sich leicht dadurch anstellen, daß man einen Finger der einen Hand in der richtigen Sehweite, einen Finger der andern Hand um etwa einen Fuß hinter jenem hält, und nun abwechselnd bald den näheren, bald den entfernteren Finger fixirt, wobei in beiden Fällen der nicht fixirte Finger doppelt erscheint.

Es leuchtet ein, daß wegen der räumlichen Ausdehnung aller §. 117.
Objecte die auf die beiden Netzhäute fallenden Bilder nur in den allerseltensten Fällen einander völlig gleich sein können. Gerade aber dieser Umstand dient dazu, eine nur desto vollkommenere Vorstellung von den gesehenen Objecten in dem Gehirne hervorzurufen.

Sind z. B. A und A^1 in Fig. 35 die beiden Augen, ist W U R F die Horizontalprojection eines Würfels, so empfängt jedes Auge ein verschiedenes Bild des Würfels: im Auge A projicirt sich die Fläche W R breit, im Auge A^1 schmal; dagegen projicirt sich im Auge A^1 die Fläche R F breit, im Auge A aber wieder schmal. Aus der Combination der an Größe verschiedenen Netzhautbilder entsteht hier die richtige Vorstellung von der räumlichen Ausdehnung des Würfels.

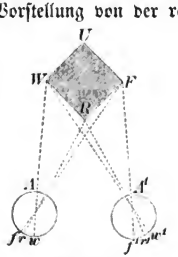

Fig. 35.

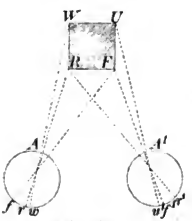

Fig. 36.

Digitized by Google

§. 118. Steht jedoch der Würfel wie in Fig. 36, wo zugleich seine Kanten kürzer sind, als der Abstand der Augenmittelpunkte von einander groß ist, so empfangen zwar beide Augen ein Bild von der Fläche RF, jedes aber zugleich ein Bild einer andern Seitenfläche; nämlich das Auge A empfängt das Bild der Fläche WR, das Auge A^1 das der Fläche UF. Es werden darum die Seitenflächen auch nur mit geringerer Deutlichkeit als die Vorderfläche erkannt werden.

§. 119. Der Eindruck eines Objectes, welchen die beiden an sich verschiedenen natürlichen Netzhautbilder hervorbringen, kann auch künstlich durch Betrachtung zweier zweckmäßig hergestellten und entsprechend vorgeführten Abbildungen eines Objectes erzielt werden, wie dies das sogenannte Stereoskop überraschend nachweist.

Dieser Apparat besteht in einem Kasten, an dessen offener Rückseite eine einfache Vorrichtung zur Aufnahme zweier ein und dasselbe Object darstellenden Abbildungen angebracht ist, während zwei in der Vorderfläche in dem gewöhnlichen Abstande der beiden Augen von einander angebrachte, mit Oculargläsern versehene Oeffnungen die Betrachtung jener beiden Bilder zulassen. Die Abbildungen sind am vollkommensten, wenn sie gleichzeitig nach einem und demselben Objecte und zwar so aufgenommene photographische Bilder sind, daß die Objectivcylinder des bei der Aufnahme angewandten Apparates den Winkel mit einander bildeten, welchen die Augenachsen bei der Betrachtung desselben Objectes aus angemessener Entfernung bilden würden. Bei näherer Untersuchung außerhalb des Kastens zeigen diese Abbildungen dieselbe Verschiedenheit, welche zwei Netzhautbilder haben würden: nämlich die mit dem links befindlichen Objectivcylinder aufgenommene Abbildung zeigt mehr Theile der linken Seite des dargestellten Objectes, die mit dem rechts befindlichen Cylinder aufgenommene Abbildung zeigt mehr Theile der rechten Seite, als die andere Abbildung.

Schiebt man nun diese gewöhnlich auf einer und derselben Bildfläche befindlichen beiden Abbildungen in den Kasten und beschaut sie durch die Oculargläser, so sieht das rechte Auge nur die rechts liegende, das linke Auge nur die links liegende Abbildung,

Digitized by Google

und es entstehen hieraus Netzhautbilder, denen gleich, welche das natürliche Object selbst hervorbringen würde, mit dem Unterschiede allein, daß sie nicht farbig sind. Aus der unwillkührlichen Combination beider bildet sich in dem Beschauer die Vorstellung von einem natürlichen Objecte.

§. 120. Die Wichtigkeit zweier sich ergänzenden Netzhautbilder für die Vollkommenheit der Wahrnehmung wird besonders verständlich in Fällen, wo man Theile eines Objectes unvermuthet je mit nur einem Auge erblickt. Blickt man z. B., wie Fig. 37 erläutern soll, mit beiden Augen A und A′ zugleich aus einem dunklen Raume durch eine Spalte SP, deren Breite geringer ist als der Abstand der Augenmittelpunkte von einander, nach einer hellen Fläche FL, so sieht jedes Auge eine andere Stelle dieser Fläche: das Auge A sieht nämlich nur die Stelle de, das Auge A′ nur die Stelle bc. Die Stelle cd wird gar nicht gesehen oder erscheint vielmehr so dunkel wie die Grenzen der Spalte SP. Man empfindet unter diesen Umständen deutlich eine Beschränktheit in der Wahrnehmung der Stellen bc und de.

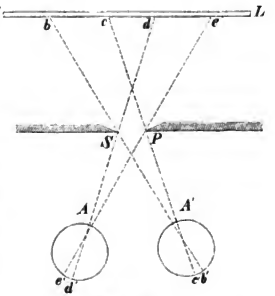

Fig. 37.

§. 121. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen schmalen Körper, etwa einen Finger, in geringer Entfernung von den Augen senkrecht hält, und zu beiden Seiten neben ihm vorbei nach einer hellen Wand blickt. Man sieht in diesem Falle, dem in §. 116 Gesagten gemäß, nicht allein den Finger doppelt, sondern es sind auch die beiden Stellen der Wand minder deutlich wahrnehmbar, welche der Finger jedem einzelnen der beiden Augen deckt.

§. 122. Es wird hierbei nicht allein das Urtheil über die räumliche Ausdehnung der je von nur einem Auge gesehenen Stellen unsicher, sondern auch die scheinbare Lichtstärke der letzteren erleidet eine beträchtliche Verminderung. Inwieweit dies der Fall ist, davon kann

Digitized by Google

man sich durch eine einfache Beobachtung überzeugen. Blickt man nämlich mit beiden Augen nach einem Blatte weißen Papieres und bringt einen dunklen Schirm so vor das eine Auge, daß er diesem einen Theil des Papieres verdeckt, und vergleicht dann die Leuchtkraft des beiden Augen zugleich sichtbaren Theiles des Papieres mit der des mit nur einem Auge sichtbaren Theiles, so erscheint jene auffallend größer, als diese.

e) Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte.

§. 123. Es erhellt schon aus §. 100, wonach Objecte verschiedener Entfernung, Größe und Gestalt, sobald sie nur unter demselben Gesichtswinkel gesehen werden, gleich große Netzhautbilder verursachen können, daß die Größe dieser letzteren allein nicht genügenden Anhalt zur Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte selbst bietet. Da ferner die Netzhautbilder sämmtlich auf eine Fläche, die Netzhautfläche, fallen, so können sie selbst eine Wahrnehmung der Ausdehnung der Objecte in die Tiefe des Gesichtsfeldes nicht direct begründen. Es ist vielmehr, wenn man zunächst nur das Vermögen eines Auges in Betracht nimmt, die Erfahrung und das augenblickliche Vergleichen mit bekannten Objecten, worauf sich das Urtheil über Entfernung und Größe sichtbarer Objecte stützt.

Erfahrungsmäßig erleidet nämlich sowohl das von selbstleuchtenden Körpern direct ausgehende, als das reflectirte Licht auf dem Wege durch die Luft in das Auge eine Schwächung. Außerdem ist ein von entfernten Objecten her in das Auge gelangendes Lichtbüschel schmäler, als ein von nahen Objecten herrührendes, und darum von schwächerer Leuchtkraft. Indem man nun die scheinbare Größe eines Objectes, oder, was dasselbe bedeutet, die wirkliche Größe des ihm entsprechenden Netzhautbildes, mit seiner Helligkeit und Deutlichkeit in Beziehung bringt, bildet man aus diesen Factoren das Urtheil; in den meisten Fällen zuerst über die Entfernung und hiernach über die wirkliche Größe des Objectes. Bei hinsichtlich ihrer Größe bekannten Objecten dient natürlich die scheinbare Größe zur Abschätzung der Entfernung.

Digitized by Google

Wie trügerisch indessen dieses Urtheil ist, sobald man nur mit einem Auge sieht, davon kann man sich durch eine leicht anzustellende Beobachtung überzeugen. Hängt man nämlich in der Entfernung von ungefähr anderthalb Fuß vom Auge einen Ring an einem Faden auf und bemüht sich, nachdem man das Auge in die Ebene des Ringes gebracht hat, mit dem Finger von der Seite her in die Ringöffnung zu treffen, so wird man fast immer fehltreffen, während man augenblicklich seine Absicht erreicht, sobald man mit beiden Augen nach dem Ringe sieht. §. 124.

Diese größere Sicherheit des Urtheils über Entfernung und Größe der Objecte beim Sehen mit beiden Augen gründet sich nicht allein auf die §. 117 besprochene Verschiedenheit der beiden Netzhautbilder und die aus der Combination beider hervorgehende Vollkommenheit der Vorstellung, sondern großentheils auch auf den Umstand, daß der Sehende die Größe des Winkels, welchen die beiden Augenachsen beim Sehen nach einem Punkte mit einander bilden, unbewußt mit in Rechnung zieht. Dieser Augenachsenwinkel beträgt, wenn der betrachtete Punkt 9 Zoll von der beide Augenmittelpunkte verbindenden geraden Linie entfernt (d. i. in der richtigen Sehweite) ist, annähernd 16°, bei einer Entfernung von 1 Fuß = 12°, bei 2, 3, 6, 12 Fuß Entfernung beziehungsweise 6°, 4°, 2°, 1°, bei 100 Fuß Entfernung ungefähr 8 Minuten, bei $\frac{1}{4}$ Meile Entfernung schon nur 1 Minute. §. 125.

Die Veränderlichkeit dieses Winkels ist hiernach merklicher bei dem Sehen nach mehreren verschieden nahen Objecten, als bei dem Sehen nach mehreren verschieden entfernten Objecten, zu welchen letzteren die beiden Augenachsen in nahezu paralleler Stellung bleiben. Es muß daher auch das Urtheil sicherer bei der Schätzung der Entfernung naher Objecte, als der entfernter Objecte sein. Offenbar stützt sich eine Schätzung der Art auf Erfahrung und Uebung, und manche Personen besitzen darin eine erstaunliche Sicherheit, während junge, aller Uebung fremde Kinder nach weit entfernten leuchtenden Objecten, nach dem Monde, wie nach ganz in der Nähe befindlichen Objecten greifen.

Es versteht sich von selbst, daß bei der Beurtheilung der Ent- §. 126.

Digitized by Google

fernung und Größe der Objecte, wenn man mit beiden Augen sieht, auch alle die Momente, welche ein Urtheil für ein einzelnes Auge begründen, nämlich Größe des Netzhautbildes, scheinbare Helligkeit des Objectes, Vergleichen desselben mit nebenstehenden Objecten, mit in Betracht kommen. Wie leicht aber trotz aller dieser Mittel das Urtheil beirrt werden kann, beweist die sich alltäglich wiederholende Erfahrung, daß die Größe der Sternbilder, der Sonne und des Mondes, sobald sich dieselben in der Nähe des Horizontes befinden, für bedeutender gehalten wird, als wenn jene Gestirne in der Nähe des Zenithes stehen. Da durch Winkelmessungen festgestellt ist, daß die sichtbaren Durchmesser der Gestirne bei Annäherung dieser an den Horizont unverändert dieselben sind, wie bei ihrer Nähe zum Zenithe, so sucht man jenen Irrthum folgendermaßen zu erklären:

Da der Himmel dem Auge nicht in halbkreisförmiger, sondern elliptischer Wölbung erscheint, so, als wenn seine dem Erdhorizonte nahen Theile dem Auge ferner wären, als seine dem Zenithe nahen Theile, so scheinen auch die in der Nähe des Horizontes sich auf dem Himmelsgewölbe projicirenden Gestirne entfernter zu sein, als wenn sie sich in der Nähe des Zenithes darauf projiciren. In diesem Irrthum wird das Auge bestärkt durch die mit dem schiefen Durchgange des Lichtes durch die Erdatmosphäre zusammenhängende größere Trübung desselben. Da man nun gewohnt ist, die Größe der Objecte, welche gleich große Netzhautbilder verursachen, nach ihrer scheinbaren Entfernung zu beurtheilen, so hält man die Gestirne in der Nähe des Horizontes, in ihrer scheinbar größeren Entfernung, für größer, als in ihrer scheinbar größeren Nähe, im Zenithe.

Will man die Sonnen- oder Mondscheibe bildlich darstellen — was wegen der geringen Leuchtkraft unserer Farbestoffe, deren künstlichste Verwendung den Eindruck der Lichtstärke jener Himmelskörper auch nicht annähernd zu erreichen vermag, ohne zwingende Gründe nie unternommen werden muß — so hat man sich also zu vergegenwärtigen, daß ihre scheinbare Größe stets von der Entfernung der Fläche vom Auge abhängig ist, auf welche man sie sich projicirt denkt.

Digitized by Google

Bei der perſpectiviſchen Darſtellung iſt die ſcheinbare Größe ihrer Durchmeſſer (Geſichtswinkel), welche, bei beiden ziemlich gleich, reichlich $\frac{1}{2}$ Grad beträgt, nach Anleitung des in der zweiten Abtheilung gezeigten Conſtructionsverfahrens leicht zu beſtimmen. Nichtsdeſtoweniger wird es ſich empfehlen, die dem Horizonte nahe Sonnen- oder Mondſcheibe von ein wenig größerem Durchmeſſer darzuſtellen, da eine derartige Benutzung des obenerwähnten Irrthums die ohnedies zu dürftige Wirkung der hellen Farbeſtoffe auf das Auge des Beſchauers einigermaßen zu unterſtützen geeignet iſt.

§. 127. Aus dem in dem vorhergehenden Paragraphen erklärten Grunde erſcheinen auch irdiſche Objecte von bekannter Größe, ſobald ſie unter Umſtänden geſehen werden, welche ſie entfernter erſcheinen laſſen, als ſie wirklich ſind, wie z. B. Bäume und Menſchen während eines Nebels, in befremdender Größe. Hinſichtlich der Entfernung der Objecte wird unter ſolchen Umſtänden auch das geübteſte Auge getäuſcht: Berge z. B. werden bei ſehr klarer Luft für näher, bei *trüber Luft* für entfernter gehalten, als ſie wirklich ſind.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zweite Abtheilung.

Linearperspective.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen, Annahmen und Benennungen.

§. 1. Die Linearperspective lehrt das mathematische Constructionsverfahren bei der graphischen Darstellung der scheinbaren Umrisse der Objecte — d. h. der Grenzen, bis zu welchen die einen Objecte die anderen dem Auge verdecken — auf einer beliebigen Fläche, der Bildfläche; desgleichen der Grenzen, welche erhebliche Erleuchtungsverschiedenheiten an den Oberflächen der Körper bezeichnen, namentlich der Schattengrenzen, und außerdem der Gestaltung der Spiegelbilder der Objecte.

Als eine Methode des Projicirens, wobei die projicirenden Linien strahlenartig nach einem Punkte, dem Auge, gerichtet sind, ist die Linearperspective der orthographischen Projicirungsmethode nahe verwandt, insofern bei dieser jener eine Punkt nur als in unendlicher Entfernung liegend aufgefaßt wird, was Parallelität der projicirenden Linien bedingt. Auch stützen sich die Constructionen der Linearperspective großentheils auf das Verfahren bei dem orthographischen Projiciren; überall lehnen sie sich an die durch letzteres erzielten Definitionen.

§. 2. Da man bei einer einzelnen bildlichen Darstellung eines Objectes vorweg schon auf die Erreichung der Vollkommenheit des Eindruckes verzichten muß, welche auf der Verschiedenheit des Netzhautbilder-Paares, dem natürlichen Objecte gegenüber, beruht, und welche überhaupt nur durch Doppelbilder, wie die stereoskopischen

Digitized by Google

es sind, erreichbar ist, so bringt man beim perspectivischen Projiciren die Objecte auch nur zu einem Projections-Mittelpunkte, dem Gesichtssinn, in Beziehung. An die Stelle des Augenpaares setzt man Ein Auge, aber als mit der Vollkommenheit sehend, wie dies ein Augenpaar vereint vermag. Man führt außerdem die Körperlichkeit des Einen Auges auf Einen Punkt, den Gesichtspunkt, etwa den in der Linse liegenden Kreuzungspunkt (1. Abth., §. 98) zurück, und setzt diesen überall als feststehend, jedoch jede Aenderung der Sehrichtung zulassend, voraus.

§. 3. Die einfachste und natürlichste Art, die scheinbaren Umrisse gegebener Objecte perspectivisch richtig graphisch darzustellen, ist die, daß man, das Auge in einem bestimmten Punkte feststellend, die scheinbaren Grenzen der Objecte auf einer zwischen diesen und dem Auge aufgestellten durchsichtigen Fläche, etwa einer Glasfläche, gleichviel ob dieselbe eben oder gekrümmt ist, nachzeichnet. Es decken in diesem Falle die gezeichneten Umrisse dem Auge diejenigen des Objectes und ergeben von diesem ein richtiges perspectivisches Bild.

§. 4. Da jedoch diese Art der Auffassung aus räumlichen Rücksichten in den seltensten Fällen ausführbar ist, häufig auch nicht in der Nähe befindliche, oder noch nicht vorhandene Objecte, wie etwa noch unausgeführte Bauwerke, perspectivisch dargestellt werden müssen — weshalb auch die sinnreichsten Instrumente, welche, wie der Diagraph von Gavard und außerdem die Camera obscura und die Camera lucida, ein directes Nachzeichnen der Natur auf andere Art ermöglichen, nur selten anwendbar sind — so ist es erforderlich, das Product des directen Nachzeichnens der natürlichen Objecte auch durch mathematische Construction erzielen zu können. Es ist selbstverständlich, daß es hierbei der genauesten Kenntniß der räumlichen Ausdehnungen der darzustellenden Objecte bedarf, und daß von einem strengen Eingehen auf unregelmäßige, geometrischen Körpern nicht verwandte Formen Abstand genommen werden muß.

§. 5. Erwägt man, wie das auf die in §. 3 angegebene Art, mittels Nachzeichnens der Umrisse der Objecte auf einer durchsichtigen Fläche hervorgebrachte perspectivische Bild zu Stande gekommen, so ergiebt sich, daß mit der Spitze des Zeichenstiftes stets die scheinbaren Umrisse

Digitized by Google

der Objecte verfolgt und gedeckt wurden, daß die Spitze stets innerhalb der von dem Auge nach den einzelnen Punkten der Umrisse der Objecte denkbaren Gesichtslinien, zugleich aber auch stets auf der Bildfläche verweilte. Es ist hiermit der Grundsatz erklärt, daß das perspectivische Bild oder die perspectivische Projection, oder, kürzer gesagt, „die Perspective" eines Objectes die Durchschnittsfigur der aus dem Auge (als Projections-Mittelpunkt) nach sämmtlichen Punkten des Objectes denkbaren Gesichtslinien (projicirenden Linien) mit der Bildfläche (Projectionsfläche) ist. Zugleich ist hierdurch der Weg für die Construction angedeutet.

§. 6. Während bei einer orthographischen Projection die erwähnten Gesichtslinien (projicirenden Linien) als einander parallel aufgefaßt werden, weil das Auge in unendlicher Entfernung von den Objecten gedacht wird, bilden sie bei der perspectivischen Projection, wo das Auge in der Nähe angenommen wird, Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze im Auge liegt.

Inwiefern nun das perspectivische Bild, als Durchschnittsfigur solcher Kegel mit der Bildfläche, dem Netzhaut- oder scheinbaren Bilde ähnlich sein könne, hängt von der Art der Bildfläche ab.

§. 7. Ist nämlich die Bildfläche die innere Oberfläche einer Halbkugel, und ist das Auge im Mittelpunkte dieser angenommen, so projiciren die sämmtlich durch den Kreuzungspunkt im Auge gehenden, sich vor wie hinter demselben ausbreitenden Gesichtslinien auf dieser Bildfläche ein Bild unter denselben Bedingungen, wie auf der kugelförmigen Netzhautfläche, und muß daher jenes Bild eine dem scheinbaren Bilde an sich im mathematischen Sinne ähnliche Figur bilden. Bei allen anderen Gestalten der Bildfläche ist dies nicht der Fall. Bildet letztere nämlich die innere Oberfläche eines Cylinders, so findet eine Aehnlichkeit nur theilweise, und zwar nach den Ausdehnungen normal zur Achsenrichtung des Cylinders, statt. Ist die Bildfläche eben, wie sie in den meisten Fällen angenommen wird, so ist das perspectivische Bild dem Netzhautbilde im mathematischen Sinne unähnlich, und zwar etwas verzerrt, weil es die Durchschnittsfigur des Gesichtslinienkegels mit einer Ebene

Digitized by Google

ist. Man darf daher beim Zeichnen nach der Natur auf der ebenen Bildfläche nicht einfach das, was man sieht, reproduciren wollen, sondern muß vielmehr der Umstände eingedenk sein, welche eine Verzerrung des perspectivischen Bildes bedingen. (S. §. 21.)

§. 8. Die halbkugelähnliche Gestalt der Bildfläche ist die seltenste und kommt nur in Kuppelbildern vor. Es können diese selbstverständlich nur von unten her und dabei fast immer nur so betrachtet werden, daß das Auge nicht mit dem Mittelpunkte der Kuppelkrümmung zusammenfällt, weshalb sie strenggenommen, um von dem entsprechenden Gesichtspunkte aus unverzerrt zu erscheinen, verzerrt ausgeführt werden müßten (s. §. 383). Doch vermeidet man gern diese Verzerrungen, welche bei einer Betrachtung aus der Nähe, etwa von einer der Kuppel näheren Galerie, widerlich auffallen würden, und pflegt deshalb die Darstellung so auszuführen, daß man die Ausdehnungen, welche dasselbe perspectivische Bild auf der ebenen Bildfläche haben würde, einfach in die Kuppelkrümmung einträgt.

§. 9. Häufiger vorkommend ist die cylindrische Gestalt der Bildfläche. Das Bild ist dann gewöhnlich auf der inneren Fläche eines auf der Grundfläche stehenden normalen Cylinders vorgeführt, und das Auge in der Achse des Cylinders angenommen. Es eignet sich diese Gestalt der Bildfläche besonders zu panoramatischen Darstellungen von Landschaften und Stadtansichten in großem Maßstabe. Mehreres hierüber enthält der vierte Abschnitt.

§. 10. Am häufigsten wird die ebene Bildfläche zur bildlichen Darstellung gewählt. Auf ihr kann ein beliebig abzuschließender Theil von Objecten aufgenommen und sie selbst demgemäß beliebig begrenzt werden; dabei läßt sie die unmittelbare Anwendung des Zirkels und Lineals zu. Ihre in den meisten Fällen lothrechte Stellung entspricht im Allgemeinen der der natürlichen Objecte; sie nimmt hierbei den geringsten Raum, gewöhnlich den Platz an Wänden, ein, sie ist einer gleichmäßigen Beleuchtung zugänglich und bequem zu betrachten.

§. 11. In nicht lothrechter, sondern horizontaler Stellung kommt die ebene Bildfläche in Deckengemälden vor, und sind Darstellungen

Digitized by Google

darauf nach denselben Regeln zu behandeln, wie bei der lothrechten Stellung. (S. Abschnitt 2.)

In schiefer, d. h. weder lothrechter noch horizontaler Stellung kommt die ebene Bildfläche am seltensten, wohl nur bei bildlichen Darstellungen auf schiefen Theilen von Plafonds, schiefen Wänden in Dachräumen, und auf den unteren beworfenen Flächen der verschiedene Podeste verbindenden Treppentheile vor. Die Darstellung lothrechter und horizontaler, überhaupt aller dieser Bildfläche nicht parallelen Objecte ist hierbei unter Anwendung der für die Construction der Perspectiven schiefer Objecte geltenden Regeln auszuführen. (S. Abschnitt 3.) §. 12.

In verschiedene Stücke, in Gardine, Coulissen und Soffiten zerlegt kommt die lothrechte ebene Bildfläche im Theater vor. Die Darstellungen auf diesen verschiedenen Bildflächen müßten strenggenommen für jede einzelne nach den für die eine lothrechte ebene Bildfläche geltenden Regeln unter Festhaltung eines und desselben Gesichtspunktes ausgeführt werden. Da dieser jedoch selbstverständlich nur für einen Theaterplatz der richtige sein und deshalb der größere Theil der Beschauer, namentlich wenn nicht rein landschaftliche, sondern architektonische Objecte dargestellt sind, den Eindruck der Naturwahrheit in keinem Falle haben kann, so sucht man diesem Uebelstande, zu welchem sich noch die auf dem steten Abbrechen der Grundlinien der Coulissen beruhende Schwierigkeit gesellt, bei der Herstellung der Decorationen durch mancherlei anderweitige Abweichungen von der Strenge der Anforderungen der Linearperspective, so gut es überhaupt angeht, zu begegnen, und entzieht dabei nur sorgfältig alle die Umstände dem Auge des Zuschauers, welche auf diese Verstöße geradezu hinweisen könnten. Die dabei dennoch erzielten Effecte der Bühnendecorationen kommen größtentheils auf Rechnung der darin meist mit Geschick behandelten, mit der künstlichen Beleuchtung in Einklang stehenden Luftperspective. Da aber die Handhabung jener unumgänglichen Verstöße füglich nicht Gegenstand der Belehrung in einem Lehrbuche der Perspective sein kann, so wird hier auf diese Art bildlicher Darstellung nicht weiter einzugehen sein. §. 13.

Digitized by Google

§. 14. Im Folgenden wird zunächst überall eine ebene Bildfläche, und zwar in lothrechter Stellung, vorausgesetzt.

Wenn nun hierbei häufiger der an sich dasselbe bedeutende Ausdruck Bildebene vorkommt, so ist derselbe zwar in den meisten Fällen, jedoch nicht als unbedingt eins mit der Bezeichnung „ebene Bildfläche" aufzufassen, unter welcher zunächst die körperliche Fläche, auf welcher die Darstellung selbst dem Beschauer vorgeführt ist, verstanden wird. Die Bildebene ist vielmehr eine nur in der Vorstellung vorhandene, mit der körperlichen Bildfläche zwar meist zusammenfallende, oft aber auch nur ihr parallele, unbegrenzte Ebene im mathematischen Sinne zur Aufnahme der perspectivischen Projection. Man kann in manchen Fällen, zur Erreichung gewisser Vortheile beim Construiren, bei einer und derselben Darstellung für nähere oder entferntere Objecte auch wohl nähere oder entferntere, unter einander jedoch und mit der Bildfläche und Haupt-Bildebene stets parallele Hülfs-Bildebenen annehmen; um so unbedenklicher, als die hierauf entstehenden Projectionen den auf der Haupt-Bildebene entstehenden, wegen der Parallelität der Ebenen, stets ähnliche Figuren bilden müssen. Ein Beispiel hierzu und Anleitung zu dem vorkommendenfalls einzuschlagenden Verfahren bieten die §§. 272—274.

§. 15. Nimmt man ein bestimmtes Object in Betracht, etwa ein lothrecht stehendes Dreieck A B C (Fig. 1), nimmt man in einem Punkte O das Auge an und zieht die Gesichtslinien, hier die charakteristischen O A, O B, O C, so ist offenbar, daß, wenn die Bildebene durch das Object stehend angenommen wird, das perspectivische Bild dem Objecte gleich, von natürlicher Größe, ist; ferner, daß wenn die Bildebene vor dem Objecte steht, das perspectivische Bild kleiner als dieses ist; daß ferner, wenn die Bildebene hinter dem Objecte steht, das Bild größer als dieses, also kolossal, ist; endlich daß, wenn die Bildebene dem Auge sehr nahe steht, das perspectivische Bild sehr klein, ein

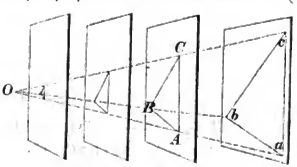

Fig. 1.

Digitized by Google

Miniaturbild, ist. Faßt man alle denkbaren Gesichtslinien zusammen, so bilden dieselben hier eine Pyramide, deren Spitze das Auge und deren Grundfläche das Dreieck a b c auf der hinter dem Objecte stehenden Bildebene ist. Da dieser Bildebene die anderen parallel sind, so müssen ihre Bilder der Grundfläche und einander ähnliche Figuren bilden.

Alle vier Perspectiven, aus dem Punkte O betrachtet, decken sich so, daß das Auge doch nur ein Bild sieht, und es ihm gleichgültig ist, auf welcher Bildebene dasselbe haftet. Man könnte deshalb, streng genommen, jedes Object bildlich in jeder beliebigen Größe naturwahr vorführen, wenn man in dieser Beziehung nicht anderen, ästhetischen Rücksichten folgen müßte, wonach man wohl Darstellungen von tiefer sittlich-historischer Bedeutung, wie sie für große Räume in öffentlichen Gebäuden passen, in naturgroßem, allenfalls kolossalem Maßstabe, hingegen genrehafte Darstellungen in kleinerem Maßstabe, unter natürlicher Größe vorführt.

§. 16. Abgesehen von den Anforderungen des guten Geschmackes, welche bei der Wahl des Ortes, von welchem aus ein darzustellendes Object am charakteristischsten, und günstigsten erscheint, zu beachten sind, verdient vor dem Beginn der Construction noch eine besondere Aufmerksamkeit die Bestimmung der Höhe des Auges zu dem darzustellenden Objecte, und seines Abstandes von diesem.

§. 17. Was die Höhe des Auges, oder, wie dasselbe in der Folge häufiger genannt werden wird, des Gesichtspunktes, betrifft, so ist es rathsam, im Allgemeinen diejenige zu wählen, in welcher das gegebene Object gewöhnlich gesehen zu werden pflegt; so namentlich bei architektonischen Gegenständen und bei Darstellungen von inneren Räumen überhaupt die Höhe, in welcher sich das Auge eines stehenden Menschen, also etwa zwischen 5 und 6 Fuß über dem Fußboden, befindet. Bei Darstellungen, in welchen menschliche Figuren die Hauptsache sind, wählt man den Gesichtspunkt in der Höhe, von welcher aus die Handlung hinreichend übersehen und verstanden werden kann; bei Handlungen im Freien ebenfalls in der Höhe des Auges eines stehenden Menschen, allenfalls noch etwas höher,

Digitized by Google

bei Handlungen im umschlossenen Raume gewöhnlich in der Höhe des Auges eines sitzenden Menschen. Bei Portraits nimmt man den Gesichtspunkt gern mindestens 1 Fuß unterhalb der Augenhöhe der darzustellenden Person an, damit im Bilde das Terrain oder untere Theile der Architektur nicht Kopf und Schultern des Portraits umgeben, diese sich vielmehr von einem gleichartigen Hintergrunde, dem Himmel oder einer Wandfläche, absetzen. Bei Stillleben ist die passendste Höhe des Gesichtspunktes ungefähr in der Höhe des Mittelpunktes der darzustellenden Gruppe; bei Landschaften entscheidet allein der gute Geschmack. Im Allgemeinen wird es in bildlichen Darstellungen einen weniger unangenehmen Eindruck machen, wenn der Gesichtspunkt etwas zu tief angenommen, als wenn derselbe zu hoch gewählt worden.

§. 18. Die Wahl des Abstandes des Gesichtspunktes (Distanz) von dem darzustellenden Objecte wird durch strengere Rücksichten geleitet. Zunächst ist daran zu erinnern, daß das Auge bei seiner Beweglichkeit ohne Kopfwendung allenfalls einen Raum, ein Gesichtsfeld, zu übersehen vermag, welches von einem Gesichtslinienkegel eingeschlossen wird, der an seiner im Auge liegenden Spitze den Winkel von ungefähr 100° hat. Es lassen sich hierbei jedoch die äußersten Objecte nur mit Anstrengung wahrnehmen, und nur die Objecte, welche innerhalb eines Gesichtslinienkegels von nur ungefähr 45° an der Spitze liegen, lassen eine genaue und zugleich körperlich bequeme Betrachtung zu. Da nun genau dieselben Rücksichten, welche den Abstand des Auges vom Objecte bedingen, auch für den Abstand des Auges von der Bildfläche bestehen, so würde die Wahl eines größeren Gesichtsfeldes als 45° nicht allein die Auffassung des natürlichen Objectes erschweren, sondern auch die Betrachtung seiner bildlichen Darstellung ohne Kopfwendung unbequem machen.

Nimmt man beispielsweise ein aufgerichtetes lothrecht stehendes Object in Betracht, so würde ein Gesichtsfeld von 45° einen Abstand des Auges von dem Objecte bedingen, welcher gleich der Höhe des letzteren ist. Denn wäre das Object ein Thurm, wie in Fig. 2, so wird derselbe nur für ein Auge O, welches ungefähr so

Digitized by Google

weit von ihm entfernt ist, wie er selbst hoch ist, in ein Gesichtsfeld von 45° eingeschlossen.

Die Wahl eines nicht größeren Winkels des Gesichtsfeldes §. 19.
empfehlen ferner ästhetische Rücksichten, nach welchen das Auge dem darzustellenden Objecte gegenüber in einen so großen Abstand gebracht werden soll, daß das scheinbare Bild im Auge nicht zu sehr von der bekannten wirklichen Gestalt des Objectes abweiche und widerlich auffallende Verkürzungen und Verkleinerungen zeige, da in einem solchen Falle das perspectivische Bild vollends verzerrt ausfällt. Würde man sich z. B. dem in Fig. 2 dargestellten Thurme, mit seiner Galerie, seinen stark vorspringenden Gesimsen und seinem flach ansteigenden Dache so sehr nähern, daß er ein etwa 60° großes Gesichtsfeld ausfüllte, so würden einem demnach in O^1 befindlichen Auge die oberen Theile des Thurmes sehr verkürzt erscheinen; es würden die Galerie und die Gesimse große Theile der darüber befindlichen Façade, der Dachvorsprung das Dach selbst verdecken und die Gesimskanten würden auffallend von der horizontalen Richtung abzuweichen scheinen; während alle diese scheinbaren Abweichungen von der Wirklichkeit sich bedeutend mildern, wenn das Auge bis O, d. h. in einen Abstand zurückgeht, welcher, einem 45° großen Gesichtsfelde entsprechend, gleich der Höhe des Thurmes ist.

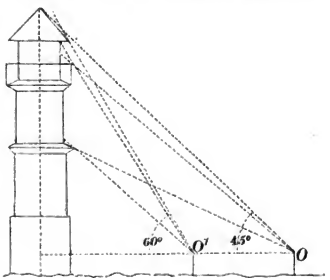

Fig. 2.

Nimmt man hierzu noch in Betracht, daß man das Haupt- §. 20.
object nie so darzustellen pflegt, daß es bis zu den Grenzen der Bildfläche reicht, daß man vielmehr unter- und oberhalb und zu den Seiten des Hauptobjectes noch Erdboden, Luft und landschaftliche oder architektonische Umgebung aufnimmt, und daß man, nach dem oben Gesagten, deren Ausdehnung bei der Berechnung des Ab-

Digitized by Google

standes mit in Rechnung zu ziehen hat, so ergiebt sich, daß der bisher ins Auge gefaßte Abstand weiter noch überschritten werden muß.

§. 21. Es empfiehlt dies außerdem besonders der in §. 19 angedeutete, das perspectivische Bild betreffende, und am besten an einem Beispiele zu erläuternde Umstand:

Nimmt man als gegebene Objecte zwei in der Höhe des Auges schwebende Kugeln K und U, die in Fig. 3 im Grundrisse vorgeführt sind, an, so erscheinen dieselben dem ebenfalls im Grundrisse und zwar in großer Nähe zu den Kugeln angegebenen Auge O^1 natürlich auch als Kugeln mit kreisförmigen Umrissen. Die nach ihnen denkbaren Gesichtslinien bilden Kegel, deren Basen Kreise der Kugeln sind. Denkt man sich nun durch diese Kegel die Bildebene b i wie in der Figur gestellt, so wird das der Kugel U entsprechende perspectivische Bild auf der Bildebene die Breite a b, das der Kugel K entsprechende perspectivische Bild wird aber die größere Breite c d haben; jenes Bild wird ein Kreis, dieses eine dem Kreise sehr unähnliche Ellipse sein.

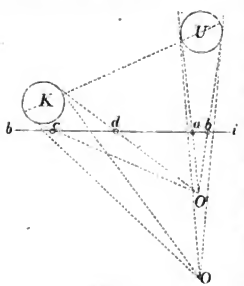

Fig. 3.

Nähme man jedoch das Auge in O, also in einem Abstande von den Kugeln an, welcher mindestens so groß ist wie die Entfernung der beiden äußersten Kugelpole von einander, so würde wieder die Perspective der Kugel U ein Kreis, die Perspective der Kugel K jedoch eine dem Kreise nicht so sehr unähnliche Ellipse sein, da ihre Breite nicht so auffallend verschieden von der Breite der Perspective der Kugel U wäre.

Obwohl nun die dem Gesichtspunkte O^1 entsprechende Perspective der Kugel K, aus dem Punkte O^1 betrachtet, selbst als Kreis erscheint, da sie die scheinbaren Umrisse der Kugel deckt, so würde sie doch jedem sein Auge nicht genau in den Gesichtspunkt O^1 bringenden Beschauer als unnatürliche Verzerrung erscheinen, während die dem Gesichtspunkte O entsprechende Perspective der Kugel K

Digitized by Google

diesem Uebelstande weniger unterworfen wäre. Ist es nun gleich erforderlich, daß der Beschauer in allen Fällen sich bemühen muß, dem Bilde gegenüber sein Auge in den von dem Darsteller gewählten Gesichtspunkt zu bringen, so glückt dies doch nicht immer vollkommen, zumal ihm dieser Punkt vor ebenen Bildflächen nicht wie vor panoramatischen angewiesen werden kann. Es muß daher der Darsteller den Abstand so groß nehmen, daß die Darstellung auch einem nicht ganz richtig situirten Beschauerauge nicht allzu widerwärtige Verzerrungen zeige.

Als ein Beispiel solcher Verzerrung ist die weiter unten in §. 174, Fig. 21 (Taf. 2) vorgeführte Gesimsperspective anzusehen, ebenso der untere Theil des in Fig. 72 (Taf. 13) dargestellten halbkreisförmigen Ausbaues. Doch soll hierzu sogleich bemerkt werden, daß in diesen und auch noch vielen anderen Figuren die Verzerrungen absichtlich herbeigeführt sind, weil bei ihrer Zulassung die Constructionspunkte und -Linien weiter aus einander fallen und dabei das Constructionsverfahren verständlicher darzulegen ist.

Es kann das im Vorhergehenden über die beiden Kugeln Gesagte beiläufig zugleich als ein Beleg für die in §. 7 ausgesprochene Behauptung dienen, daß man beim Zeichnen nach der Natur Das, was man sieht, das scheinbare Bild, nicht ohne Weiteres auf der Bildfläche reproduciren darf.

§. 22.

Die eben nachgewiesene Verschiedenheit zwischen dem Netzhaut- oder scheinbaren Bilde und dem perspectivischen Bilde läßt sich, wie hiernächst gezeigt werden soll, in Zahlen vorführen, und kann man so die Regel, wie groß das Gesichtsfeld sein dürfe, um nicht perspectivisch allzu verzerrte Bilder einzuschließen, und die hieraus folgende Regel, wie groß der Abstand des Auges von dem Objecte sein müsse, noch bestimmter herleiten.

Zunächst läßt sich die relative Größe des Netzhautbildes in Zahlen ausdrücken, wenn man das Bild als Bogen des Gesichtswinkels des Objectes ansieht. Ist z. B. A B in Fig. 4 ein Object, k der Kreuzungspunkt im Auge O, b a das von dem Objecte verursachte Netzhautbild, so ist A k B der Gesichtswinkel des Objectes. Diesen

Winkel messen heißt so viel, als seinen Bogen messen. Schlägt man dieserhalb um Punkt k mit beliebigem Radius, etwa k b, einen Kreis, und nimmt diesen, wie es üblich ist, als in 360 Einheiten (Grade) getheilt an, so schließt der Gesichtswinkel A k B deren 10 ein. Da nun Winkel a k b dem Winkel A k B als dessen Scheitelwinkel gleich ist, das Netzhautbild b a aber ohne erheblichen Fehler als mit dem Kreise zusammenfallend angesehen werden kann, so ist sowohl der Winkel a k b als das Netzhautbild b a als 10 jener Einheiten groß anzusehen, und man kann hiernach die Ausdrücke „Ausdehnung des Netzhautbildes" und „Bogen oder Größe des Gesichtswinkels" als gleichbedeutend ansehen.

Fig. 4.

§. 23. Sind nun in Fig. 5 zwei einander gleiche Objecte, die Kugeln A und C, im Grundrisse und ebenso in O das Auge gegeben, so bringen die beiden Objecte dem Obigen nach gleiche Netzhautbilder hervor, denn sie haben gleiche Gesichtswinkel α und γ, jeder $2\frac{1}{2}°$ groß, wie auf dem Messungsbogen P q abzulesen ist. Denkt man sich nun die Bildebene b i wie in der Figur gestellt, so sind P d und e f die Perspectiven der beiden Objecte, da deren Gesichtslinien die Bildebene in den genannten Punkten schneiden. Mathematisch aufgefaßt sind die durch die, behufs gleichmäßiger Abtheilung des Messungsbogens gezogenen Radien auf der Bildebene abgetheilten Strecken d P, k P, l P ..... f P, e P u. s. w. als Tangenten der entsprechenden Winkel d O P, k O P, l O P ..... f O P, e O P u. s. w. anzusehen.

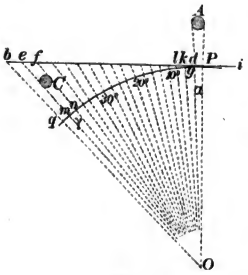

Fig. 5.

Der bloße Anblick der Figur ergiebt schon, daß die Strecken P d und e f nicht allein größer sind, als die von denselben Gesichtslinien (Radien) auf dem Messungsbogen abgetheilten einander gleichen

Digitized by Google

Strecken P g und m n, sondern daß auch e f erheblich größer als P d ist. In Zahlen ausgedrückt stellt sich dieses Verhältniß folgendermaßen:

Nimmt man die Länge O P (den Radius) als in 1000 Einheiten getheilt an, so beträgt die Strecke (Tangente) P d etwa 43,7 dieser Einheiten, die Strecke e f deren circa 77, während sowohl P g als m n auf dem Messungsbogen jede circa 43,6 betragen. Führt man diese Vergleichung der Tangenten- und Bogenlängen für die zwischen den Winkelschenkeln O P und O b liegenden Winkel von $2^1/_2$ zu $2^1/_2{}^\circ$ weiter durch, so wachsen die Tangentenlängen, wie folgende, in größerer Ausführlichkeit am Schlusse vorliegende Tabelle zeigt:

Für den Winkel von	$2^1/_2{}^\circ$	beträgt der Bogen	43,6,	die Tangente	43,7					
»	»	»	»	5°	»	»	»	87,2	»	»	87,5
»	»	»	»	$7^1/_2{}^\circ$	»	»	»	130,8	»	»	131,6
»	»	»	»	10°	»	»	»	174,4	»	»	176,3
»	»	»	»	$12^1/_2{}^\circ$	»	»	»	218	»	»	221,7
»	»	»	»	15°	»	»	»	261,6	»	»	267,9
»	»	»	»	$17^1/_2{}^\circ$	»	»	»	305,2	»	»	315,3
(»	»	»	»	$18^1/_2{}^\circ$	»	»	»	322,6	»	»	334,6)
»	»	»	»	20°	»	»	»	348,8	»	»	364
»	»	»	»	$22^1/_2{}^\circ$	»	»	»	392,4	»	»	414,2
»	»	»	»	25°	»	»	»	436	»	»	466,3
»	»	»	»	$27^1/_2{}^\circ$	»	»	»	479,6	»	»	520,6
»	»	»	»	30°	»	»	»	523,2	»	»	577,4
»	»	»	»	$32^1/_2{}^\circ$	»	»	»	566,8	»	»	637,1
»	»	»	»	35°	»	»	»	610,4	»	»	700,2
(»	»	»	»	37°	»	»	»	645,2	»	»	753,6)
»	»	»	»	$37^1/_2{}^\circ$	»	»	»	654	»	»	767,3
»	»	»	»	40°	»	»	»	697,6	»	»	839,1
»	»	»	»	$42^1/_2{}^\circ$	»	»	»	741,2	»	»	916,3
»	»	»	»	45°	»	»	»	785	»	»	1000.

Während hiernach die einzelnen Strecken auf dem Messungsbogen sämmtlich circa 43,6 betragen, einander gleich sind, wächst

Digitized by Google

die Größe der ihnen entsprechenden Strecken der Tangenten in folgender Weise:

				Zunahme
0	bis	$2\frac{1}{2}°$	= 43,7	
von $2\frac{1}{2}$	bis	5°	um 43,8	0.1
» 5	»	$7\frac{1}{2}°$	» 44,1	0.3
» $7\frac{1}{2}$	»	10°	» 44,7	0.6
» 10	»	$12\frac{1}{2}°$	» 45,4	0.7
» $12\frac{1}{2}$	»	15°	» 46,2	0.8
» 15	»	$17\frac{1}{2}°$	» 47,4	1.2
» $17\frac{1}{2}$	»	20°	» 48,7	1.3
» 20	»	$22\frac{1}{2}°$	» 50,2	1.5
» $22\frac{1}{2}$	»	25°	» 52,1	1.9
» 25	»	$27\frac{1}{2}°$	» 54,3	2.2
» $27\frac{1}{2}$	»	30°	» 56,8	2.4
» 30	»	$32\frac{1}{2}°$	» 59,7	2.9
» $32\frac{1}{2}$	»	35°	» 63,1	3.4
» 35	»	$37\frac{1}{2}°$	» 67,1	4.0
» $37\frac{1}{2}$	»	40°	» 71,8	4.8
» 40	»	$42\frac{1}{2}°$	» 77,2	5.4
» $42\frac{1}{2}$	»	45°	» 83,7.	6.5

Untersucht man nun, an welcher Stelle in der letztern Tabelle die Größe der Tangentenstrecken anfängt sehr merklich zuzunehmen, so findet man, daß dies zwischen $17\frac{1}{2}°$ und 20° der Fall ist und demnach etwa $18\frac{1}{2}°$ die Grenze bilden, an welcher die Größe der Bogenstrecken anfängt, auffallend verschieden von der Größe der Tangentenstrecken zu werden. Da dies auch für rechts von der Linie O P (Fig. 5) liegende Objecte gilt, so leuchtet ein, daß die Größe des ganzen zulässigen Gesichtswinkels (Gesichtsfeldes) strenggenommen 2 mal $18\frac{1}{2}°$, d. i. 37° nicht überschreiten darf, und daß alle außerhalb dieses Gesichtswinkels liegenden Objecte von der Darstellung auszuschließen sind, weil sie perspectivische Bilder ergeben, welche im Vergleich mit den entsprechenden Netzhautbildern zu sehr verzerrt sind.

§. 24. Aus der Annahme eines Gesichtsfeldes von 37° folgt aber auch direct die Nothwendigkeit eines Abstandes des Auges von dem dar-

Digitized by Google

zustellenden Objecte, welcher gleich $1\frac{1}{2}$ mal der größten Ausdehnung desselben ist.

Betrachtet man nämlich die Linie B C in Fig. 6 als die größte, etwa horizontale Ausdehnung eines darzustellenden Objectes, errichtet auf ihr in ihrem Halbirungspunkte P eine normale Linie P x, welche als Achse des Gesichtslinienkegels anzusehen ist, legt an B C in B den Winkel von $71\frac{1}{2}°$ an, so schneidet man mit dessen Schenkel B O die Normale P x in O, und beträgt nun in dem rechtwinkligen Dreiecke B P O der Winkel bei $O = 18\frac{1}{2}°$, da der bei $B = 71\frac{1}{2}°$ beträgt (die Winkel eines Dreiecks betragen zusammengenommen 180°). Sieht man nun O als den Gesichtspunkt an, so ist der Winkel B O P erst die Hälfte des Gesichtsfeldes; zieht man demnach nach O C, so hat der ganze Gesichtswinkel B O C die empfohlene Größe von 37°.

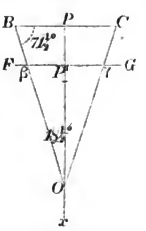

Fig. 6.

Vergleicht man aber die Länge P O, den Abstand, mit der Länge B C, der größten Ausdehnung des Objectes, so ergiebt sich, daß P O gleich $1\frac{1}{2}$ mal B C ist. Wenn nämlich wieder P O gleich 1000 ist, so ist nach der obigen Tabelle die Tangente P B des $18\frac{1}{2}°$ betragenden Winkels P O B gleich 334,6. P B ist demnach $\frac{1}{3}$ von P O, der Construction nach aber $\frac{1}{2}$ von B C; folglich ist B C gleich $\frac{2}{3}$ von P O, oder, was nachzuweisen war, P O ist gleich $1\frac{1}{2}$ mal B C.

Denkt man sich zwischen der Linie B C und dem Auge O die Bildebene F G — wovon das Stück $\beta\gamma$ mit der Bildfläche selbst zusammenfallen möge und demnach, der Ausdehnung des Objectes B C entsprechend, ihre längste Seite vorstellen würde — und zwar so gestellt, daß sie die Achse des Gesichtslinienkegels (Hauptgesichtslinie) P O normal durchschneidet, so muß sich, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke $\beta P^1 O$ und B P O, βP^1 zu $P^1 O$ verhalten wie B P zu P O, und $P^1 O$ (der Abstand vom Bilde) $1\frac{1}{2}$ mal so groß sein als $\beta\gamma$ (die längste Seite des Bildes). Will der Beschauer des Bildes also den richtigen Gesichtspunkt dazu einnehmen, d. h. die Darstellung unter demselben Gesichtswinkel sehen, wie der Darsteller das natürliche Object, so muß

Digitized by Google

er sein Auge in einen Abstand vom Bilde bringen, welcher gleich ist $1\frac{1}{2}$ mal der längsten Seite desselben.

§. 25. Wie man sich zu verhalten habe, um die ästhetischen Rücksichten bei der Wahl des Gesichtspunktes mit der oben empfohlenen Regel hinsichtlich der Größe des Abstandes zu vereinigen, ist aus folgendem Beispiele zu ersehen:

In Fig. 7 ist der Grundriß eines Gebäudes gegeben, dessen größte horizontale Ausdehnung B C = 55 Fuß betrage. Vergrößert man, um links und rechts neben dem perspectivischen Bilde des Gebäudes noch dessen seitliche und hintergrundliche Umgebung vorzuführen, dieses Maß für jede Seite um 10 Fuß, im Ganzen also 20 Fuß, so beträgt hiernach die größte Ausdehnung F E des überhaupt Darzustellenden 75 Fuß. Errichtet man nun auf der Linie F E in ihrem Halbirungspunkte p eine Normale und macht dieselbe $1\frac{1}{2}$ mal 75 Fuß, d. i. $112\frac{1}{2}$ Fuß lang, also gleich p o, so wäre o ein der gegebenen Regel entsprechend liegender Gesichtspunkt. Wenn jedoch, wie hierbei angenommen werden möge, ästhetische Rücksichten es wünschenswerth machen, daß das Gebäude von einem weiter links liegenden Gesichtspunkte aufgenommen werde, und man wollte nun, den Abstand p o von der Linie F E festhaltend, den Gesichtspunkt einfach etwa nach o^1 verlegen, so würden die von diesem Punkte nach F und E denkbaren Gesichtslinien einen bedeu-

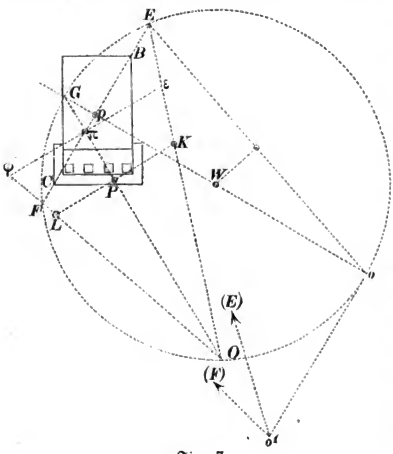

Fig. 7.

kleineren Gesichtswinkel als 37° einschließen und würde dieser Gesichts-

punkt demnach weiter als $1\frac{1}{2}$ mal FE — wie sie sich einem Auge in o^1 verkürzt darstellt — von ihr entfernt sein. Legt man aber durch die drei Punkte F, E und o einen Kreis — was ausgeführt wird, wenn man, FE als eine Sehne des gesuchten Kreises auffassend, eine zweite Sehne Eo zieht, auf dieser in ihrem Halbirungspunkte eine Normale errichtet und mit letzterer die auf der Sehne FE in deren Halbirungspunkte p stehende Normale po im Punkte W schneidet, wonach dieser der Mittelpunkt des Kreises und WE oder Wo der Radius desselben ist — so sind nach dem mathematischen Lehrsatze, daß alle Peripheriewinkel über gleichen oder einem und demselben Bogen (hier FE) einander gleich sind, alle in der Peripherie dieses Kreises denkbaren Punkte so gelegen, daß Linien, von ihnen nach F und E gezogen, stets einen Winkel von 37° einschließen. Es liegen deshalb alle diese Punkte selbst in dem entsprechenden Abstande zu den von diesem Winkel eingeschlossenen Objecten, und könnte demnach etwa O als ein geeignet liegender Gesichtspunkt angenommen werden.

Wo man hiernach auch die Bildebene — wofern sie nur normal zu der Hauptgesichtslinie OG steht — annehmen würde, der Abstand dieses Gesichtspunktes von ihr würde stets proportional seinem Abstande von der scheinbaren Mitte der darzustellenden Objectgruppe sein. Stände beispielsweise die Bildebene durch P, so wäre OP gleich $1\frac{1}{2}$ mal LK, und stände sie durch π, so wäre Oπ gleich $1\frac{1}{2}$ mal $\varphi\varepsilon$.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß das angegebene Verfahren §. 26.
sich nur unter der Bedingung empfiehlt, daß die beiden zu einander diagonal liegenden Punkte FE, oder vielmehr CB, sichtbar und in die Darstellung aufgenommen sein sollen. Sollte nur die Façade des Gebäudes ohne Seitenansicht dargestellt werden, so würde man bei der Ermittelung der Distanz natürlich nicht die diagonale Ausdehnung des ganzen Gebäudes, sondern die größte Ausdehnung der Façade allein zu Grunde legen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man, was auch ein Blick in §. 27.
die oben §. 23 gegebenen Tabellen bestätigt, in den wenigsten Fällen einen Fehler begehen wird, wenn man das Gesichtsfeld eher noch

Digitized by Google

etwas kleiner als 37° groß, und den Abstand demnach eher etwas größer, als $1\frac{1}{2}$ mal die größte Ausdehnung der darzustellenden Objecte zusammengenommen, annimmt.

§. 28. Außerdem giebt es Fälle, in welchen der oben empfohlene Abstand überhaupt gar nicht anwendbar ist, wie z. B. beim Darstellen von Portraitköpfen und Brustbildern, wo es schon wegen der räumlichen Ausdehnung des menschlichen Körpers unausführbar wäre, das Auge in dem besagten Abstande festzuhalten. Man wählt hier einen Abstand, welcher mindestens gleich 3 mal der größten Ausdehnung des darzustellenden Theiles der Person ist. Andererseits giebt es Einzelheiten in Landschaften und Bauwerken, Theile von deren Innerem, welche überhaupt nur von gewissen Gesichtspunkten aus gesehen werden können, bei deren Darstellung man daher auch den Abstand wählen muß, in welchem man sie zu sehen gewohnt ist.

§. 29. Bei der Anfertigung von solchen Bildern, welche an sich sehr kleine oder wohl gar nur mittels des Mikroskopes sichtbare Gegenstände vergrößert darstellen, ist die Größe des Abstandes allein durch die richtige Sehweite bedingt; denn bei der Betrachtung solcher Bilder ist man an sich schon genöthigt, einen Abstand von mindestens 8 Zollen, das geringste Maß der normalen Sehweite, einzuhalten.

Ebenso ist das angerathene Maß des Abstandes nicht immer einzuhalten sowohl bei der Ausführung, als bei der Betrachtung von Bildern kolossalen Maßstabes, wie etwa Wand- und Plafondgemälden, oder von Darstellungen von überwiegend großer Ausdehnung nach einer Seite, wie etwa Friesbildern (bei denen überdies mehrere Gesichtspunkte angenommen werden müssen), weil hier der Darsteller sich so weit von den Objecten und der Beschauer sich so weit von dem Bilde entfernen müßte, daß das Letztere aus räumlichen Rücksichten oft unmöglich, jedenfalls aber die Deutlichkeit des Sehens gefährdet wäre.

§. 30. Im Allgemeinen jedoch ist die oben empfohlene Größe des Gesichtsfeldes und des Abstandes zuverlässig. In zweifelhaften Fällen, insbesondere, wenn es reiche Landschaften oder ausgedehnte Architekturen darzustellen gilt, wird man am sichersten Verstößen

Digitized by Google

entgehen, wenn man, um das Gesichtsfeld zu begrenzen und den Gesichtspunkt festzustellen, sich mit einer leicht herzustellenden Vorrichtung versieht, welche in einem, etwa aus Pappe gefertigten Kegel mit offener Grundfläche besteht, dessen diametral gegenüberstehende Seiten mit einander den Winkel von 37° bilden. Durch die außerdem etwas gekürzte Spitze blickend, wird man stets nur so viel sehen, als innerhalb eines Gesichtsfeldes von 37° liegt; den darzustellenden Objecten sich nähernd, wird man einen kleineren Theil, sich davon entfernend, wird man einen größeren Theil derselben übersehen, und so ohne Schwierigkeit die günstigste Ansicht, den Umfang des Gesichtsfeldes und den angemessenen Abstand zugleich feststellen können.

Hergestellt wird ein solcher Kegel am einfachsten, wenn man auf einem ebenen Stücke Pappe einen Kreisbogen von etwa 9 Zoll Radius schlägt, die Länge des Radius 2 mal auf dem Bogen aufträgt, die dadurch bezeichneten Endpunkte des Bogens durch gerade Linien mit dessen Mittelpunkte verbindet und, nachdem man diese Figur ausgeschnitten, zusammengerollt und verklebt hat, die Spitze des so entstandenen Kegels kurz fortschneidet.

Ein solcher Kegel ist zugleich bei der Anfertigung von panoramatischen Bildern, welche gewöhnlich die rings um einen Standpunkt liegende Gegend auf der inneren Oberfläche eines aufgerichteten normalen Cylinders, oft aber auch auf einer langen ebenen Fläche zusammenhängend darstellen, von Nutzen. Indem man dabei nach einander immer nur einen solchen Theil der Landschaft darstellt, welcher innerhalb eines Gesichtsfeldes von 37° liegt, wird die mit der panoramatischen Darstellung nothwendig verbundene Annahme *mehrerer* Bildebenen kaum merkbar. Aus gleichen Rücksichten ist eine Vorrichtung der angegebenen Art auch nützlich bei der *Betrachtung* von panoramatischen Bildern, wenn dieselben auf einer cylindrisch gekrümmten Bildfläche vorgeführt sind.

§. 31. *Die der Bildfläche zu gebende Begrenzungsfigur* wird im Allgemeinen durch die Gestalt der darzustellenden Objecte bedingt. Aus dem, was über das Gesichtsfeld, als einen durch einen Kegel, dessen Spitze der Gesichtspunkt ist, begrenzten Raum gesagt ist, geht schon hervor, daß die *kreisförmige* Bildfläche und dem-

Digitized by Google

nächst die quadratische die natürlichste ist. Wenn die vorwiegend horizontale oder verticale Ausdehnung der natürlichen Objecte die ovale oder länglich-rechteckige Figur der Bildfläche erfordert, wie bei Landschaften, Architektur- und Marinebildern, Portraitfiguren u. s. w., so muß vermieden werden, daß die eine Ausdehnung der Bildfläche der andern an Länge zu sehr nachstehe und das Bild dadurch den Charakter einer panoramatischen Darstellung bekomme, was den Beschauer zu einem Wechseln des Gesichtspunktes, wie z. B. vor Friesbildern, bestimmen würde. Im Allgemeinen ist wohl das Verhältniß der kürzeren zur längeren Seite eines Bildes wie 2:3 ein solches, welches als die äußerste Grenze bei der Bestimmung der Seitenlängen anzusehen ist und nicht ohne leicht verständliche Gründe überschritten werden darf.

§. 32. Außer den bis hierher gegebenen Erklärungen bedarf es noch der Rechtfertigung gewisser bei dem perspectivischen Construiren gebräuchlichen Annahmen:

Wenn es auch der menschlichen Vorstellung möglich wäre, die bei der Entstehung des perspectivischen Bildes (§. 5) gedachten Gesichtslinien bis zu ihrem Schnitte mit der Bildebene durch den Raum zu verfolgen, so ist doch das praktische Construiren durch den leeren Raum hindurch undenkbar; es erfordert dasselbe vielmehr steten Anhalt an gewisse regelmäßige geometrische Raumscheiden, an denen entlang mittels gerader Linien die Ermittelung der das perspectivische Bild markirenden Schnittpunkte bewerkstelligt werden kann. Außerdem sind solche allgemein gültigen imaginären Scheidungen des Raumes schon erforderlich, um Anhalt bei der Bezeichnung des Ortes eines gegebenen Objectes im Raume, und seiner Gestalt überhaupt, zu haben.

§. 33. Diese Scheidungen des Raumes werden durch drei gewisse, unbegrenzt gedachte Ebenen gebildet, deren Stellung zu einander leicht aufzufassen ist. Ihre Anordnung entspricht den drei Hauptausdehnungen der Körper in die Höhe, die Breite und die Tiefe, und haben sie in dieser Beziehung eine ähnliche Bedeutung, wie die Aufriß-, die Grundriß- und die Profilebene bei dem orthographischen Projiciren. Die erstere wird in der Perspective durch die Bild-

Digitized by Google

ebene, die zweite durch die Grundebene, die dritte durch die Verticalebene vertreten.

Die Bildebene wird, wie schon erwähnt, als lothrecht stehend angenommen; sie nimmt die Perspectiven der vor, in oder hinter ihr befindlichen Objecte auf.

Die Grundebene wird horizontal, die Objecte werden unmittelbar oder mittelbar auf ihr stehend angenommen; sie wird im Allgemeinen als den Erdboden, in Intérieurs als den Fußboden vorstellend angesehen. Wo Unebenheiten des Bodens, wie in bergigen Landschaften, zur freien Wahl zwingen, nimmt man sie an der für das Verfahren bei der Construction günstigsten Stelle an, auch wohl in der Höhe des Wasserspiegels, oder horizontal durch den niedrigsten sichtbaren Punkt.

Die Verticalebene wird als durch das Auge gehend und normal zur Bildebene und zugleich zur Grundebene angenommen; ihr Ort ist durch den Ort des Gesichtspunktes bedingt.

Außerdem sind noch gewisse andere Annahmen und übliche Be- §. 34.
nennungen hervorzuheben, und sind dieselben am besten durch eine perspectivische bildliche Darstellung, wie Fig. 8 ist — worin jedoch die

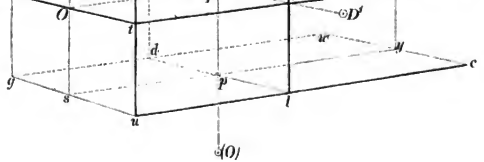

Fig. 8.

Ebenen nicht anders als begrenzt, wie man sie sich nicht zu denken hat, vorgeführt werden konnten — zu erklären.

Digitized by Google

Denkt man sich aus dem Gesichtspunkte, welcher mit O (oculus) bezeichnet zu werden pflegt, eine normale Linie (O P), die Hauptgesichtslinie, auf die Linie h r der Bildebene (b i l d) gefällt, so trifft sie diese in dem sogenannten Hauptpunkte (der Bildebene und des Horizontes h r, s. weiter unten), gewöhnlich mit P (punctum) bezeichnet. Die Länge dieser normalen Linie bezeichnet den Abstand oder die Distanz des Gesichtspunktes von dem Hauptpunkte der Bildebene; sie ist, wie oben hervorgehoben, stets proportional dem Abstande des Gesichtspunktes von dem natürlichen Objecte.

Eine normale Linie (O s), aus dem Gesichtspunkte auf die Grundebene (g u c w) gefällt, trifft diese in dem sogenannten Standpunkte (s) und heißt selbst die Standlinie. Sie bezeichnet die Höhe des Auges über der Grundebene. Eine durch den Gesichtspunkt gedachte, der Bildebene parallele Ebene (e a u g) heißt die Standebene.

Die Schnittlinie (d l) der Bildebene mit der Grundebene heißt die Grundlinie der letztern. Sie giebt den Ort an, an welchem die Bildebene stehend angenommen worden. Sie hat nichts gemein mit der allein durch den guten Geschmack zu bestimmenden untern Begrenzung der Bildfläche durch den Rahmen; es ist die Bildebene vielmehr als unterhalb der Grundlinie, zur Aufnahme der Perspectiven der vor ihr liegenden Objecte, fortgesetzt zu denken. — Wenn in der Folge hin und wieder der Ausdruck „Grundlinie der Bildebene" vorkommt, so geschieht dies nur, um damit kurz den Ort oder die Richtung der Bildebene zu bezeichnen. Ueber die eigentliche Grundlinie der Bildebene s. §. 79.

Die oben gedachte, durch das Auge gehende und zur Bild- und Grundebene normale Verticalebene (k x y s) schneidet die Bildebene selbstverständlich in einer zur Grundlinie normalen und durch den Hauptpunkt (P) gehenden Linie (v p), Verticallinie, oder kürzer die Verticale genannt. Sie ist, wenn die Verticalebene als sichtbar angenommen wird, zugleich das perspectivische Bild von dieser; denn die Gesichtslinien nach allen denkbaren Punkten der Verticalebene schneiden die Bildebene in der Verticallinie. Der

Digitized by Google

Schnittpunkt (p) dieser Linie mit der Grundlinie heißt der Grundpunkt.

Eine fünfte, für die Construction sehr wichtige Ebene ist die durch den Gesichtspunkt horizontal liegend angenommene Horizontebene (zont). Ihre selbstverständlich horizontale Schnittlinie (hr) mit der Bildebene, welche wie die Verticale durch den Hauptpunkt geht, heißt die horizontale Grenzlinie, oder kurzweg der Horizont. Sie ist das perspectivische Bild nicht allein der Horizontebene selbst (denn die nach allen denkbaren Punkten dieser Ebene gezogenen Gesichtslinien schneiden die Bildebene im Horizonte), sondern auch des als gerade Linie aufgefaßten natürlichen Erdhorizontes. Auf ihr sowohl wie auf der Verticale pflegt man beim Construiren die Länge der Distanz von dem Hauptpunkte P aus aufzutragen, und nennt man die so markirten Punkte D, D^1, (O) und (O^1), die Distanzpunkte, die letzteren beiden meist die herabgeschlagenen Gesichtspunkte.

§. 35. Da, wie gesagt, das Construiren perspectivischer Bilder nicht im Raume, sondern nur auf einer körperlichen Fläche geschehen kann, so sieht man die die Construction aufnehmende Zeichnungsebene (s. Fig. 9) als eins mit der Bildebene an. Von der Grundebene bezeichnet man nur ihre Schnittlinie mit der Bildebene, die horizontale Grundlinie dl. Der Raum über dieser Linie sowohl, als unter ihr ist jenachdem bald als der Bildebene selbst angehörig, bald als Perspective der Grundebene anzusehen. Auf der Grundlinie wird der Fuß- und Zollmaßstab in der Größe aufgetragen, wie er für mit der Bildebene zusammenfallende Theile des darzustellenden Objectes angenommen ist, oder wie ihn die beabsichtigte Größe der Darstellung anders vorschreibt.

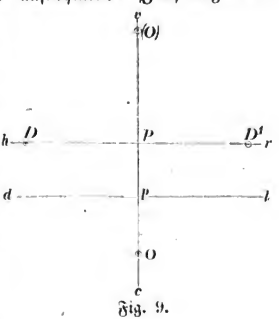

Fig. 9.

Von der Verticalebene, wie von der Horizontebene, werden

ebenfalls nur ihre Schnittlinien mit der Bildebene (ihre perspectivischen Bilder) angegeben: die Verticale v c normal zur Grundlinie, der Horizont h r parallel mit letzterer und in der gegebenen, aus dem Maßstabe zu bemessenden Höhe des Auges über ihr. Der Schnittpunkt beider Linien, der Hauptpunkt, wird mit P bezeichnet. Der Gesichtspunkt wird als innerhalb der Verticalebene, unter Beibehaltung seiner Distanz vom Hauptpunkte P, um diesen bis in die Verticale beliebig über oder, wie es häufiger geschieht, unter P hin gedreht angenommen, und mit O (als herabgeschlagener Gesichtspunkt) bezeichnet. Ebenso wird sein Abstand von P links und rechts hiervon auf den Horizont aufgetragen, und werden hierdurch die Distanzpunkte D und D^1 festgestellt.

§. 36. Nach dieser Einrichtung der Constructionsfläche kann zur Construction selbst geschritten werden.

Obgleich die Regeln für sämmtliche perspectivischen Constructionen dieselben sind, so erscheint es, da es mancherlei Fingerzeige bei ihrer Anwendung an Beispielen bedarf, zweckmäßig, diese zu gruppiren und dabei im Allgemeinen zu unterscheiden:

1) die Constructionen auf der ebenen Bildfläche,
2) die Constructionen auf der gekrümmten Bildfläche,
3) die Constructionen der Schatten,
4) die Constructionen der Spiegelbilder;

ferner die unter 1) genannten zu scheiden in

A. Constructionen lothrechter und horizontaler Objecte,
B. Constructionen schiefer Objecte;

endlich von den unter A angeführten, des leichteren Verständnisses wegen, zuerst

a) die Constructionen der Perspectiven geradliniger geometrischer Figuren und der Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt sind, und dann
b) die Constructionen der Perspectiven von krummen Linien und von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt sind,

zu zeigen.

Digitized by Google

Erſter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der lothrechten ebenen Bildfläche.

A. Conſtruction der Perſpectiven von lothrechten und horizontalen Objecten.

a. Geradlinige geometriſche Figuren und Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt ſind.

Zweites Kapitel.

Perſpectiven lothrechter und horizontaler Linien.

§. 37. Gerade Linien können fünferlei Richtung haben; ſie können ſein

a) lothrecht,
b) horizontal und dabei parallel der Bildebene,
c) horizontal und dabei normal zur Bildebene,
d) horizontal und dabei ſchief zur Bildebene, d. h. einfach ſchief,
e) weder lothrecht, noch horizontal, d. h. doppelt ſchief.

Schließt man die letzteren, unter e) angeführten Linien vorläufig von der Betrachtung aus, um ſie dem die ſchiefen Objecte behan-

Digitized by Google

delnden Abſchnitte vorzubehalten, ſo läßt ſich über die Richtung der perſpectiviſchen Bilder der vier erſteren Linienſyſteme im Allgemeinen Folgendes vorweg feſtſtellen:

§. 38. Die Perſpectiven der unter a) angeführten lothrechten Linien ſind ebenfalls lothrecht.

Iſt nämlich in Fig. 10 eine lothrechte Linie A G gegeben, iſt O der Geſichtspunkt und bild die zwiſchen beiden ſtehende Bildebene, und man denkt ſich von O nach allen Punkten der Linie A G die Geſichtslinien, ſo bilden dieſe zuſammen offenbar eine lothrechte Ebene O A G, welche die ebenfalls lothrechte Bildebene auch nur in einer lothrechten Linie a g ſchneiden kann.

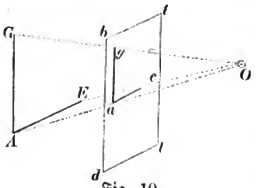

Fig. 10.

§. 39. Die Perſpectiven der unter b) angeführten horizontalen Linien ſind ebenfalls horizontal und (der Grundlinie) der Bildebene parallel, d. h. den Linien ſelbſt parallel.

Iſt nämlich wieder bild in Fig. 10 die zwiſchen der gegebenen horizontalen und zugleich (der Grundlinie) der Bildebene parallelen Linie A E und dem Geſichtspunkte O ſtehende Bildebene, ſo bilden alle von dem Punkte O nach der Linie A E denkbaren Geſichtslinien ein ebenes Dreieck O A E. Da nun die Bildebene, der Annahme gemäß, der Seite A E deſſelben parallel iſt, ſo kann ſie das Dreieck auch nur in einer der Seite A E und darum auch ihrer Grundlinie d l parallelen Linie a e ſchneiden.

§. 40. Die Perſpectiven der in §. 37 unter c) angeführten horizontalen Linien können lothrechte oder ſchiefe Linien ſein.

Fällt nämlich, wie in Fig. 11, eine ſolche Linie, etwa die in der Grundebene liegende, zur Bildebene normale Linie p F, mit der Verticalebene (O s y x) zuſammen, ſo muß auch ihre Perſpective p f mit der Perſpective der Verticalebene, d. h. mit der Verticale p P, zuſammenfallen und demnach lothrecht ſein.

Fällt aber eine horizontale und zur Bildebene normale Linie nicht mit der Verticalebene zuſammen, wie die in derſelben Figur

Digitized by Google

in der Grundebene gegebene Linie C E, so ist ihre Perspective eine schiefe Linie. Denkt man sich nämlich durch den Punkt E der gegebenen Linie und durch den Gesichtspunkt eine lothrechte Ebene O E s,

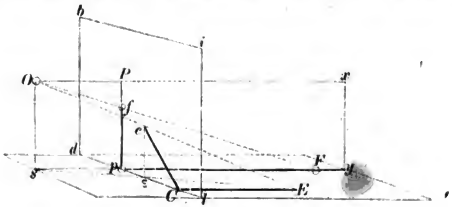

Fig. 11.

so schneidet diese die Bildebene in der lothrechten Linie ε e, und der hierin durch die Gesichtslinie O E bestimmte Punkt e ist die Perspective des Punktes E. Der Punkt C der gegebenen Linie liegt selbst in der Bildebene, und es fällt daher seine Perspective mit ihm selbst zusammen. Demnach ist C e die Perspective der Linie C E und, als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks C ε e, dessen eine Kathete lothrecht ist, eine schiefe Linie.

Daß auch die Perspectiven der in §. 37 unter d) angeführten §. 41.
horizontalen Linien lothrecht oder schief sein können, ist auf gleiche Weise, wie eben geschehen, zu veranschaulichen. Lothrecht können die Perspectiven sein, wie C f in Fig. 12, wenn die gegebene Linie C F zugleich in einer lothrechten, durch den Gesichtspunkt gehenden Ebene O F s liegt; schief, wie die Perspective g e, wenn die gegebene Linie G E nicht zugleich in einer solchen Ebene liegt.

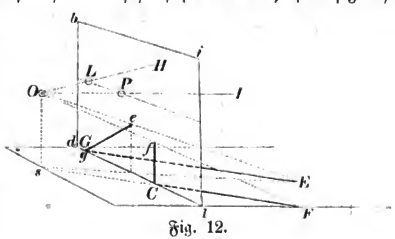

Fig. 12.

Liegen jedoch die in §. 37 unter b), c) und d) angeführten §. 42.
Linien in der Horizontebene, so müssen ihre Perspectiven mit der

Perspective dieser Ebene, d. h. mit dem Horizonte zusammenfallen, und darum horizontal sein.

§. 43. Liegen die in §. 37 unter c) und d) angeführten Linien in der Horizontebene und sind sie zugleich so gerichtet, daß sie den Gesichtspunkt schneiden, wie in Fig. 12 die Linien L H und P I, so gehen die nach allen ihren Punkten denkbaren Gesichtslinien sämmtlich durch einen und denselben Punkt der Bildebene; die Perspectiven dieser Linien, und selbstverständlich auch aller ihrer Punkte, sind daher Punkte, wie in der Figur die Punkte L und P.

§. 44. Aus dem in §. 5 Gesagten läßt sich ein Verfahren für die Construction der perspectivischen Bilder herleiten, welches, wenn es sich um die Perspectiven nicht zu complicirter Objecte handelt, sich besonders unter Anwendung einiger hier später zu zeigenden Vortheile empfiehlt, und hauptsächlich darauf beruht, daß, nachdem von dem gegebenen Objecte, von der Bildebene und dem Gesichtspunkte der geometrische Auf- und Grundriß gezeichnet worden, in beiden letzteren die Projectionen der Gesichtslinien gezogen und deren Schnittpunkte mit der Bildebene auf die wie in §. 35 vorbereitete Constructionsfläche übertragen werden.

Ist z. B. B A in Fig. 13 der Aufriß einer lothrechten, B C der Aufriß einer horizontalen, zur Bildebene v p normalen, in der Grundebene s y liegenden Linie, und ist O der Gesichtspunkt; ist ferner in Fig. 14 der Grundriß derselben Stücke gegeben: Punkt B^1 der Grundriß der Linie B A, $B^1 C^1$ der der Linie B C, ist d i der Grundriß der Bildebene, O^1 der des Gesichtspunktes, $O^1 P^1$ der der Hauptgesichtslinie; und liegt endlich in Fig. 15 die nach §. 35 eingerichtete Constructionsfläche vor — so hat man nur sowohl im Aufrisse als im Grundrisse die Gesichtslinien zu ziehen (hier $O^1 B^1$ und $O^1 C^1$, dort O A, O B und O C), um aus letzterem entnehmen zu

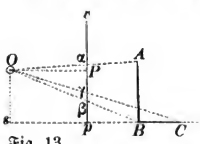

Fig. 13.

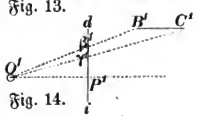

Fig. 14.

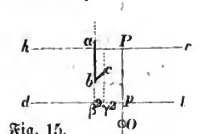

Fig. 15.

können, wie weit links die Perspectiven der Endpunkte der gegebenen Linien von der Verticale liegen, und aus dem Aufrisse, wie hoch die Perspectiven derselben Punkte in der Bildebene über der Grundlinie liegen. Ueberträgt man demnach aus dem Grundrisse die Maße $P^1\beta^1$ und $P^1\gamma^1$ nach Fig. 15 auf die Grundlinie dl links von p in $p\beta^2$ und $p\gamma^2$, zieht durch β^2 und γ^2 zur Grundlinie normale Linien, überträgt auf diese die aus dem Aufrisse zu entnehmenden Maße, nämlich $p\beta$ und $p\alpha$ auf die durch β^2 lothrechte Linie in $\beta^2 b$ und $\beta^2 a$, und das Maß $p\gamma$ des Aufrisses auf die in Fig. 15 durch γ^2 lothrechte Linie in $\gamma^2 c$, und verbindet hier noch b mit c durch eine gerade Linie, so sind ba und bc die Perspectiven der gegebenen Linien BA und BC.

§. 45. Das bei dieser Construction eingeschlagene Verfahren ist das der sogenannten Grundrißmethode. Wie man sieht, ist hierbei neben der eigentlichen Construction die Anfertigung eines Aufrisses und eines Grundrisses (woher die Bezeichnung der Methode rührt) von dem gegebenen Objecte erforderlich: ein Umstand, der bei complicirten Objecten das Construiren ungemein weitläufig macht und die Anwendung einer anderu, der hiernächst zu entwickelnden „Methode der freien Perspective", auch „Verschwindungspunkt-Methode" genannt, sehr empfiehlt.

Die Grundlagen zu dieser andern Methode haben die Mathematiker N. L. de la Caille und J. H. Lambert gegeben, und hat sie namentlich der Letztere in einem Werke unter dem Titel: „La Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral" (Zürich 1759) zusammengestellt. Insofern hierdurch der geometrische Grundriß entbehrlich wurde, gab man der Methode den Namen der „freien Perspective". Im Folgenden wird ihr in den meisten Fällen der Vorzug gegeben werden und nur in besonderen Fällen wird die Grundrißmethode, in anderen noch eine Verschmelzung beider in Anwendung kommen.

§. 46. Der Name der Verschwindungspunkt-Methode rührt her von der bei ihr gebräuchlichen Anwendung der sogenannten Verschwindungspunkte. Es sind dies die imaginären, in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der in der Construction vorkom-

Digitized by Google

menden, zunächst stets als unendlich lang aufgefaßten geraden Linien.

Die gerade Linie, als Constructionsmittel, wird, wie gesagt, überall als von unendlicher Länge angenommen, wenngleich meist nur eine Strecke von ihr festgestellt werden soll. Sie tritt bald unter dem Namen einer Gesichtslinie, bald unter dem einer Richtung oder eines Strahles, bald als Ort unendlich vieler in einer Richtung neben einander liegenden Punkte auf. Sind zwei dieser Punkte festgestellt, so ist die Richtung der Linie bestimmt. Man pflegt deshalb für jede vorkommende Linie, um ihre Perspective ziehen zu können, zuvor die Perspective eines ihrer in der Nähe liegenden Punkte und außerdem die Perspective ihres in unendlicher Entfernung liegenden Punktes, ihres Verschwindungspunktes, festzustellen.

§. 47. Der Auffassung des Verschwindungspunktes und der dabei sogleich mitzuerwähnenden Parallelität von Linien, welche in der Perspective von besonderer Wichtigkeit ist, liegen die mathematischen Sätze zu Grunde:

1) daß parallele Linien solche Linien sind, welche sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, und daß umgekehrt

2) ein Punkt im Unendlichen als Schnittpunkt eines Systems paralleler Linien anzusehen ist.

§. 48. Zum Verständnisse dieser dem Anfänger befremdlich klingenden Sätze gelangt man etwa folgendermaßen:

Denkt man sich mehrere bewegliche, unendlich lange gerade Linien, von denen in Fig. 16 nur Strecken v a, v b, v c, v d und v e vorliegen, und welche einerseits sämmtlich an dem beweglichen Punkte v haften, andererseits aber jede durch einen besondern unverrückbaren Punkt a, b, c, d und e gehen, und man stellt sich vor, daß der jenen Linien gemeinschaftliche Punkt v in einer beliebigen Richtung, etwa nach u hin, fortbewegt werde,

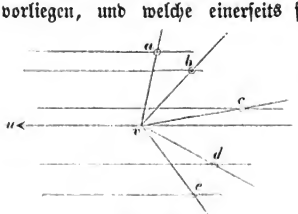

Fig. 16.

Digitized by Google

während die Linien selbst durch die festen Punkte a, b, c u. s. w. hindurch nachgezogen werden, so nimmt die nach v convergirende Richtung der Linien offenbar in dem Grade ab, in welchem die Winkel, welche die Linien bei v mit einander bilden, kleiner werden. Wird der Punkt v nun in derselben Richtung immer weiter, zuletzt bis in die Unendlichkeit fortbewegt, so ist die Größe der Winkel bei v auf Null reducirt und die Convergenz der Linien ist in Parallelität umgewandelt. Denkt man sich den gemeinschaftlichen Punkt v unter denselben Annahmen durch das Papier hindurch in einer zur Papierfläche normalen oder schiefen Richtung fortbewegt, so werden dieselben Linien, sobald v als in die Unendlichkeit gerückt gedacht wird, ebenfalls als parallel anzusehen sein.

Man kann demnach im Allgemeinen parallele Linien wohl als solche ansehen, welche nach einem in der Unendlichkeit liegenden Punkte convergiren, und umgekehrt jeden Punkt in der Unendlichkeit als den Schnittpunkt eines ganzen Systems von Parallellinien.

Um übrigens hierzu ein das Verständniß erleichterndes Beispiel zu haben, darf man nur die Richtung der der Erde zugehenden Strahlen der Sonne, deren Entfernung von der Erde wohl eine unendliche genannt werden kann, in Betracht nehmen. Obwohl diese Strahlen offenbar nach dem Mittelpunkte der Sonne convergiren, so kann dieses große Büschel derselben, wegen ihrer ununterscheidbaren Convergenz, doch nur als parallel aufgefaßt werden.

Der in der Unendlichkeit liegende Punkt einer einzelnen Linie ist also, weil er zugleich der Schnittpunkt des ganzen Systems aller mit ihr parallelen Linien ist, nicht allein der Verschwindungspunkt der Linie, sondern auch der des Systems der ihr parallelen Linien. §. 49.

Der Zusammenhang der im Vorhergehenden erörterten mathematischen Anschauung der Parallelität der Linien und der *hiermit* verbundenen Auffassung des unendlich entfernten Punktes *eines* Systems paralleler Linien mit der Construction der perspectivischen Bilder derselben ergiebt sich aus Folgendem: §. 50.

In Fig. 17 sei bild die Bildebene, O der Gesichtspunkt, P der Hauptpunkt, hr der Horizont, und hinter der Bildebene seien zwei

Digitized by Google

parallele horizontale, zur Bildebene schiefe, unendlich lange Linien gegeben, von denen jedoch nur die Strecken A M und C N vorliegen. Faßt man von den Linien nur einzelne ihrer Punkte und zwar stets je zwei einander normal gegenüberliegende Punkte A und C, E und F, G und K, M und N, deren Entfernungen von einander den stets

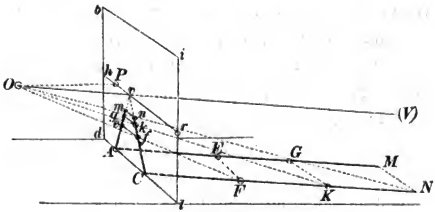

Fig. 17.

gleichen Abstand der Linien bezeichnen, zugleich aber die Perspectiven A C, e f, g k und m n dieser Abstände ins Auge, so findet man, daß zunächst die Perspectiven der Punkte A und C mit diesen zusammenfallen, weil diese selbst in der Bildebene liegen; ferner, daß die Perspectiven e und f der Punkte E und F höher in der Bildebene liegen, als die der Punkte A und C, und zugleich näher bei einander, als diese; daß ferner noch höher und näher bei einander die Perspectiven g und k der Punkte G und K liegen und daß, wenn man sich entfernter gelegene Punkte der beiden Linien denkt, deren Perspectiven in der Bildebene noch näher dem Horizonte und zugleich näher bei einander liegen müssen, und so fort, bis die Perspective des in der Unendlichkeit denkbaren gemeinschaftlichen Punktes der Linien selbstredend keinen Abstand mehr zuläßt und in einen Punkt v des Horizontes zusammenfällt. Nach diesem einen Punkte v, welcher die Perspective des Verschwindungspunktes der Linien ist, findet man auch die Perspectiven der gegebenen Linien gerichtet, wenn man durch die Perspectiven A, e, g und C, f, k der Punkte A, E, G und C, F, K gerade Linien A v und C v zieht.

§. 51. Nimmt man andererseits die nach den einzelnen Punkten einer der Linien, z. B. der C N, gehenden Gesichtslinien O C, O F, O K,

Digitized by Google

O N in Betracht, so findet man, daß je entfernteren Punkten diese angehören, desto mehr sie sich der horizontalen Richtung und daher der Parallelität mit der Linie C F nähern, und daß demnach die nach dem in der Unendlichkeit gelegenen Punkte V der Linie denkbare Gesichtslinie O V mit der Linie C N geometrisch parallel, und deshalb an sich horizontal sein und durch die im Horizonte liegende Perspective v des Verschwindungspunktes gehen müsse. Dasselbe ist auch von den nach Punkten der Linie A M, und zugleich auch von den nach Punkten aller anderen der C N parallelen Linien gehenden Gesichtslinien zu sagen.

§. 52. Die aus dem Gesichtspunkte nach dem in der Unendlichkeit liegenden (Verschwindungs-) Punkte einer Linie oder eines Systems von Parallellinien denkbare Eine Gesichtslinie heißt in der Perspective der **Parallelstrahl** der Linie oder des Liniensystems.

Der Schnittpunkt des Parallelstrahles mit der Bildebene ist die Perspective des Verschwindungspunktes der Linie oder des Liniensystems.

§. 53. Da der Parallelstrahl einer horizontalen Linie selbst horizontal ist, so schneidet er die Bildebene stets in der Höhe des Gesichtspunktes, also im Horizonte. Die Perspectiven der Verschwindungspunkte horizontaler Linien liegen demnach im Horizonte.

§. 54. Nimmt man von den oben in §. 37 angeführten vier Arten von nicht doppeltschiefen Linien der Einfachheit wegen zunächst die unter c) genannten horizontalen und zur Bildebene normalen Linien in Betracht, so ergiebt sich für diese alle eine und dieselbe Perspective des Verschwindungspunktes. Denkt man sich nämlich den Parallelstrahl zu diesen Linien, also eine durch das Auge gehende horizontale, zur Bildebene normale Gesichtslinie, so fällt deren Schnittpunkt mit der Bildebene, d. h. die Perspective des Verschwindungspunktes jener Linien, mit dem Hauptpunkte P zusammen. Da offenbar die Perspectiven der Linien nach den Perspectiven der Verschwindungspunkte derselben gerichtet sind, so ist hiernach als Regel aufzustellen, daß die Perspective jeder

Digitized by Google

horizontalen, zur Bildebene normalen Linie nach dem Hauptpunkte gerichtet ist.

§. 55. Ist die Perspective einer der in §. 37 unter d) angeführten horizontalen, zur Bildebene schiefen Linien zu construiren, z. B. einer in der Grundebene gegebenen, die Bildebene im Punkte E (s. Fig. 18) schneidenden und mit derselben den Winkel von 50° bildenden unendlich langen Linie A C, so findet man, dem Vorigen analog, die Perspective v des Verschwindungspunktes derselben in dem Punkte, in welchem der durch den Gesichtspunkt gehende horizontale, mit der Bildebene den gegebenen Winkel von 50° bildende Parallelstrahl O γ die Bildebene schneidet.

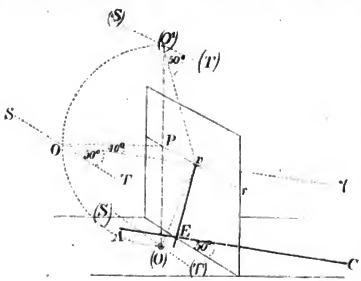

Fig. 18.

Da die Standebene, in welcher der Gesichtspunkt liegt, der Bildebene parallel ist, so wäre der gegebene Winkel von 50° an die in der Standebene liegende horizontale Linie S T in O zu legen; der in dem angetragenen Winkelschenkel O γ vorliegende Parallelstrahl O γ, welcher die Bildebene in dem im Horizonte liegenden Punkte v schneidet, würde dann mit der Bildebene den Winkel γ v r, welcher dem Winkel T O v als Gegenwinkel gleich ist und also auch 50° beträgt, bilden. Denkt man sich nun, da das Construiren nicht im Raum geschehen kann, vielmehr auf der Bildebene stattfinden muß, die Hauptgesichtslinie P O nebst der Linie S T um den Punkt P längs der Verticalebene auf die Bildebene in P (O) oder P (O¹) herabgeschlagen, und man legt hier in (O¹) an die Linie (S) (T) den Winkel von 50°, so schneidet dessen Schenkel (O¹) v den Horizont ebenfalls in v. Zu demselben Resultat würde man gelangen, wenn P O unterhalb des Horizontes auf die Bildebene herabgeschlagen worden wäre.

Digitized by Google

Auf der zur Construction bestimmten und nach §. 35 eingerichteten Fläche hat man demnach an eine durch O (Fig. 19) gelegte, der Grundlinie (Bildebene) parallele Linie st in O den Winkel tOv von 50° anzutragen, um in Ov den Parallelstrahl der gegebenen Linie AC, und in dem Schnittpunkte v desselben mit der Bildebene, und zwar im Horizonte, die Perspective des Verschwindungspunktes der Linie AC zu erzielen. Ist dann e der Schnittpunkt der Linie AC selbst mit der Bildebene, so ist eine durch e nach v gezogene Linie av die Perspective der gegebenen, aber unendlich lang aufgefaßten Linie AC.

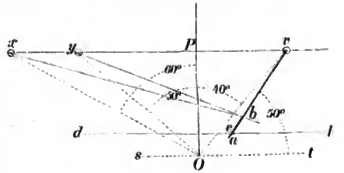

Fig. 19.

§. 56. Um die Anwendung der Standebene, hier die Linie st entbehrlich zu machen, pflegt man statt des Winkels, welchen eine gegebene horizontale Linie mit der Bildebene bildet, den Winkel ins Auge zu fassen, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, und demnach zu verfahren. Da letztgenannte Ebene mit der Bildebene einen rechten, also 90° betragenden Winkel bildet, so bildet die in der vorigen Figur gegebene, von der Bildebene um 50° abweichende Linie AC mit der Verticalebene den Winkel von 40°; man kommt demnach zu demselben Resultat, wie oben, wenn man, statt an die Linie st in O den Winkel tOv von 50° anzutragen, an die in der Verticalebene liegende, auf die Bildebene herabgeschlagene Hauptgesichtslinie OP in O den Winkel POv von 40° anträgt.

§. 57. Soll nun in Fig. 19 noch durch irgendeinen Punkt, etwa b, der Perspective av der gegebenen Linie AC die Perspective einer zu dieser normalen horizontalen Linie *construirt* werden, so findet man die Perspective des *Verschwindungspunktes* dieser Linie dadurch, daß man an den Parallelstrahl Ov in O einen rechten Winkel vOy legt, dessen Schenkel Oy der Parallelstrahl der normalen Linie ist und den Horizont in dem Punkte y schneidet. Zieht man dann von y durch b eine Linie, so

Digitized by Google

ist diese die Perspective der zur Linie A C normalen horizontalen Linie.

Die Perspectiven der Verschwindungspunkte zu einander normaler Linien, welche gewöhnlich correspondirende Verschwindungspunkte genannt werden, werden hier in der Folge meist mit den Buchstaben y und z bezeichnet werden.

§. 58. Soll durch irgendeinen Punkt b der Perspective a v einer gegebenen Linie A C (Fig. 19) die Perspective einer einen beliebigen andern, etwa 100° großen Winkel mit der A C bildenden horizontalen Linie construirt werden, so ist der Parallelstrahl O x der verlangten Linie, dem Vorigen entsprechend, unter dem gegebenen Winkel von 100° an den Parallelstrahl O v der Linie A C zu legen; oder, man faßt den 60° großen Abweichungswinkel der neugegebenen Linie von der Verticalebene ins Auge, und trägt diesen an die Hauptgesichtslinie O P in O.

§. 59. Um die Perspective v des Verschwindungspunktes der Linie A C zu construiren, kann man auch, da das Maß der Entfernung des Punktes v vom Hauptpunkte P die Tangente des Winkels P O v ist, dieses Maß mit Hülfe der trigonometrischen Tabellen berechnen, indem man mit der aus den Tabellen ersichtlichen Größe der Tangente des Abweichungswinkels der gegebenen Linie von der Verticalebene die Größe der Distanz multiplicirt.

Die Tangente des in der vorigen Figur vorliegenden, 40° betragenden Abweichungswinkels P O v ist gleich 0,8391 (s. die Tabelle am Ende); multiplicirt man mit dieser Zahl die Größe der hier z. B. als 20 Fuß lang angenommenen Distanz P O, so beträgt der Abstand des Punktes v von P = 20 Fuß mal 0,8391, d. i. 16,782, also nahezu $16\frac{3}{4}$ Fuß, welches Maß nunmehr aus dem für die Grundlinie d l geltenden Maßstabe zu entnehmen wäre.

§. 60. Um nun die Perspective einer der in §. 37 unter b) angeführten horizontalen, der Bildebene parallelen Linien zu construiren, müßte nach dem Vorhergehenden ein horizontaler, der Bildebene paralleler Parallelstrahl durch den Gesichtspunkt gelegt werden, um in dem Schnittpunkte desselben mit der Bildebene die Perspective des Verschwindungspunktes jener Linie zu finden. Ein solcher

Digitized by Google

Parallelstrahl würde nach dem oben über Parallelität Gesagten die Bildebene erst in unendlicher Entfernung links oder rechts von der Verticale und zwar im Horizonte schneiden, und es würde der Schnittpunkt wegen seiner unendlichen Entfernung überhaupt nicht bezeichenbar sein. Handelt es sich aber darum, nach ihm die Perspective der gegebenen Linie zu ziehen, so muß eine durch die Perspective eines der in der Nähe liegenden und hier construirbaren Punkte der Linie gezogene, sowie jede andere, dem Horizonte geometrisch parallele Linie nach diesem Schnittpunkte gerichtet sein. Denn zöge man eine dem Horizonte nicht geometrisch parallele Linie, so würde diese den Horizont früher als in dem in unendlicher Entfernung liegenden Schnittpunkte schneiden.

Nach dem in den letzten Paragraphen Erörterten dürfen nunmehr folgende drei Sätze als feststehend hervorgehoben werden: §. 61.

1) Die Perspectiven der Verschwindungspunkte horizontaler Linien liegen im Horizonte;

2) jeder Punkt des Horizontes ist als Perspective des Verschwindungspunktes eines Systems paralleler horizontaler Linien anzusehen;

3) in einem und demselben Punkte des Horizontes verschwindende Linien sind perspectivisch horizontal und parallel.

Die Perspective des Verschwindungspunktes der in §. 37 unter a) angeführten lothrechten Linien würde, dem Vorigen analog, in dem Schnittpunkte eines durch den Gesichtspunkt gelegten lothrechten Parallelstrahles mit der Bildebene zu ermitteln sein. Da dieser Parallelstrahl zugleich in der Verticalebene läge, so müßte auch sein Schnittpunkt mit der Bildebene unbedenklich in der Schnittlinie der Verticalebene mit der Bildebene, nämlich in der Verticale, und zwar in unendlicher Entfernung über oder unter dem Horizonte liegen, aus welchem Grunde dieser Punkt ebenfalls nicht bezeichenbar wäre. Man bedarf jedoch dieses Punktes selbst auch nicht, da jede in der Bildfläche lothrecht, d. h. der Verticale geometrisch parallel gezogene Linie an sich nach ihm gerichtet ist; denn zöge man eine der Verticale nicht geometrisch parallele Linie, so würde diese die Verticale §. 62.

Digitized by Google

früher als in jenem Schnittpunkte, der Perspective des Verschwindungspunktes lothrechter Linien, schneiden.

§. 63. Nachdem in den §§. 23—30 die Grenze bezeichnet worden, bis zu welcher die Aufnahme von Objecten in ein Bild aus ästhetischen Rücksichten gestattet ist, ist hier schließlich noch zu erwähnen, wie weit Perspectiven von Objecten, abgesehen von jenen Rücksichten, überhaupt construirbar sind.

Daß Gesichtslinien nach Punkten solcher Objecte, welche selbst in der Standebene liegen, die Bildebene erst im Unendlichen schneiden, und daß deshalb die Perspectiven solcher Objecte in unendlicher Entfernung liegen und nicht darstellbar sind, bedarf keiner Erörterung. Die Gesichtslinien nach Punkten rückwärts von der Standebene liegender Objecte würden nur mit ihren Rückwärtsverlängerungen die Bildebene schneiden, hier Perspectiven auf der den Orten der Objecte entgegengesetzten Seite ergeben, und sich mit Perspectiven der vor dem Auge liegenden Objecte vermischen, was wohl mit der mathematischen Anschauung, aber nicht mit den Begriffen von einer bildlichen Darstellung verträglich wäre.

Es sind hiernach Objecte perspectivisch überhaupt darstellbar nur so weit, als sie **vor der Standebene**, d. h. in dem Raume hinter der Bildebene und in dem zwischen Bild- und Standebene liegen.

Es ist selbstverständlich, daß die Perspectiven von Objecten, welche zwar vor der Standebene, dieser aber sehr nahe liegen, ebenfalls in so große Entfernung fallen können, daß sie die Grenzen selbst der größten Bildfläche überschreiten; es ist dies jedoch ein Umstand, der bei gehöriger Beachtung des über die Wahl des Gesichtspunktes Gesagten nie eintritt.

Drittes Kapitel.

Perspectiven horizontaler und lothrechter Ebenen.

§. 64. Die Lage einer Ebene wird im Allgemeinen beschrieben durch die Lage einer ihr angehörigen geraden Linie und zugleich eines ihr

Digitized by Google

angehörigen, nicht in dieser Linie liegenden Punktes; oder durch die Lage zweier ihr angehörigen Linien. — Eine Ebene ist an sich nicht darstellbar; perspectivisch kann eine Ebene nur in ihren Schnittlinien mit anderen Ebenen oder krummen Flächen und durch die Perspective ihrer in der Unendlichkeit denkbaren Grenze dargestellt werden. Die Schnittlinie einer Ebene mit der Bildebene heißt die Grundlinie der Ebene.

§. 65. Faßt man eine Ebene als den Ort unendlich vieler geraden Linien auf, so bilden die in der Unendlichkeit liegenden Punkte dieser Linien die in der Unendlichkeit liegende Grenze der Ebene, welche die Grenzlinie genannt wird. Der Consequenz wegen müßte sie eigentlich die Verschwindungslinie heißen.

Denkt man sich unendlich viele über einander liegende parallele horizontale Linien sämmtlich an einer lothrechten Linie, welche die Achslinie heißen möge, haftend, so haben jene Linien, weil sie parallel sind, zunächst einen in unendlicher Ferne liegenden gemeinsamen Verschwindungspunkt. Denkt man sich ferner die Achslinie nebst den daran haftenden Linien allmählich um sich gedreht, ohne daß die erstere ihre lothrechte Stellung und die Linien ihre Lage zu einander und zur Achslinie verändern, so durchlaufen diese Linien alle möglichen horizontalen Richtungen, und jede beschreibt eine besondere horizontale Ebene; der allen Linien gemeinsame Verschwindungspunkt aber beschreibt dabei nur eine allen diesen Ebenen gemeinsame unendlich entfernte gerade Linie, die Grenzlinie (Verschwindungslinie) aller dieser Ebenen.

§. 66. Nimmt man nun den Parallelstrahl für jene Linien, d. i. die nach dem gemeinsamen Verschwindungspunkte derselben gerichtete eine Gesichtslinie, in Betracht, und denkt ihn der Drehung jenes Liniensystems folgend, so durchläuft derselbe während der Drehung, da er durch den Gesichtspunkt geht und horizontal ist, die Horizontebene, und schneidet dabei die Bildebene in ihrer Schnittlinie mit der Horizontebene, nämlich im Horizonte. Es ist dieser deshalb nicht allein die Perspective der Horizontebene selbst und der Grenzlinie derselben, sondern vielmehr die Perspective der einen Grenzlinie sämmtlicher horizontalen Ebenen.

Digitized by Google

§. 67. Wenn man dem Vorigen nach eine Ebene als die Bahn eines in einer bestimmten Richtung bewegten Parallelstrahles ansieht, so kann man den Horizont sowohl, wie die Perspective der Grenzlinie (Verschwindungslinie) jeder andern Ebene, als die Schnittlinie einer durch den Gesichtspunkt angenommenen Parallelebene zu der fraglichen Ebene mit der Bildebene ansehen, analog der Auffassung der Perspective des Verschwindungspunktes einer Linie als Schnittpunkt des Parallelstrahles der Linie mit der Bildebene.

§. 68. Da der Schnitt einer horizontalen Ebene mit einer lothrechten, wie die Bildebene ist, stets eine horizontale Linie ist, so ist die Grundlinie jeder horizontalen Ebene, wie die der Grundebene, horizontal, d. h. dem Horizonte parallel. Die Grundlinie der Horizontebene fällt mit dem Horizonte zusammen.

§. 69. Jede gegebene begrenzte ebene Fläche, sowie jede gegebene gerade Linie faßt man als irgendeiner unbegrenzten Ebene angehörig auf und behandelt sie demgemäß bei der Construction ihrer Perspective.

§. 70. Wenn man nun auch eine gegebene horizontale Linie als irgendeiner lothrechten oder schiefen Ebene angehörig ansehen kann, so construirt man ihre Perspective doch stets am einfachsten, wenn man sie als der ihr entsprechenden horizontalen Ebene angehörig behandelt.

Da jedoch die Perspectiven von horizontalen Linien und von horizontalen ebenen Flächen an irgendwelchen Objecten dadurch leicht construirt werden können, daß man die Linien oder die Flächen zu der für die Gesammtconstruction vorweg gewählten horizontalen Grundebene in Beziehung bringt und, vermittelst ihrer Horizontalprojectionen auf dieser, von hier aus ihre Perspectiven construirt, so ist es nicht nöthig, für jede horizontale Linie oder ebene Fläche die unbegrenzte horizontale Ebene, welcher sie insbesondere angehörig ist, ins Auge zu fassen und etwa deren besondere Grundlinie festzustellen — wie dies zum Theil für lothrechte Ebenen und für alle schiefen Ebenen erforderlich ist —, es ist vielmehr die horizontale Grundebene mit ihrer Grundlinie bei allen bei der Construction der Perspectiven horizontaler Linien und ebenen Flächen vorkommenden Operationen ausreichend.

Digitized by Google

Durch eine dem in §. 65 Erörterten ähnliche Betrachtung ist nachzuweisen, daß die Perspectiven der Grenzlinien der verschiedenen möglichen lothrechten Ebenen lothrechte Linien sind, und daß andererseits jede den Horizont normal durchschneidende, also lothrechte Linie als Perspective der Grenzlinie einer und zugleich eines ganzen Systems **lothrechter** paralleler Ebenen anzusehen ist. Denkt man sich nämlich die in §. 65 erwähnte Achslinie nebst den an ihr haftenden Linien umgelegt, so daß jene eine horizontale, zur Bildebene schiefe Lage bekommt, und danach die Achslinie nebst den Linien allmählich um sich gedreht, so bewegen sich sämmtliche Linien jede in einer besondern lothrechten Ebene; ihr gemeinsamer Verschwindungspunkt aber beschreibt dabei eine lothrechte Linie, welche die Grenzlinie dieser Ebenen ist, und deren Perspective eine den Horizont normal durchschneidende gerade Linie ist. §. 71.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist zugleich zu folgern, daß in der lothrechten Perspective der Grenzlinie einer lothrechten Ebene die Perspectiven der Verschwindungspunkte aller in dieser Ebene und in den ihr parallelen Ebenen denkbaren geraden Linien liegen. §. 72.

Soll nun z. B. die Perspective der Grenzlinie der durch einen in der Grundebene liegenden Punkt A gehenden unendlichen lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene construirt werden, so findet man den Punkt, in welchem diese Perspective den Horizont durchschneidet und welcher, um sie ziehen zu können, genügt, am leichtesten, wenn man zunächst die im Horizonte liegende Perspective des Verschwindungspunktes der in der lothrechten Ebene denkbaren horizontalen Linien sucht. Zieht man zu dem Ende aus O (s. Fig. 20) den Parallelstrahl OP für diese Linien, so schneidet derselbe den Horizont in dem Hauptpunkte P. Legt man durch diesen Punkt §. 73.

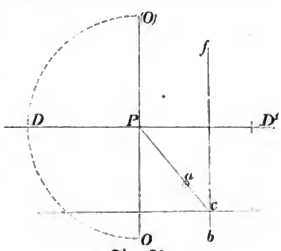

Fig. 20.

Digitized by Google

eine lothrechte Linie (welche mit der Verticale zusammenfallen muß), so ist diese die Perspective der Grenzlinie der gegebenen und zugleich aller damit parallelen Ebenen, also auch der Verticalebene.

§. 74. Eine aus dem Gesichtspunkte (im Raume) auf diese Grenzlinien-Perspective gefällte Normale trifft dieselbe im Punkte P, welcher deshalb auch für sie der Hauptpunkt ist. Die Distanz ist dazu dieselbe geblieben. Sieht man die gegebene lothrechte Ebene als die um 90° gedrehte horizontale Grundebene an und nimmt an, daß die Verticalebene mit letzterer die Drehung mitgemacht habe, so muß diese, die Verticalebene, danach in eine horizontale Ebene umgewandelt sein und ihre Grenzlinien-Perspective als gedrehte Verticale mit dem Horizonte zusammenfallen. Wie bisher bei der Construction von horizontalen Linien, welche als je einer entsprechenden horizontalen Ebene angehörig aufgefaßt werden, der Gesichtspunkt in die Verticale herabgeschlagen wurde, so wird auch für lothrechte Ebenen der Gesichtspunkt in die gedrehte Verticale herabgeschlagen und fällt hierin in D^1 oder D, während die Distanzpunkte mit O und (O) in der Grenzlinien-Perspective der lothrechten Ebene zusammenfallen.

Ist Punkt a die Perspective des gegebenen Punktes A, so ist eine von P durch a gezogene Linie die Perspective der Schnittlinie der gegebenen lothrechten Ebene mit der Grundebene; und zieht man durch den Punkt c der Grundlinie, in welchem die Linie P a an die Bildebene stößt, eine lothrechte Linie f b, so ist diese die Schnittlinie der Bildebene mit der gegebenen lothrechten Ebene, und darum die Grundlinie der letztern. Sie ist, wie alle Grundlinien von Ebenen, parallel der Grenzlinien-Perspective oder, was dasselbe bedeutet, normal zur gedrehten Verticale.

§. 75. Ist in der Grundebene ein Punkt A gegeben, durch welchen eine lothrechte, zur Bildebene schiefe, mit dieser etwa den Winkel von 50° (also mit der Verticalebene den Winkel von 40°) bildende Ebene steht, so construirt man, um die Grenzlinien-Perspective der Ebene ziehen zu können, im Horizonte die Perspective des Verschwindungspunktes der in der Ebene denkbaren horizontalen Linien.

Digitized by Google

Da diese, wie die Ebene selbst, um 40° von der Verticalebene abweichen, so ist O H in Fig. 21 ihr Parallelstrahl und H die Perspective ihres Verschwindungspunktes; demnach eine durch H gezogene

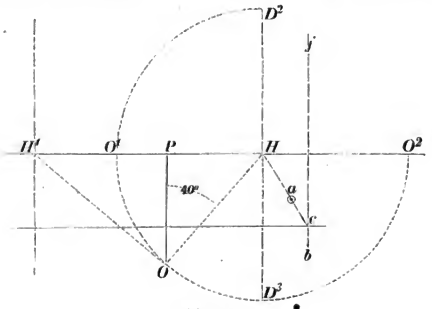

Fig. 21.

lothrechte Linie D² D³ die Grenzlinien-Perspective der gegebenen, und aller damit parallelen Ebenen.

Der Fußpunkt H einer aus dem Gesichtspunkte im Raum auf die Grenzlinien-Perspective gefällten Normalen ist, wie in allen Grenzlinien-Perspectiven, auch hier der Hauptpunkt, und die Länge dieser Normalen, welche offenbar gleich O H ist, die Distanz. Der Horizont bekommt auch hier wieder die Bedeutung der gedrehten Verticale; und wird der Gesichtspunkt in diese herabgeschlagen, so fällt er in O¹ oder O², während D² und D³ Distanzpunkte sind.

Ist Punkt a die Perspective des gegebenen Punktes A, so ist eine von H durch a gezogene Linie H c die Perspective der Schnittlinie der gegebenen Ebene mit der Grundebene; und zieht man durch Punkt c der Grundlinie, in welchem H c an die Bildebene stößt, eine lothrechte Linie f b, so ist diese die Schnittlinie der Bildebene mit der gegebenen lothrechten Ebene, und deshalb die Grundlinie der letztern.

Soll die Perspective einer innerhalb derselben lothrechten Ebene §. 76.
liegenden nicht horizontalen, also nicht in H verschwindenden, Linie

construirt werden, so muß der Parallelstrahl für diese Linie unter ihrem gegebenen Abweichungswinkel vom Horizonte (jetzt gedrehte Verticale) an diesen in O^1 oder O^2 angetragen und damit die lothrechte Grenzlinien-Perspective in der Perspective des Verschwindungspunktes jener Linie geschnitten werden. Das Weitere hierüber ist in dem Kapitel 10 über schiefe Ebenen, §. 287, zu finden.

§. 77. Sollen die Perspectiven von Linien construirt werden, die zu derselben lothrechten Ebene normal sind, so findet man, da dies offenbar horizontale Linien sind, die Perspective ihres Verschwindungspunktes, wenn man an den Parallelstrahl O H in O den rechten Winkel anträgt und mit dessen Schenkel O H^1 den Horizont in H^1 schneidet.

Zieht man durch diesen Punkt eine lothrechte Linie, so ist diese die Perspective der Grenzlinie für solche lothrechte Ebenen, welche normal sowohl zu der gedrehten Verticalebene, als zu den Ebenen sind, deren Grenzlinien-Perspective $D^2 D^3$ ist. Zu dem Hauptpunkte H^1 darin ist $H^1 O$ die Distanz, und soll der Gesichtspunkt in die gedrehte Verticale, den Horizont, herabgeschlagen werden, so ist sein Abstand von H^1 gleich $H^1 O$.

§. 78. Lothrechte, zur Bildebene nicht normale Ebenen, wie die in den vorhergehenden Paragraphen behandelte, gehören zu den einfach-schiefen Ebenen und heißen lothrecht-schiefe Ebenen.

§. 79. Für lothrechte, der Bildebene parallele Ebenen, sowie für die Bildebene endlich selbst ist die Perspective ihrer gemeinsamen Grenzlinie als in unendlicher Entfernung zugleich oberhalb, unterhalb, rechts und links vom Hauptpunkte P gelegen zu denken. Selbstverständlich sind die Grundlinien dieser Ebenen als ebenso gelegen aufzufassen. Die Perspective der Grenzlinie dieser Ebenen kommt nur in Betracht, wo es sich, wie bei der Construction der Perspectiven von Durchschnittslinien verschiedener Ebenen, um den Schnittpunkt der Perspectiven der Grenzlinien dieser verschiedenen Ebenen handelt.

§. 80. Da wegen der unendlichen Entfernung der Perspective dieser Grenzlinie auch alle Perspectiven der Verschwindungspunkte in unendlicher Entfernung liegen, sind die

Digitized by Google

Perſpectiven von in ſolchen Ebenen liegenden parallelen Linien geometriſch parallel, die Perſpectiven in dieſen Ebenen liegender Winkel ſind gleich der geometriſchen Größe derſelben, ſowie überhaupt die Perſpectiven aller Objecte, ſoweit dieſe innerhalb ſolcher Ebenen liegen, geometriſche Verticalprojectionen derſelben ſind.

Das zuletzt Geſagte iſt beſonders für alle Objecte und Stücke von Objecten, welche in der Bildebene ſelbſt liegen, zu merken.

Viertes Kapitel.

Perſpectiven gegebener Strecken auf horizontalen und lothrechten Linien. — Der Theilpunkt.

Das Conſtructionsverfahren hierbei ſtützt ſich §. 81.

für horizontale, der Bildebene parallele, und für lothrechte Linien auf den mathematiſchen Grundſatz, daß die Strecken auf parallelen Linien zwiſchen anderen parallelen Linien, welche jene ſchneiden, einander gleich ſind;

für horizontale, der Bildebene nicht parallele Linien auf die Eigenſchaften des gleichſchenkligen Dreiecks.

Wenn nach §. 61 Linien, welche ſich in einem Punkte des §. 82. Horizontes ſchneiden, als perſpectiviſch parallel anzuſehen ſind, ſo heißt dies mit anderen Worten, daß der Abſtand der einzelnen Linienperſpectiven von einander bis zu der Perſpective ihres gemeinſamen Verſchwindungspunktes überall als perſpectiviſch gleich anzuſehen iſt.

Sind demnach in der Perſpective w z (Fig. 22) einer horizontalen Linie W Z die Perſpectiven w u und u q gewiſſer Strecken W U und U Q gegeben, und es ſollen auf der Perſpective x y einer andern, der W Z parallelen Linie, von einem gegebenen Punkte x derſelben aus, jenen Strecken perſpectiviſch gleiche Strecken abgetheilt werden, ſo hat man von w eine Linie durch x nach dem

Digitized by Google

Horizonte zu ziehen, dieſen im Punkte M zu ſchneiden, und darauf durch Linien, von M nach u und q gezogen, auf der Linie x y die

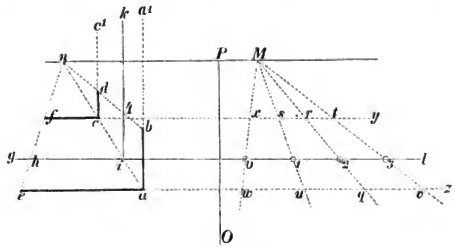

Fig. 22.

Strecken x s und s r abzutheilen. Es ſind dieſe alsdann den Strecken w u und u q perſpectiviſch gleich, weil ſie Strecken der parallelen Linien x y und w z zwiſchen den parallelen Linien w M, u M und q M ſind.

§. 83. Hiernach iſt es leicht, für jeden beliebigen Ort einer horizontalen oder lothrechten Ebene, bis zu ihrer Grenzlinie hin, die ihm entſprechende perſpectiviſche Größe eines gewiſſen Längenmaßes feſtzuſtellen, wenn daſſelbe nur für einen andern Ort derſelben Ebene bekannt iſt.

Iſt z. B. das Fußmaß das in der Conſtruction zu verwendende, ſo hat man die geometriſche Größe deſſelben zunächſt auf der Schnittlinie der Bildebene mit derjenigen Ebene, für deren verſchiedene Orte man die verſchiedene perſpectiviſche Größe deſſelben Maßes ermitteln will — in der Fig. 22 ſei dies z. B. die Grundlinie g l der horizontalen Grundebene — feſtzuſtellen. Zieht man dann, wenn hier die Abſtände der Punkte 0, 1, 2 und 3 von einander als geometriſch je 1 Fuß betragend feſtſtehen, durch dieſe Punkte Linien nach einem beliebigen Punkte M der Perſpective der Grenzlinie der horizontalen Grundebene, d. i. der Horizont, ſo ſchneiden dieſelben, weil ſie perſpectiviſch parallel ſind, auf der Perſpective jeder andern in der Grundebene liegenden und der Grundlinie g l parallelen Linie, alſo z. B. auf der Per-

Digitized by Google

spective x y einer hinter der Bildebene liegenden Linie X Y in den Punkten x, s, r, t, oder auf der Perspective w z einer andern vor der Bildebene liegenden Linie W Z in den Punkten w, u, q, v das den Orten dieser Linien entsprechende Maß von zusammen 3 Fuß ab.

§. 84. Ist ein solcher perspectivischer Längen- (hier Fuß-) Maßstab, wie er in der Figur vorliegt, angefertigt, und es soll auf der Perspective einer durch den Punkt C der Grundebene gehenden, der Grundlinie g l parallelen Linie, und auf der Perspective einer ebensolchen durch Punkt A gehenden je das Maß von 2 Fuß links von den Perspectiven c und a jener Punkte aufgetragen werden, so hat man beide Linienperspectiven nur bis in den Maßstab zu verlängern und hieraus die Länge x r für die Strecke c f, und die Länge w q für die Strecke a e mit dem Zirkel zu entnehmen.

§. 85. War übrigens nur erst die Länge c f ermittelt, so konnte man auch eine Linie von a durch c bis n im Horizonte ziehen, und durch eine andere Linie, von n durch f gezogen, den Punkt e bestimmen. Die beiden Linien a n und e n schneiden dabei auf der Grundlinie das dem Maße 0 2 gleiche Maß i h ab.

§. 86. Soll für irgendeinen Ort einer andern horizontalen Ebene, als die Grundebene, das ihm perspectivisch entsprechende Fußmaß ermittelt werden, so construirt man vermittelst einer von ihm auf die Grundebene gefällten lothrechten Linie in letzterer seine Horizontalprojection, und ist dann das dem Orte dieser Projection zukommende Fußmaß zugleich das jenem Orte zukommende.

§. 87. Wie für alle in der Bildebene selbst liegenden Längen 0 1 das Fußmaß ist, so ist für die Längen in der Perspective einer durch Punkt C stehenden lothrechten, der Bildebene parallelen Ebene : x s, und für diejenigen einer eben solchen durch Punkt A stehenden Ebene : w u das perspectivische Fußmaß. Sollten also die Perspectiven c d und a b von in den Punkten C und A stehenden lothrechten Linien z. B. je 1 Fuß lang gemacht werden, so ist c d gleich x s, und a b gleich w u zu machen; und sollte auf einer durch Punkt b gehenden Perspective einer der Bildebene parallelen Linie das Maß von 2 Fuß aufgetragen werden, so wäre dies w q oder a e.

Digitized by Google

§. 88. Nimmt man jedoch eine lothrecht-schiefe Ebene in Betracht, z. B. die durch die Punkte A und C stehende, so schneidet diese die Bildebene in der Linie i k (Grundlinie der lothrechten Ebene), und ist demnach das Fußmaß auf dieser, i 4, ebenfalls gleich 0 1; für die Strecken aber der Perspective a a' der in dieser Ebene durch Punkt A denkbaren, der Bildebene parallelen, lothrechten Linie ist wieder w u das Fußmaß, für die Strecken der Linienperspective c c' ist es x s.

§. 89. Wie man sieht, ist der für die horizontale Grundebene angefertigte perspectivische Längen-Maßstab auch für alle anderen horizontalen und auch für die lothrechten Ebenen benutzbar, und bedarf es der besondern Anfertigung eines solchen — wie er hier z. B. zufällig in den Maßen a b, i 4, c d für die durch A C gedachte lothrechte Ebene entstanden ist — für andere horizontale Ebenen, als die Grundebene, und für lothrechte Ebenen nicht.

§. 90. Die Perspective des Verschwindungspunktes (in der Figur M) von Linien, welche (wie 0 M, 1 M, 2 M u. s. w.) die perspectivisch gleiche Theilung anderer Linien (hier x y, g l und w z) bewirken, wird der **Theilpunkt** für die letzteren genannt.

§. 91. Da auch Linien, durch die Punkte 0, 1, 2, 3 nach jedem andern beliebigen Punkte des Horizontes gezogen, auf den der Bildebene parallelen Linienx y und w z dieselben Längen, wie x s, x r, x t und w u, w q, w v, abtheilen würden, wie dies hier die nach M gezogenen Linien 0 M, 1 M, 2 M und 3 M thun, so kann als Regel aufgestellt werden: daß für die Perspectiven horizontaler, der Bildebene paralleler Linien jeder Punkt des Horizontes als Theilpunkt benutzt werden kann.

§. 92. Für das Verfahren bei der Construction der Perspectiven gegebener Strecken auf den Perspectiven von horizontalen Linien, welche der Bildebene **nicht** parallel sind, ist vorher zu bemerken, daß die auf einer solchen Linie perspectivisch abzutheilende Strecke zuvor stets für die Perspective einer mit jener Linie in derselben Ebene und zugleich in der Bildebene liegenden, oder doch dieser parallelen Linie (welche in der Folge der Kürze wegen die Maß-

Digitized by Google

linie heißen möge) nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen ermittelt, auf dieser aufgetragen, und von ihr auf die zu theilende Linienperspective perspectivisch übertragen wird. Indem man hierbei die letztere als die eine, und die Maßlinie als die andere der beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks auffaßt, vollzieht man die der Maßlinie perspectivisch gleiche Theilung jener Linie durch Construction der Perspective der **Grundlinie** des den beiden Linien entsprechenden gleichschenkligen Dreiecks.

Um letztere Perspective ziehen zu können, bedarf es der vorherigen Ermittelung der im Horizonte gelegenen Perspective ihres Verschwindungspunktes, welche der **Theilpunkt der zu theilenden Linie** und zugleich aller ihr parallelen Linien ist.

Dieser Punkt ist überall leicht zu construiren, wenn man die §. 93.
in allen Fällen gleichen Beziehungen der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks der vorliegenden Art zu dessen anderen Seiten und zu der Bild- und Verticalebene zunächst an einer geometrischen Figur (Fig. 23) in Betracht nimmt.

Ist hier nämlich W V die geometrische Projection einer horizontalen, von der wie H X gerichteten Bildebene beispielsweise um 80°, von der wie A Q gerichteten Verticalebene demnach um 10° abweichenden Linie, auf welcher von ihrem Punkte A aus ein gewisses Maß (A E) abgetheilt worden ist, wie es in der Strecke A C (Maßlinie) der Linie H X vorliegt, und man zieht C E, so bildet diese, die gleiche Theilung

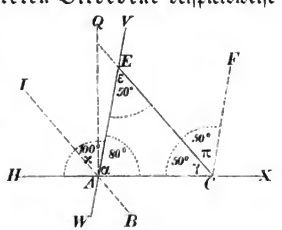

Fig. 23.

A E und A C jener beiden Linien gewissermaßen vollziehende Linie die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks C A E, in welchem, da der Winkel α an der Spitze 80° beträgt, die an der Grundlinie liegenden und deshalb einander gleichen Winkel γ und ε zusammen 100°, jeder einzelne 50° betragen.

Digitized by Google

Ueber die Richtung der Grundlinie in Bezug auf die gegebenen Stücke ist nun zunächst Folgendes zu bemerken:

Legt man durch Punkt C eine der W V parallele Linie C F, so ist der Winkel π, welchen sie mit der C E bildet, als Wechselwinkel des Winkels ε diesem und daher auch dem Winkel γ gleich, und beträgt demnach ebenfalls 50°. Es kann deshalb die Linie C E als Halbirungslinie des ganzen Winkels A C F angesehen werden. Da aber dieser Winkel als Gegenwinkel gleich und gleichliegend ist dem Winkel $\varkappa$, welcher der Supplementwinkel (Supplementwinkel ist der Winkel, welcher einen andern Winkel zu 180° ergänzt) des Winkels α ist, so hat die Grundlinie CE die Richtung einer Linie (wie B I), durch welche der Supplementwinkel des Winkels halbirt wird, welchen die zu theilende Linie mit der Bildebene, oder der Maßlinie bildet.

Hiernach ist die Perspective des Verschwindungspunktes der gleichtheilenden Linie C E, der Theilpunkt für die Linie W Z, leicht zu construiren.

§. 94. Ist z. B. w v die Perspective (Fig. 24) jener von der Bildebene um 80° abweichenden Linie W V, ist a die Perspective jenes

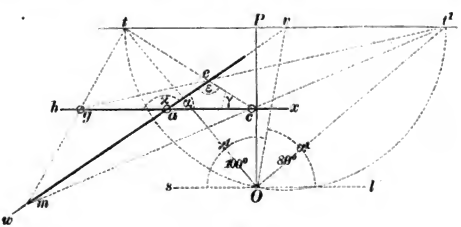

Fig. 24.

Punktes A, und soll auf w v von a aus das auf der Perspective h x der der Bildebene parallelen Linie H X gegebene Maß a c perspectivisch übertragen werden, so findet man die Perspective t des Verschwindungspunktes der die perspectivische Gleichtheilung ausführenden Grundlinie c e folgendermaßen:

Zieht man durch O eine der Bildebene parallele Linie s l, legt

an diese in O den Winkel α^1 von 80° an, so ist sein Schenkel O v zunächst der Parallelstrahl der Linie w v selbst. Halbirt man darauf den 100° betragenden Supplementwinkel $\varkappa^1$ des Winkels α^1 durch die Halbirungslinie O t, so ist diese der Parallelstrahl für die Perspective c e jener Grundlinie C E, und sein Schnittpunkt t mit dem Horizonte die Perspective des Verschwindungspunktes derselben und also der Theilpunkt für die Linie w v und alle ihr parallelen Linien. Schneidet man demnach die Linie w v durch eine von c nach t gezogene Linie in e, so ist a e perspectivisch gleich a c gemacht, d. h. es ist der Aufgabe gemäß das gegebene Maß a c auf die Linie w v perspectivisch in a e übertragen worden. Denn da h x parallel ist s l, und w v parallel O v, so beträgt in dem entstandenen Dreieck a e c der Winkel $\alpha = 80°$ wie der Winkel α^1; da ferner h x parallel ist s l, und c t parallel O t, so beträgt Winkel $\gamma = 50°$ wie die Hälfte s O t des ganzen 100° betragenden Winkels $\varkappa^1$; Winkel ε endlich muß, da alle Winkel in einem Dreiecke zusammen 180° betragen, 50° betragen und daher dem Winkel γ (perspectivisch) gleich sein. Es muß demnach das Dreieck a e c, da es zwei gleiche Winkel γ und ε hat, ein gleichschenkliges sein, und zwar müssen seinen gleichen Winkeln die (perspectivisch) gleichen Seiten a e und a c gegenüberliegen.

Den Theilpunkt pflegt man mit dem Buchstaben t zu bezeich- §. 95.
nen. Werden in der Construction mehrere Theilpunkte für verschiedene Linienſysteme gebraucht, so fügt man dem t noch den Buchstaben der Perspective des Verschwindungspunktes der Linien hinzu, für welche t Theilpunkt ist. In der Figur würde der Theilpunkt demnach mit t_v zu bezeichnen sein.

Wäre in derselben Figur das auf die Linie w v perspectivisch §. 96.
zu übertragende Maß a c auf der Linie h x links von a in a g gegeben worden, so würde ein anderer Theilpunkt, der jedoch wie t zu construiren ist, anzuwenden sein. Zu dem Winkel $\varkappa$ an der Spitze des dabei entstehenden Dreiecks g e a wäre nämlich der Winkel α der Supplementwinkel. Die Halbirungslinie dieses Winkels α hat zum Verschwindungspunkt den Punkt t^1, welchen man findet, wenn man den Winkel α^1, bei O, durch den Parallelstrahl O t^1 halbirt.

Digitized by Google

Zieht man also vom Punkte g nach dem zweiten Theilpunkte t^1, so schneidet man die Linie w v ebenfalls im Punkte e, und a e ist dann perspectivisch gleich a g und a c.

§. 97. Soll das auf der Linie h x gegebene Maß a c oder a g auf die Linie w v vor dem Punkte a übertragen werden, so hat man von t durch g, oder von t^1 durch c zu ziehen. In beiden Fällen wird die Linie w v im Punkte m geschnitten, und a m ist dann perspectivisch gleich a c und a g.

§. 98. Es leuchtet ein, daß, wenn die Perspective des Verschwindungspunktes einer Linie weit ab vom Hauptpunkte P fällt, von den beiden Theilpunkten der Linie der eine P näher, der andere desto entfernter davon fällt; da man jedoch überhaupt nur Eines Theilpunktes für ein Linienſyſtem bedarf, indem man ja das gegebene Maß auf der Maßlinie nach Belieben links oder rechts von der zu theilenden Linie auftragen kann, so wendet man immer nur den dem Hauptpunkte P nächſten Theilpunkt, also denjenigen an, welcher auf der dem Verſchwindungspunkte der Linie, welche getheilt werden soll, entgegengeſetzten Seite der Verticale liegt.

§. 99. Fällt aber die Perſpective des Verſchwindungspunktes der zu theilenden Linie in den Hauptpunkt P, wie dies bei horizontalen, zur Bildebene normalen Linien der Fall iſt, ſo liegen die beiden Theilpunkte gleich weit von P, ſie fallen mit den Diſtanzpunkten D und D^1 zuſammen, und man bedient ſich nach Bequemlichkeit beider. Da nämlich der Supplementwinkel einer horizontalen, zur Bildebene normalen Linie ſelbſtverſtändlich 90° beträgt, ſo muß der Parallelſtrahl zu der Halbirungslinie dieſes Winkels, aus dem Geſichtspunkte nach dem Horizonte gezogen, mit der Standebene, ſowie mit der Verticalebene den Winkel von 45° bilden und den Horizont in einem der Diſtanzpunkte treffen.

§. 100. Von der den letzten Paragraphen nach aufzuſtellenden Regel, daß man den günſtigſtgelegenen Theilpunkt für eine horizontale Linie in dem Punkte findet, in welchem die Halbirungslinie des Supplementwinkels des Winkels, welchen die zu theilende Linie mit der Bildebene bildet, den

Digitized by Google

Horizont schneidet, gelangt man zu einer einfacheren Regel, wenn man die Eigenschaften des Dreiecks O v t der Fig. 24 ins Auge faßt.

In dem Dreieck O v t ist nämlich der Winkel bei v als Wechselwinkel des Winkels α^1 gleich 80°; der Winkel bei O als halber Winkel $\varkappa^1$ gleich 50°; der Winkel bei t als Wechselwinkel des die andere Hälfte des Winkels $\varkappa^1$ ausmachenden Winkels s O t ebenfalls gleich 50°. Die Winkel bei t und bei O sind also gleich, und sind deshalb die diesen Winkeln gegenüberliegenden Dreiecksseiten v t und v O ebenfalls gleich. Man hätte daher den Punkt t einfacher finden können, wenn man die Länge v O des Parallelstrahles der zu theilenden Linie w v um v in den Horizont geometrisch in v t übertragen hätte. §. 101.

Es ist hier wieder der Theilpunkt t die Perspective des Verschwindungspunktes der Grundlinie O t eines gleichschenkligen Dreiecks O v t, in welchem die eine gleiche Seite t v parallel der Bildebene, wie die Maßlinie a c, die andere, O v, wie die zu theilende Linie a e gerichtet, nämlich ihr parallel, ist.

Der zweite Theilpunkt für die in v verschwindenden Linien würde gleichfalls durch Uebertragung der Länge v O um v nach der andern Seite in t^1 zu finden sein.

Bei der Construction der Theilpunkte für horizontale, zur Bildebene normale Linien ist das Zutreffende dieses Verfahrens besonders ersichtlich. Da zu diesen Linien O P der Parallelstrahl, P die Perspective des Verschwindungspunktes ist, so fallen bei der Uebertragung der Länge P O um P die Theilpunkte, übereinstimmend mit dem in §. 99 Gesagten, mit den Distanzpunkten D und D^1 zusammen. Es ist hiernach als eine einfachere Regel für die Construction der Theilpunkte der Satz aufzustellen, daß man die Theilpunkte für eine horizontale Linie findet, wenn man die Länge ihres Parallelstrahles um die Perspective ihres Verschwindungspunktes zu beiden Seiten der letztern in den Horizont überträgt..

Ist das auf die Perspective einer horizontalen Linie zu übertragende Maß auf der Perspective einer lothrechten Linie §. 102.

Digitized by Google

gegeben, so pflegt man dasselbe zuvor auf eine horizontale, der Bildebene parallele Linie umzulegen, und von hier auf die zu theilende Linie zu übertragen. Man kann jedoch auch, wenn man die lothrechte Maßlinie und die zu theilende Linie als Einer lothrechten Ebene angehörig ansieht, einen dieser Ebene entsprechenden und nach §. 101 zu construirenden dritten und vierten Theilpunkt in Anwendung bringen.

Ist z. B. in Fig. 25 wieder die Perspective w v einer um 80° von der Bildebene abweichenden horizontalen Linie W V gegeben, auf welche von ihrem Punkte a aus nach beiden Seiten desselben das auf der Perspective h x einer lothrechten Linie H X gegebene Maß a g (oder a c) perspectivisch aufgetragen werden soll, so hat man durch v die Perspective t^2 t^3 der Grenzlinie der durch die Linie W V denkbaren lothrechten Ebene zu ziehen, und die Länge des Parallelstrahles v O um v oberhalb und unterhalb dieses Punktes auf diese Perspective der Grenzlinie in t^2 und t^3 zu übertragen, welche Punkte alsdann ebenfalls Theilpunkte für die Linie w v sind. Zieht man nämlich von t^2 durch g und durch c, und von t^3 durch dieselben Punkte, so schneidet man in beiden Fällen die w v in den Punkten m und e, und die Strecken a m und a e sind dem Maße a g (oder a c) perspectivisch gleich gemacht. (S. §. 286.)

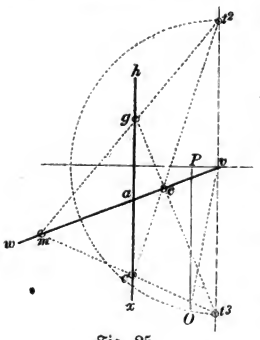

Fig. 25.

§. 103. Dem entsprechend ist auch, wenn ein auf der Perspective einer lothrechten Linie gegebenes Maß auf die in P verschwindende Perspective einer horizontalen, zur Bildebene normalen Linie übertragen werden soll, der unterhalb des Horizontes oder der oberhalb desselben herabgeschlagene Gesichtspunkt, O oder O^1, als Theilpunkt zu benutzen.

§. 104. Ist das auf die Perspective einer horizontalen Linie zu übertragende Maß selbst auf der jene schneidenden Perspective

einer horizontalen, der Bildebene **nicht** parallelen Linie gegeben, so kann man

entweder gemäß §. 100 vermittelst der Halbirungslinie des Supplementwinkels des Winkels, welchen die beiden Linien mit einander bilden, einen Theilpunkt für jene Linie finden, wobei dieser selbstverständlich nicht mit dem Theilpunkte zusammenfallen kann, welcher sich ergeben würde, wenn das Maß auf einer der Bildebene parallelen Linie gegeben wäre,

oder man sucht die Perspective des Verschwindungspunktes und den Theilpunkt der gegebenen, der Bildebene nicht parallelen Maßlinie, führt vermittelst des letztern das gegebene Maß auf die Perspective einer horizontalen, der Bildebene parallelen Linie zurück, und überträgt dasselbe dann mit Hülfe des Theilpunktes der zu theilenden Linie auf diese.

Liegen die Perspectiven a Y und a Z (s. Fig. 26) zweier horizontalen, zu einander normalen und mit der Bildebene §. 105.

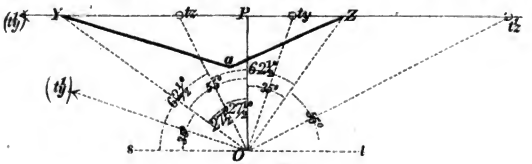

Fig. 26.

beispielsweise die Winkel von 35° und 55° bildenden Linien A Y und A Z, zu denen demnach O Y und O Z die Parallelstrahlen sind, vor, und man faßt die Lage ihrer Theilpunkte in Bezug auf die Verticale und auf die Parallelstrahlen ins Auge, so kann man hieraus eine neue, für die Construction der Theilpunkte besonders in dem Falle wichtige Regel ableiten, daß die Perspective des Verschwindungspunktes einer der Linien weit außerhalb der Grenzen der Construction liegt.

Es halbiren nämlich die Halbirungslinien O t_z und O t_y der Supplementwinkel Z O s und Y O l zugleich die Winkel Y O P und Z O P, welche die Parallelstrahlen der gegebenen Linien mit der Verticale bilden. Daß dies der Fall ist, ergiebt Folgendes:

Da der Parallelstrahl O Z der Annahme gemäß mit der Bild-

Digitized by Google

ebene den Winkel Z O 1 von 55° bildet, so beträgt zunächst der Winkel Z O P, welchen er mit der Verticalebene bildet, 35°; sein Supplementwinkel Z Os aber 180°—55°, d. i. 125°, und dessen durch die Halbirungslinie O t_z getheilte Hälften (die Winkel Z O t_z und t_z O s) jede 62½°. Wenn nun Winkel Y O Z der Annahme gemäß ein rechter Winkel ist, also 90° beträgt, Winkel t_z O Z aber, wie eben berechnet, 62½° beträgt, so beträgt Winkel Y O t_z = 90° — 62½°, d. i. 27½°. Wenn ferner Winkel t_z O Z = 62½° beträgt, Winkel P O Z aber der Annahme gemäß 35°, so beträgt Winkel t_z O P = 62½° — 35°, d. i. 27½°. Es ist demnach Winkel Y O t_z gleich dem Winkel t_z O P, d. h. mit anderen Worten: die Linie O t_z halbirt den Winkel Y O P, welcher der Complementwinkel des Winkels Z O P ist. Dasselbe ist auf gleiche Art von der Linie O t_y für den Winkel Z O P nachzuweisen.

Den zweiten Theilpunkt t_y^1 für die in Y verschwindenden Linien, welcher links von Y liegt, und den zweiten Theilpunkt t_z^1 für die in Z verschwindenden Linien, welcher rechts von Z liegt, würde man durch Halbirungslinien der Winkel Y O s und Z O 1 finden, wofür der Beweis dem vorigen ähnlich ist.

Es kann hiernach aufgestellt werden als Regel:

1) Einen Theilpunkt für jede einzelne von zwei horizontalen, zu einander normalen Linien findet man in dem Punkte, in welchem die Halbirungslinie des Winkels, welchen der Parallelstrahl der andern Linie mit der Verticalebene bildet, den Horizont schneidet.

2) Den zweiten, entfernter liegenden Theilpunkt jeder dieser Linien findet man in dem Punkte, in welchem die Halbirungslinie des Winkels, welchen ihr eigener Parallelstrahl mit der Bild- oder Standebene bildet, den Horizont schneidet.

Die erste Regel allgemeiner ausgedrückt, würde lauten:

3) Die Theilpunkte einer horizontalen Linie findet man in den Punkten, in welchen die Halbirungslinien der Complementwinkel des Winkels, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, den Horizont schneiden.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Hülfsconſtructionen.

Nicht immer trifft es zu, daß die zur Conſtruction der Rich- §. 106.
tungen und der Strecken der Linienperſpectiven erforderlichen Punkte, wie z. B. die Perſpective des Verſchwindungspunktes, die Theilpunkte, ja ſelbſt auch der herabgeſchlagene Geſichtspunkt, alle in ſolcher Nähe liegen, daß ſie noch innerhalb der Grenzen der Conſtructionsfläche bezeichnet werden können, und bedarf es deshalb einer Anleitung für das Verhalten in den verſchiedenen hierbei auftretenden Fällen.

Zum beſſern Verſtändniß des ſpäter Folgenden iſt es dienlich, zuerſt den Fall anzunehmen, daß

A. die Diſtanzpunkte außerhalb der Conſtructionsfläche liegen.

Soll auf die in P verſchwindende Perſpective wP (Fig. 27) §. 107.
einer zur Bildebene normalen Linie WP von ihrem Punkte a aus

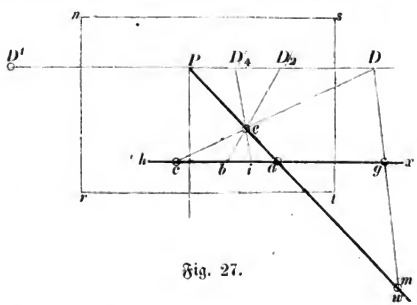

Fig. 27.

nach beiden Seiten deſſelben das auf der Linie hx gegebene Maß ac, welches gleich ag iſt, perſpectiviſch übertragen werden, ſo ſind nach §. 99 die Diſtanzpunkte D und D¹ zugleich Theilpunkte für die Linie wP. Es wäre demnach von D¹ oder, weil D näher liegt, von dieſem Punkte eine Linie nach c und eine andere durch g zu ziehen,

Digitized by Google

die Linie w P dadurch in e und m zu schneiden, wonach der Aufgabe gemäß a e und a m perspectivisch gleich a c oder a g gemacht wären.

Wäre nun aber die Bild- oder Constructionsfläche nur so groß, wie dies das Rechteck n s t r bezeichnet, so daß die Punkte D und D^1 darauf nicht mehr markirt werden könnten, so führt zu einem Auskunftsmittel folgende Betrachtung:

Die Dreiecke a e c und P e D sind ähnliche, weil ihre Seiten parallel sind. Es verhält sich deshalb a c (das Maß) zu a e, wie P D (die Distanz) zu P e, und muß sich daher auch das halbe Maß a b oder das viertel Maß a i zu a e verhalten, wie die halbe Distanz $PD/_2$ oder die viertel Distanz $PD/_4$ zu P e. Ist also a b die Hälfte, und a i ein Viertel des Maßes a c, und $PD/_2$ die Hälfte, und $PD/_4$ ein Viertel der Distanz P D, und man verbindet b mit $D/_2$, und i mit $D/_4$ durch gerade Linien, so müssen diese auf der Linie w P dasselbe Maß a e abtheilen, welches durch Anwendung des ganzen Maßes und der ganzen Distanz erzielt wird. Dasselbe wird erreicht, wenn man $1/_3$, $1/_5$, $1/_6$ oder sonst einen Bruchtheil des Maßes nebst dem entsprechenden Bruchtheile der Distanz in Anwendung bringt.

Man kann hiernach, wenn die Distanzpunkte nicht innerhalb der Constructionsfläche liegen, als Theilpunkt für die zur Bildebene normalen Linien einen Punkt des Horizontes benutzen, welcher in der Entfernung der halben, drittel, viertel, fünftel u. s. f. Distanz von P liegt, sobald man auch das gegebene Maß zu demselben Bruchtheile zurückführt.

Ist das Maß auf einer lothrechten Linie gegeben, so ist behufs der Theilung einer zur Bildebene normalen Linie ebenfalls sowohl das Maß, als die Entfernung des nach oben oder unten herabgeschlagenen Gesichtspunktes von P, auf einen gleichnamigen Bruchtheil zurückzuführen.

Digitized by Google

B. Der herabgeschlagene Gesichtspunkt liegt außerhalb der Constructionsfläche.

1) Die Perspective des Verschwindungspunktes einer um einen gegebenen Winkel von der Bildebene abweichenden horizontalen Linie ist auf folgende verschiedene Arten zu finden:

a) Durch Berechnung, wie dies in §. 59 gezeigt ist. §. 108.

b) Durch Construction der Perspective einer Tangente des gegebenen Abweichungswinkels der Linie. §. 109. Soll z. B. die Perspective v des Verschwindungspunktes der etwa um 60° von der Bildebene abweichenden horizontalen Linien construirt werden, so stellt man zunächst den Winkel von 60° geometrisch in R A W (Fig. 28) dar, und zieht an einer beliebigen Stelle die (zu einem der Schenkel normale) Tangente B C; man denkt sich ferner dieses Dreieck als in einer horizontalen Ebene liegend und stellt seine Perspective demgemäß dar, indem man zuvörderst Seite A B in die Bildebene an eine beliebige Stelle, etwa in a b geometrisch versetzt. Die Perspective der Seite B C, als einer zu A B und also auch zur Bildebene normalen Linie, muß dann die Richtung b P haben. Um b c perspectivisch gleich B C zu machen, trägt man die Länge B C auf b a von b aus in b g geometrisch auf, und schneidet, von g nach dem Distanzpunkte D^1 ziehend, die Linie b P in c. Zieht man nun noch a c, so ist das Dreieck a b c die Perspective des Dreiecks A B C, sein Winkel bei a die Perspective des Winkels bei A, also 60° perspectivisch betragend, und der Schnittpunkt v der verlängerten Seite a c mit dem Horizonte die gesuchte Perspective des Verschwindungspunktes.

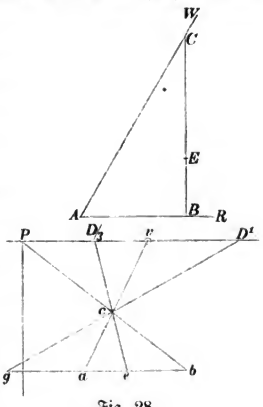

Fig. 28.

Digitized by Google

§. 110. Liegt hierbei auch der Distanzpunkt D^1 außerhalb der Constructionsfläche, so bedient man sich, um b c perspectivisch gleich B C zu machen, nach §. 107 nur eines Bruchtheiles, etwa $1/3$, von B C, also des Maßes B E, dazu aber auch des gleichnamigen Bruchtheiles der Distanz P D^1, also des Punktes $D/3$ als Theilpunkt; überträgt demnach das Maß B E auf die Linie b a von b aus geometrisch in b e und schneidet, von e nach $D/3$ ziehend, die Linie b P wie oben im Punkte c, wonach eine von a durch c gezogene Linie den Horizont gleichfalls im Punkte v schneidet.

§. 111. c) Um dieselbe Aufgabe zu lösen, hätte man nach §. 56 an die Verticale in O (Fig. 29) den Winkel von 30° anzutragen, und mit seinem Schenkel O v den Horizont in v, der gesuchten Perspective des Verschwindungspunktes, zu schneiden. Da nun aber O, der Annahme gemäß, außerhalb der durch das Rechteck n s t r begrenzten Constructionsfläche liegt, so kann man den Punkt v auch dadurch construiren, daß man auf die Verticale ober- oder unterhalb des Horizontes von P aus nur einen Bruchtheil, etwa $1/3$, der Distanz P O in P $O/3$ aufträgt, an die Verticale in $O/3$ den gegebenen Winkel von 30° anträgt, mit seinem Schenkel $O/3$ $v/3$ den Horizont in $v/3$ schneidet, und die Länge P $v/3$ verdreifacht von P aus auf den Horizont aufträgt. Da nämlich die Dreiecke P O v und P $O/3$ $v/3$ wegen Parallelität ihrer Seiten ähnliche, und deshalb die Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern proportional sind, so verhält sich P v zu P $v/3$ wie P O zu P $O/3$, d. h. P v ist dreimal so groß wie P $v/3$.

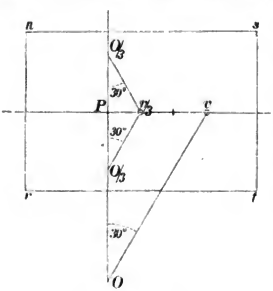

Fig. 29.

§. 112. d) Kann gerade noch die Hälfte P $O/2$ (Fig. 30) der Distanz des herabgeschlagenen Gesichtspunktes von P innerhalb der Constructionsfläche n s t r, etwa in $O/2$, bezeichnet werden, so findet man die Perspective v des Verschwindungspunktes auch folgendermaßen:

Digitized by Google

Man trägt an die Verticale in P den 30° betragenden Abweichungswinkel π der gegebenen Linie von der Verticalebene an, schneidet mit seinem Schenkel P a eine durch $O/_2$ der Grundlinie der Bildebene parallel gezogene Linie in a, trägt an die Linie P a in a einen Winkel α an, welcher zweimal so groß wie jener Abweichungswinkel von der Verticale, also 60° groß ist, und schneidet mit seinem Schenkel a v den Horizont in v.

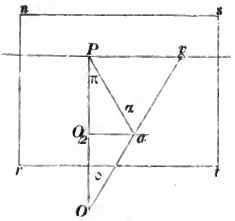

Fig. 30.

Trägt man nämlich, wenn man die ganze Distanz P O hinsetzt, nach §. 56 an die Verticale in O den Abweichungswinkel der gegebenen Linie von der Verticalebene, um den Punkt v zu erzielen, an, so fällt dessen Schenkel O v theilweise mit dem Schenkel a v zusammen und ist alsdann der Winkel α der Außenwinkel des so entstandenen gleichschenkligen Dreiecks P O a, darum gleich der Summe der beiden Winkel π und o, und, weil diese einander gleich sind, doppelt so groß wie jeder einzelne.

Wollte man bei diesem Verfahren statt der hier benutzten Hälfte P $O/_2$ der Distanz einen andern Bruchtheil derselben anwenden, so würden a v und O v nicht in eine gerade Linie zusammenfallen, das Dreieck P O a würde kein gleichschenkliges, und die Größe des Winkels α nicht so einfach zu bestimmen sein.

2) Der nächstgelegene Theilpunkt einer horizontalen Linie ist auf folgende Arten zu finden:

a) Durch Berechnung, analog §. 59. Handelt es sich z. B. um den Theilpunkt für die Perspective a b (Fig. 31) einer um 50° von der Verticalebene abweichenden, also in Z verschwindenden Linie, so schneidet nach der in §. 105 gegebenen dritten Regel die Halbirungslinie O t des Winkels Y O P, welcher der

§. 113.

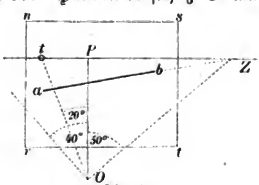

Fig. 31.

Digitized by Google

Complementwinkel des Abweichungswinkels Z O P von der Verticale ist, den Horizont in dem Theilpunkte. Wenn nun Winkel Z O P = 50° beträgt, so ist sein Complementwinkel Y O P = 40°, und dessen Hälfte, der Winkel t O P, 20° groß. Die Tangente dieses Winkels beträgt den trigonometrischen Tabellen nach 0,364. Betrüge nun die Distanz P O z. B. 20 Fuß, so wäre die Länge P t gleich 20 Fuß mal 0,364, d. i. 7,28 Fuß, welches Maß aus dem Maßstabe auf der Grundlinie entnommen werden kann.

§. 114. b) Ist Z (Fig. 32) die Perspective des Verschwindungspunktes einer um 50° von der Verticalebene abweichenden Linie a b, deren nächstgelegener Theilpunkt gesucht werden soll, so müßte, wenn der herab-

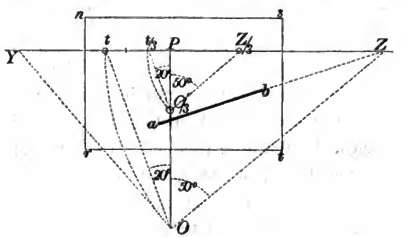

Fig. 32.

geschlagene Gesichtspunkt O nicht der Annahme gemäß außerhalb der Constructionsfläche n s t r läge, nach §. 101 die Länge des Parallelstrahles O Z um Z in den Horizont in Z t übertragen werden, wonach t der Theilpunkt wäre. Zu demselben Erfolge gelangt man jedoch auch, wenn man, wie in §. 111, von der Länge P Z einen Bruchtheil, etwa $^1/_3$ in $Z/_3$, und von der Distanz P O den gleichnamigen Bruchtheil in $O/_3$ bezeichnet, die Länge $Z/_3$ $O/_3$ um $Z/_3$ in den Horizont in $Z/_3$ $t/_3$ überträgt, und nun die Länge P $t/_3$ verdreifacht von P aus in P t aufträgt.

Die Dreiecke Z O t und $Z/_3$ $O/_3$ $t/_3$ sind nämlich ähnliche gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel bei t und $t/_3$ einander gleich sind, weshalb auch ihre Grundlinien t O und $t/_3$ $O/_3$ parallel sind. Deswegen, und weil die Stücke P $t/_3$ mit P t, und P $O/_3$ mit P O zusammenfallen, sind auch die Dreiecke t O P und $t/_3$ $O/_3$ P ähnliche,

Digitized by Google

und verhält sich in ihnen P t zu P $t_{/3}$ wie P O zu P $O_{/3}$, d. h. P t ist gleich 3 mal P $t_{/3}$.

c) Was in §. 113 durch Berechnung erzielt ist, kann auch durch Construction erreicht werden, wenn man bei derselben Aufgabe einen Bruchtheil der Distanz P O (Fig. 32), etwa $^1/_3$, in $O_{/3}$ bezeichnet, an die Verticale in diesem Punkte die Hälfte des 40° betragenden Complementwinkels des 50° großen Abweichungswinkels P O Z der gegebenen Linie a b von der Verticalebene, also den Winkel von 20° anlegt, mit dessen Schenkel $O_{/3}$ $t_{/3}$ den Horizont in $t_{/3}$ schneidet, und hierauf die Länge P $t_{/3}$ verdreifacht von P aus auf den Horizont in P t aufträgt, wonach t der Theilpunkt der Linie a b ist. Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens ist dem vorigen ähnlich. §. 115.

d) Kann gerade noch die Hälfte der Distanz innerhalb des Constructionsraumes, etwa in $O_{/2}$ (Fig. 33), bezeichnet werden, so legt man, um dieselbe Aufgabe zu lösen, analog §. 112, durch $O_{/2}$ eine der Grundlinie parallele Linie $O_{/2}$ g, darauf an die Verticale in P die Hälfte des 40° großen Complementwinkels des Abweichungswinkels der gegebenen Linie a b, also den Winkel π von 20° an, schneidet dadurch die $O_{/2}$ g in c, legt an P c in c einen Winkel τ an, welcher doppelt so groß als Winkel π, also 40° groß ist, und schneidet dadurch den Horizont in dem gesuchten Theilpunkte t. §. 116.

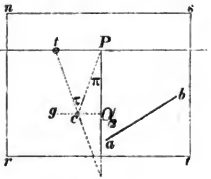

Fig. 33.

e) Ist die Perspective a b (Fig. 34) einer Linie A B gegeben, so construirt man an jener die Perspective eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen eine gleiche Seite mit der a b zusammenfällt und dessen andere gleiche Seite eine der Grundlinie der Bildebene parallele Linie ist; es ergiebt dann nach §. 92 der Schnittpunkt der verlängerten Grund- §. 117.

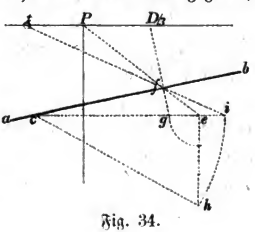

Fig. 34.

Digitized by Google

linie dieſes Dreicks mit dem Horizonte den Theilpunkt der Linie a b.

Man legt zu dieſem Zwecke durch irgendeinen Punkt c der Linie a b eine der Grundlinie der Bildebene parallele, beliebig lange Linie c e, ſchneidet von P nach e ziehend die a b im Punkte f, und zieht von der auf einen beliebigen Bruchtheil, etwa $1/3$, zurückgeführten Diſtanz $D/3$ durch f bis g. Es iſt alsdann nach §. 107 die Länge e g geometriſch $1/3$ der Perſpective e f, ſo daß, wenn man auf der Linie c e in e eine normale Linie e h errichtet, welche geometriſch gleich 3 mal e g iſt, e h die geometriſche Länge der Perſpective e f, der Winkel e c h geometriſch den Winkel e c f, und das Dreieck c e h geometriſch das perſpectiviſche Dreieck c e f darſtellt; wonach denn auch c f als perſpectiviſch gleich c h anzuſehen iſt. Macht man nun die über e verlängerte c i geometriſch gleich c h, ſo iſt c f auch perſpectiviſch gleich c i, und zieht man i f, ſo iſt dieſe die Grundlinie der Perſpective i c f eines gleichſchenkligen Dreiecks, und ihre Verlängerung über f muß den Horizont in dem Theilpunkte t der Linie a b ſchneiden.

C. Die Perſpective des Verſchwindungspunktes liegt außerhalb der Conſtructionsfläche.

1) Soll durch die Perſpective eines Punktes die Perſpective einer horizontalen, um einen gegebenen Winkel von der Bildebene abweichenden Linie conſtruirt werden, ſo kann dies auf folgende Arten geſchehen:

§. 118. a) Man verfährt wie in §. 109, indem man zunächſt den gegebenen, beiſpielsweiſe 30° betragenden Abweichungswinkel der Linie von der Bildebene geometriſch in R A W (Fig. 35) darſtellt, eine (zum Schenkel A R normale) Tangente (Ordinate) B C zieht, dann durch a, wenn dies die Perſpective des gegebenen Punktes iſt, eine der Grundlinie der Bildebene parallele Linie a r legt, auf derſelben die Länge a b geometriſch gleich (der Abſciſſe) A B aufträgt, und nun durch Punkt b die Perſpective b c der Tangente (Ordinate) B C conſtruirt. Da letztere normal zu A B iſt, ſo muß auch ihre Perſpective nor-

Digitized by Google

mal zu a b sein, d. h. die Richtung b P haben. Da ferner nicht die ganze Distanz, sondern etwa nur $^1/_4$ derselben in $D/_4$ bezeichnet werden kann, so ist auch nur $^1/_4$ von B C, d. i. B E, auf der Linie a r von b aus rechts in b e aufzutragen, und danach die Linie b P durch eine von e nach $D/_4$ gezogene Linie in c zu schneiden. Es ist alsdann b c perspectivisch gleich B C, und eine von a durch c gezogene Linie a w bildet mit der a r, oder der Bildebene, perspectivisch denselben Winkel, welchen die Linie A W geometrisch mit der A R bildet.

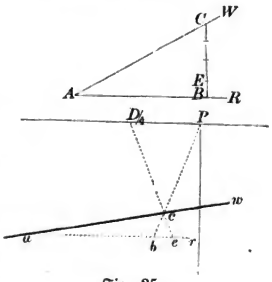

Fig. 35.

§. 119. Auch kann man hierbei statt eines Distanzpunktes oder eines Bruchtheiles der im Horizonte bezeichneten Distanz den in die Verticale herabgeschlagenen Gesichtspunkt selbst, oder einen Bruchtheil seines Abstandes von P, anwenden. Ist in Fig. 36 W a r geometrisch der Winkel von 30°, um welchen die durch a zu construirende Linie von der Bildebene oder, was dasselbe ist, von der Linie a r abweichen soll, so zieht man in diesem Winkel eine beliebige, der Verticale parallele Ordinate C b, halbirt diese in $C/_2$ — wenn man sich auch der halben Distanz $O/_2$ auf der Verticale bedienen kann —, zieht die Linie b P, und schneidet diese durch eine andere, von $C/_2$ nach $O/_2$ gezogene, in c, wonach b c die Perspective der Ordinate b C ist. Eine Linie, von a durch c gezogen, weicht dann perspectivisch um 30° von a r ab, und a c ist zugleich perspectivisch gleich lang a C.

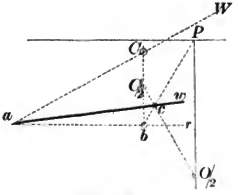

Fig. 36.

§. 120. b) Man faßt statt des Abweichungswinkels der gegebenen Linie von der Bildebene den Winkel ins Auge, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, und construirt die Perspective desselben vermittelst seiner Tangente folgendermaßen:

Digitized by Google

Soll z. B. die Perspective einer um den Winkel von 30° von der Bildebene, d. h. also um 60° von der Verticalebene abweichenden horizontalen Linie construirt werden, so trägt man — wenn alle Constructionspunkte innerhalb der Constructionsfläche bezeichnet werden können — nach §. 56 an P O (Fig. 37) in O den gegebenen Winkel P O Y von 60° an und schneidet mit seinem Schenkel O Y den Horizont im Punkte Y, wonach dieser die Perspective des Verschwindungspunktes der verlangten Linie ist; und wäre r die Perspective eines Punktes, durch welche die Perspective einer solchen Linie construirt werden soll, so wäre r Y diese Perspective.

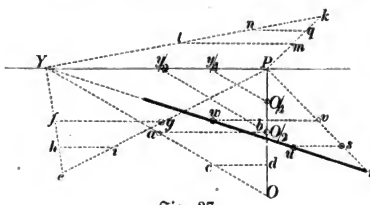

Fig. 37.

Legt man nun in dem so entstandenen Dreieck Y O P durch einen beliebigen Punkt b der Seite O P eine der Seite P Y parallele Linie a b, so sind die Dreiecke Y O P und a O b wegen Parallelität ihrer Seiten einander ähnlich und die Seiten des einen Dreiecks sind den Seiten des andern proportional, so daß, wenn O b die Hälfte von O P ist, auch b a gleich der Hälfte P y/2 von P Y ist. Legt man durch Punkt d, welcher von O um 1/4 der Distanzlänge P O entfernt ist, eine horizontale Linie c d, so ist diese aus denselben Gründen gleich 1/4 von P Y, d. i. P y/4.

Dieselben Beziehungen der Seiten unter einander sind aber auch in jedem andern an der Seite Y P construirbaren Dreiecke, z. B. Y e P und Y k P vorhanden. In ersterem, in welchem e g die Hälfte von e P ist, ist eine durch Punkt g gelegte, der Y P parallele Linie g f auch gleich der Hälfte P y/2 von P Y, und ist in demselben Dreiecke e i gleich einem Viertel von e P, so ist auch i h gleich dem Viertel P y/4 von P Y. So sind auch in dem Dreiecke Y k P, worin k m die Hälfte und k q das Viertel von k P sind, m l gleich der Hälfte P y/2, und q n gleich dem Viertel P y/4 von P Y.

Digitized by Google

Wenn nun die Linien b a, g f und l m jede gleich der Hälfte von P Y sind, so müssen sie unter einander gleich sein; ebenso die Linien d c, i h und q n, weil sie jede gleich dem Viertel von P Y sind.

Hiernach ist es leicht, durch die Perspective r eines Punktes die Perspective einer um den gegebenen Winkel von 60° von der Verticalebene abweichenden Linie ohne Benutzung der Perspective ihres Verschwindungspunktes zu construiren. Man hat nur, dem Vorigen entsprechend, von r nach P eine Linie zu ziehen, auf ihr entweder die Hälfte durch Punkt v zu bezeichnen, durch v eine dem Horizont parallele Linie v w zu legen, ihr die Länge der Hälfte von P Y, d. i. P y_2, zu geben und dann r w zu ziehen; oder man bezeichnet auf der Linie r P ihr Viertel im Punkte s, legt durch diesen eine dem Horizonte parallele und dem Viertel von P Y, d. i. P y_4, gleich lange Linie s u und zieht r u; oder aber, erwiese sich $^1/_4$ von P Y noch als zu groß für den Gebrauch, so theilt man auf r P einen noch kleineren Bruchtheil ab und verwendet dazu den gleichnamigen Bruchtheil von P Y.

Die Hälfte aber, oder das Viertel, oder jeder andere kleinere Bruchtheil von P Y ist vorweg dadurch leicht zu bestimmen, daß man, wie in §. 111, auf der Verticale statt der ganzen Distanz P O nur deren Hälfte P O_2, oder ihr Viertel P O_4, oder den gewählten noch kleineren Bruchtheil bezeichnet, in den Punkten O_2, O_4 u. s. w. den gegebenen Abweichungswinkel von 60° an die Verticale trägt und dadurch den Horizont in y_2 oder y_4 u. s. w. schneidet.

2) Ist die Perspective einer Linie gegeben, und es soll der Winkel, welchen diese mit der Bildebene bildet, dargestellt oder gemessen werden, so wird dies folgendermaßen ausgeführt:

Man verfährt wie in §. 109, nur in umgekehrter Ordnung. §. 121.
Ist z. B. die Perspective w u (Fig. 38) einer Linie W U gegeben, deren Abweichungswinkel von der Bildebene ermittelt werden soll, so legt man durch irgendeinen Punkt a der w u eine der Grund-

Digitized by Google

linie parallele Linie a b, und ſchneidet dieſe ſowie die Linie w u durch irgendeine andere nach P gerichtete Linie c P. In dem ſo

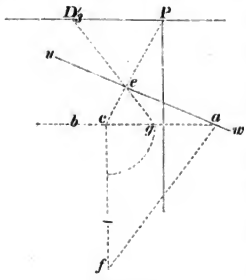

Fig. 38.

entſtandenen Dreiecke e a c iſt dann der Winkel bei a der fragliche. Seine geometriſche Größe ermittelt man, wenn man das ganze Dreieck dadurch geometriſch in c a f darſtellt, daß man von einem der Diſtanzpunkte, oder, wenn dieſe außerhalb der Conſtructionsfläche liegen, von dem Punkte D/3, welcher einen Bruchtheil und zwar ein Drittel der Diſtanz bezeichnet, durch e bis g zieht, das Maß c g dreifach auf eine auf der a b in c errichtete Normale c f von c aus aufträgt, und den dadurch beſtimmten Punkt f durch eine gerade Linie mit a verbindet. In dem Dreiecke c a f liegt alsdann in dem Winkel c a f die geometriſche Größe des Winkels c a e, um welchen die Linie w u von der Bildebene abweicht, vor.

3) Iſt die Perſpective einer horizontalen Linie gegeben, außerdem die Perſpective eines Punktes, durch welche die Perſpective einer mit jener parallelen Linie conſtruirt werden ſoll, ſo kann dies auf folgende verſchiedene Arten ausgeführt werden:

§. 122. a) Man ermittelt nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen den Abweichungswinkel der gegebenen Linie von der Bildebene, und

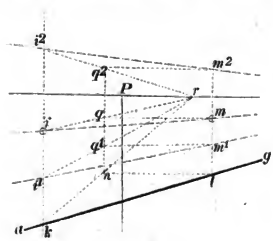

Fig. 39.

conſtruirt alsdann die verlangte Perſpective nach Anleitung der §§. 118—120.

§. 123. b) Man ſchneidet die Linie a g (Fig. 39), wenn dieſe die gegebene Perſpective der Linie iſt, durch eine durch den gegebenen Punkt i gezogene Lothrechte i k, zieht durch einen beliebigen

Digitized by Google

Punkt l der Linie a g eine andere Lothrechte l m, macht diese unter Anwendung des in den §§. 83 und 84 erwähnten perspectivischen Längen-Maßstabes der i k perspectivisch gleich, und zieht dann i m, welche die gesuchte Perspective ist.

Jenen Maßstab kann man auch dadurch ersetzen, daß man von §. 124.
i und k Linien i r und k r nach einem beliebigen Punkte r des Horizontes, und darauf von einem beliebigen Punkte l der a g eine der Grundlinie parallele Linie l n bis zu ihrem Schnittpunkte n mit der Linie k r zieht. Macht man hiernach eine durch l gezogene Lothrechte l m einer durch n gezogenen Lothrechten n q geometrisch gleich, so ist l m sowie n q perspectivisch gleich i k, und eine von i durch m gezogene Linie ist perspectivisch parallel der a g.

Sind mehrere mit Punkt i in Einer lothrechten Linie liegenden §. 125.
Punkte, z. B. i^1 und i^2 gegeben, durch welche gleichfalls der a g perspectivisch parallele Linien construirt werden sollen, so findet man die zweiten Punkte m^1 und m^2 für diese, wie aus der Figur zu ersehen ist, sehr leicht.

c) Man zieht durch den gegebenen Punkt i (Fig. 40) eine der §. 126.
Grundlinie parallele Linie, welche die a g im Punkte k schneidet, und darauf von i und k Linien i r und k r nach einem beliebigen Punkte r des Horizontes. Schneidet man alsdann diese beiden Linien durch eine andere, durch einen beliebigen Punkt l der a g, parallel der Grundlinie gezogene Linie l q in den Punkten q und n, so ist das Maß q n zunächst perspectivisch gleich dem Maße i k, weil i r und k r nach §. 61, 3), perspectivisch parallel sind; und überträgt man das Maß n q auf derselben Linie von l aus geometrisch in l m, so ist auch l m perspectivisch gleich i k, und eine durch i und m gezogene Linie muß perspectivisch parallel der a g sein.

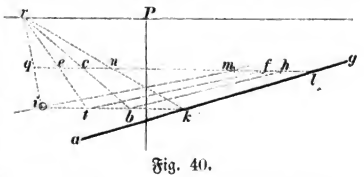

Fig. 40.

Sind mehrere mit dem Punkte i in einer und derselben, der §. 127.
Grundlinie parallelen Linie i k liegenden Punkte, z. B. t und b gegeben,

Digitized by Google

durch welche gleichfalls der a g perspectivisch parallele Linien construirt werden sollen, so zieht man t r und b r, und überträgt die Maße n e und n c geometrisch in l f und l h, wonach t f und b h der a g perspectivisch parallel gezogen werden können.

§. 128. Nimmt man die oben l q genannte Linie vorderhalb des Punktes i durch die Linie a g gelegt an, so fällt die Construction wie in Fig. 41 aus.

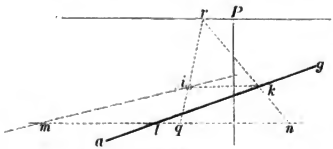

Fig. 41.

Ist der Punkt i nicht zwischen dem Horizonte und der Linie a g, sondern vorderhalb der letztern gegeben, so ist wie vorher zu verfahren und es ergiebt sich eine Construction wie in Fig. 42.

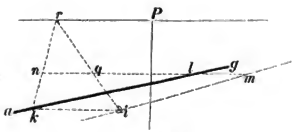

Fig. 42.

§. 129. Ist der Punkt i auf der der Linie a g entgegengesetzten Seite des Horizontes gegeben, so vertauscht man (Fig. 43) die hierbei bisher dem Horizonte und der Linie a g beigelegten Beziehungen zu einander und zieht demnach i k nicht parallel der Grundlinie, sondern parallel der a g bis k im Horizonte, zieht i r und k r nach einem beliebigen Punkte r der a g, zieht ferner durch einen beliebigen Punkt l des Horizontes eine der a g geometrisch parallele Linie n m, und macht darin l m geometrisch gleich q n. Es ist dann eine durch i und m zu ziehende Linie perspectivisch parallel der Linie a g.

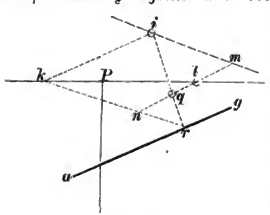

Fig. 43.

§. 130. Es bedarf kaum der Erinnerung, daß es sowohl in den vorhergehenden wie in den nächstfolgenden Paragraphen gleichgültig ist, ob die gegebene, stets a g genannte Linie die Perspective einer in oder

Digitized by Google

außerhalb der Grundebene liegenden Linie A G ist, da doch alle in einer und derselben Gesichtslinien-Ebene liegenden Objecte eine und dieselbe Perspective haben. Ebenso ist es gleichgültig, ob der Punkt i die Perspective eines Punktes in oder außerhalb der Grundebene ist.

d) Ist wieder a g (Fig. 44) die gegebene Perspective der Linie, §. 131.
und i die Perspective des Punktes, durch welchen eine zu jener perspectivisch parallele Linie construirt werden soll, so zieht man durch i eine beliebig, am besten nahezu normal zum Horizonte gerichtete Linie k b; durch Punkt b, in welchem diese die a g schneidet, zieht man eine der Grundlinie parallele Linie b c, und von einem beliebigen Punkte c derselben eine beliebig, jedoch am besten

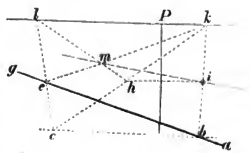

Fig. 44.

fast normal zum Horizonte gerichtete, die a g im Punkte e schneidende Linie c l. Zieht man nun von c und e Linien nach k, zieht ferner i h parallel b c und schneidet, von h nach l ziehend, die Linie e k im Punkte m, so ist eine von i durch m zu ziehende Linie perspectivisch parallel a g. Es sind durch die Construction nämlich zwei perspectivisch gleiche und gleichliegende Dreiecke b c e und i h m entstanden, in welchen 1) die entsprechenden Seiten b c und i h beide der Grundlinie parallel und einander gleich sind, weil die Linien b k und c k perspectivisch parallel sind; in welchen 2) die Seiten c e und h m perspectivisch parallel und gleich sind, weil sie in Einem Punkte l des Horizontes verschwinden und sie zwischen den perspectivisch parallelen Linien c k und e k liegen. Wenn aber in zwei gleichliegenden Dreiecken je zwei entsprechende Seiten gleich und parallel sind, so sind auch die dritten Seiten, hier b e und i m, gleich und, worauf es hier ankommt, parallel.

Es ist dieses Verfahren nur dann anzuwenden, wenn der gegebene Punkt i zwischen der gegebenen Linie a g und dem Horizonte liegt, da andernfalls meist die Grenzen der Constructionsfläche überschritten werden müssen.

e) Statt der im vorhergehenden Paragraphen nach dem Punkte k §. 132.

Digitized by Google

perſpectiviſch parallel gezogenen Linien b k, c k und e k kann man, indem man übrigens das dort gezeigte Verfahren einhält, auch geometriſch parallele Linien b k, c k¹ und e k² (Fig. 45) anwenden. Sind außer dem Punkte i noch mehrere in Einer Linie liegenden Punkte, z. B. i¹ und i² gegeben, durch welche der a g perſpectiviſch parallele Linien conſtruirt werden ſollen, ſo wird die ſonſt beliebige Richtung jener drei parallelen Linien durch die Lage dieſer Punkte beſtimmt, ſowie auch im vorhergehenden Paragraphen die Richtung der Linie b k durch die Lage der etwa anderweit gegebenen Punkte beſtimmt ſein würde.

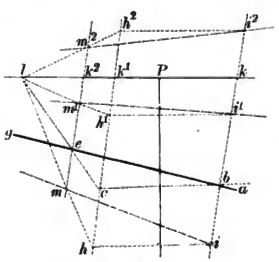

Fig. 45.

Die durch dieſe Conſtruction entſtandenen vier Dreiecke i h m, b c e, i¹ h¹ m¹ und i² h² m² ſind als die Perſpectiven gleicher, ſchief über einander liegender Dreiecke anzuſehen, und ſind in ihnen die dritten Seiten i m, b e, i¹ m¹ und i² m² perſpectiviſch parallel, weil die einander entſprechenden anderen Seiten (gleich und) parallel ſind.

Die hier gegebene Löſung iſt der im §. 124 enthaltenen verwandt, und unterſcheidet ſie ſich von jener nur dadurch, daß die dort lothrechten Linien k i², n q² und l m² hier durch die ſchiefen, aber doch geometriſch parallelen Linien i i², h h² und m m² vorgeſtellt werden, und daß die dortigen Conſtructionsdreiecke k n l und i² q² m² hier in den etwas anders liegenden Dreiecken b c e und i² h² m² auftreten. Punkt l iſt der dort r genannte.

§. 133. Die in den beiden letzten Paragraphen gezeigten Conſtructionen ſind einfach Löſungen der geometriſchen Aufgabe: „durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu conſtruiren, welche nach dem entfernten Schnittpunkte zweier anderen gegebenen geraden Linien gerichtet iſt", und iſt hier nur einer der beiden gegebenen Linien die Bedeutung des Horizontes, der andern die der gegebenen Linie beigelegt. Es iſt deshalb auch nicht nothwendig, den bisher gemachten

Digitized by Google

Unterschied zwischen Horizont und gegebener Linie a g festzuhalten; vielmehr dürfen die diesen beiden Linien beigelegten Beziehungen auf das Verfahren bei der Construction, wie in §. 129, mit einander vertauscht werden, woraus zugleich ein Fingerzeig für das Verhalten in dem Falle entnommen werden kann, daß die gegebene Linie a g, nicht die Perspective einer horizontalen, sondern die **einer schiefen Linie** wäre.

Ist z. B. in Fig. 46 wieder i der gegebene Punkt, a g die gegebene Linie, und man will mit dieser wie in den beiden vorhergehenden Paragraphen mit dem Horizonte, und umgekehrt mit diesem wie dort mit der gegebenen Linie verfahren, so hat man durch i die Linie b k in beliebiger Richtung — wären aber außer dem Punkte i noch mehrere mit ihm in Einer geraden Linie liegenden Punkte i^1 und i^2 gegeben, so würde die Richtung b k durch diese bestimmt werden — zu ziehen, und durch b eine der a g geometrisch parallele Linie b c zu legen. Man muß ferner, von dem beliebigen Punkte c der b c nach einem beliebigen Punkte l der a g ziehend, den Horizont in e schneiden, durch c und e der b k geometrisch parallele Linien c k^1 und e k^2 ziehen, alsdann i h geometrisch parallel der a g ziehen, und endlich, von h nach l ziehend, die e k^2 in m schneiden, wonach eine von i durch m zu ziehende Linie nach dem entfernten Schnittpunkte der a g mit dem Horizonte gerichtet, d. h. mit beiden perspectivisch parallel ist.

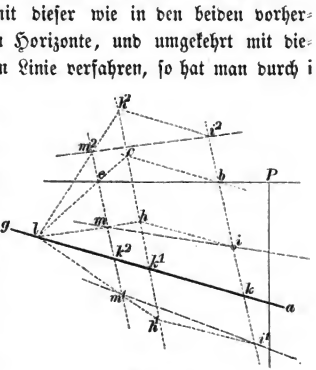

Fig. 46.

f) Ist wieder a g (Fig. 47) die gegebene Linie, i der gegebene §. 134.
Punkt, so legt man durch diesen eine beliebig gerichtete, den Horizont und die a g schneidende Linie b k, zieht, zu dieser geometrisch parallel, an einer beliebigen Stelle eine andere den Horizont und die a g schneidende Linie c l, zieht in dem entstandenen Vierecke

Digitized by Google

c b k l eine Diagonale b l, ferner i h geometrisch parallel dem Horizonte, und h m geometrisch parallel der a g. Es ist dann eine von i durch m zu ziehende Linie nach dem Schnittpunkte v des Horizontes mit der Linie a g gerichtet, d. h. sie ist beiden perspectivisch parallel.

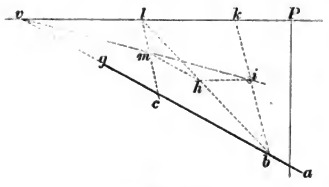

Fig. 47.

Es beruht dieses Verfahren auf der Theilung der geometrisch parallelen Linien b k und c l in proportionale Theile. Zunächst verhält sich nämlich in den beiden wegen Parallelität ihrer Seiten ähnlichen Dreiecken l m h und l c b

$$l\,m : m\,c = l\,h : h\,b,$$

und in den beiden aus demselben Grunde ähnlichen Dreiecken b i h und b k l verhält sich

$$k\,i : i\,b = l\,h : h\,b;$$

es verhält sich demnach

$$l\,m : m\,c = k\,i : i\,b.$$

Sind hiernach die Linien b k und c l durch die Linie i m proportional getheilt, so muß, wenn man b k als Grundlinie eines Dreiecks v b k, und c l als eine ihr parallele Linie ansieht — nach dem Lehrsatze, daß eine von der Spitze eines Dreiecks nach dessen Grundlinie gezogene Linie alle mit der Grundlinie parallelen Linien innerhalb des Dreiecks in proportionale Theile theilt, und dessen Umkehrung, daß Linien durch proportional gelegene Theilpunkte von Linien, die der Grundlinie parallel sind, gezogen, durch die Spitze des Dreiecks gehen — i m nach der Spitze v dieses Dreiecks, d. h. nach der Perspective des Verschwindungspunktes der gegebenen Linie a g gerichtet sein.

Wie hier, ist auch in den §§. 132 und 133 die Richtung der Linie i m durch Theilung der Linien b k und $c\,k^2$ in proportionale Theile ermittelt worden.

Digitized by Google

Von den beiden Figuren 48 und 49 veranschaulicht die erstere §. 135.
die Construction für den Fall, daß der Punkt i nicht zwischen dem Horizonte und der gegebenen Linie a g, sondern vorderhalb der letztern gegeben ist; die zweite Figur zeigt die Construction für den

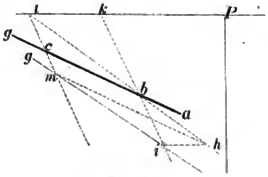

Fig. 48.

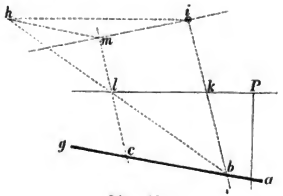

Fig. 49.

Fall, daß der Punkt i auf der der Linie ag entgegengesetzten Seite des Horizontes gegeben ist. In beiden Fällen wird wie im vorhergehenden Paragraphen, nur mit dem Unterschiede verfahren, daß hierbei die Verlängerungen der Diagonale b l benutzt werden.

g) Eine ebenfalls auf der proportionalen Theilung der Linien §. 136.
beruhende Lösung, welche zwar umständlich, aber deshalb erwähnenswerth ist, weil sie ohne Zirkel einfach durch Linealconstruction auszuführen ist, und wobei gleichfalls die in den perspectivischen Constructionen festgehaltene Unterscheidung zwischen dem Horizonte und der gegebenen Linie wegfällt, letztere beiden vielmehr als gleichbedeutende Linien gelten, ist folgende:

Ist wieder a g (Fig. 50) die gegebene Linie, i der gegebene Punkt, so legt man durch diesen zwei beliebig gerichtete Linien b k und e l, welche in ihren Schnittpunkten mit dem Horizonte und mit der Linie a g die Ecken eines Vierecks b e k l bezeichnen und selbst dessen Diagonalen sind. Verlängert man die beiden Viereckseiten l b und k e bis zu ihrem Schnittpunkte f, und schneidet den Horizont und die Linie

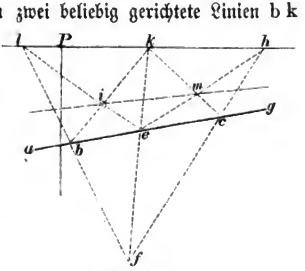

Fig. 50.

Digitized by Google

a g durch eine von f aus gezogene, beliebig gerichtete Linie f h in den Punkten h und c, und zieht in dem dadurch entstandenen zweiten Viereck e c h k die Diagonalen k c und e h, so ist deren Schnittpunkt m ein zweiter Punkt der durch Punkt i perspectivisch parallel der a g zu ziehenden Linie.

§. 137. Ist der Punkt i, wie in Fig. 51, nicht zwischen dem Horizonte und der gegebenen Linie a g gegeben, so wird die Construction analog der vorhergehenden ausgeführt. Man schneidet durch zwei durch Punkt i gelegte, beliebig gerichtete Linien i k und i l den Horizont und die gegebene Linie a g in den vier Punkten k, l und b, c, zieht in dem so entstandenen Vierecke k l e b die Diagonalen, und legt durch deren Schnittpunkt f eine andere beliebig gerichtete Linie h c, welche den Horizont und die a g in den Punkten h und c schneidet. Zieht man nun k c über c verlängert und h e über e verlängert, so schneiden sich die Verlängerungen in dem Punkte m, und zieht man i m, so ist diese die gesuchte perspectivische Parallele zu a g.

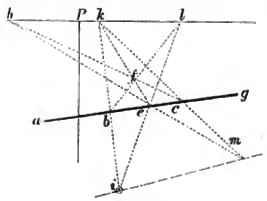

Fig. 51.

Ist Punkt i oberhalb des Horizontes gegeben, so ist die Construction dieselbe, und hat man zur Veranschaulichung derselben nur die Figur 51 umzukehren und die Linie a g als Horizont aufzufassen.

§. 138. h) Sind außer der einen durch den gegebenen Punkt i perspectivisch parallel der gegebenen Linie a g zu construirenden Linie noch viele andere derartige Linien zu construiren, so verlängert man (Fig. 52) die a g nach beiden Seiten bis zu den Seitenrändern der Constructionsfläche, nachdem man hier durch den Horizont und die Linie a g der Verticale parallele Linien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gezogen hat, und theilt die Längen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ je in gleich viele, möglichst kleine, zur Bequemlichkeit mit Nummern zu ver-

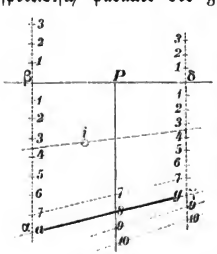

Fig. 52.

Digitized by Google

sehende gleiche Theile. Es sind alsdann alle durch gleiche Nummern oder zwischen gleichen Nummern gezogenen Linien perspectivisch parallel der a g, da $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ hier wieder proportional getheilt sind.

Sollen oberhalb des Horizontes der a g perspectivisch parallele Linien gezogen werden, so setzt man die Theilungen der Linien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ auf ihren Verlängerungen oberhalb des Horizontes fort.

Will man unterhalb der Linie a g noch mehrere ihr perspectivisch parallelen Linien ziehen, so kann man die auf der Linie $\delta\gamma$ in den Punkten 9, 10 u. s. w. weitergehende Theilung benutzen; statt der aber auf der Linie $\beta\alpha$ in α aufhörenden Theilung eine andere auf einer beliebigen, zum Horizonte normalen Linie, etwa auf der durch P gehenden Verticale selbst vornehmen, indem man darauf das Maß 7. 8 noch mehrmals nach unten weiter aufträgt.

Ist, wo man die eben gezeigte Hülfsconstruction anzuwenden genöthigt ist, überhaupt noch nicht die Perspective wenigstens einer der zu construirenden Linien vorhanden, und kann man sich auch nicht, was sonst thunlich ist, statt ihrer ihres Parallelstrahles bedienen, weil etwa der herabgeschlagene Gesichtspunkt außerhalb des Constructionsraumes fällt, so verfährt man folgendermaßen: §. 139.

Man bezeichnet auf der Verticale einen beliebigen Bruchtheil der Distanz, durch O_3 (Fig. 53) etwa ein Drittel derselben, trägt an eine durch O_3 horizontale Linie O_3 b den Abweichungswinkel b O_3 z_3 der zu construirenden Linien von der Bildebene geometrisch an, construirt an P O_3 das Quadrat P O_3 b f, theilt von dem Stücke b e seiner Seite b f in b c ein Drittel ab, und zieht von O_3 durch c eine Linie. Es ist diese alsdann nach dem Verschwindungspunkte der zu construirenden Linien gerichtet und wie a g in Fig. 52 zu verwenden.

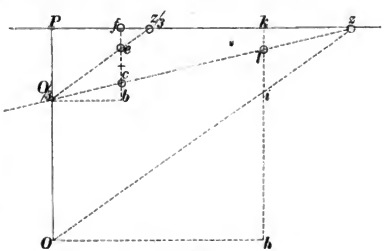

Fig. 53.

Digitized by Google

Der Beweis der Richtigkeit ist geführt, wenn nachgewiesen ist, daß die Linie $O_3 c$ nach dem Punkte z gerichtet ist, in welchem der Parallelstrahl O z der zu construirenden Linien den Horizont schneidet. Zieht man nämlich diesen Parallelstrahl und construirt an PO, der ganzen Distanz, das Quadrat POhk, so ist zunächst das Dreieck zik ähnlich dem Dreieck $O_3 eb$, wegen Parallelität der Seiten. Da nun ferner Winkel kzl als Wechselwinkel des Winkels $b O_3 c$ diesem gleich ist, so verhalten sich die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seitenstücke kl und li wie bc zu ce, d. h. kl ist ein Drittel von ki, weil bc ein Drittel von be ist. Es muß daher die Linie $O_3 z$, weil sie sowohl die Seite PO des Dreiecks POz als die dieser Seite parallele Linie ki in ihren Dritteln schneidet, nach dem Schnittpunkte z der beiden anderen Dreiecksseiten Pz und Oz gerichtet sein, was zu beweisen war.

4) Der nächstgelegene Theilpunkt einer horizontalen Linie wird, wenn die Perspective ihres Verschwindungspunktes außerhalb der Constructionsfläche liegt, gefunden

§. 140. nach Anleitung der §§. 113—116.

D. Der Theilpunkt liegt außerhalb der Constructionsfläche.

1) Soll ein auf der Perspective einer horizontalen, der Bildebene parallelen Linie gegebenes Maß auf die Perspective einer horizontalen, zur Bildebene schiefen Linie von einem gegebenen Punkte derselben aus perspectivisch übertragen werden, so ist dies folgendermaßen auszuführen:

§. 141. a) Ist ab (Fig. 54) die Perspective der gegebenen horizontalen, zur Bildebene schiefen Linie, c der Punkt, von welchem aus das gegebene Maß ci auf sie perspectivisch übertragen werden soll, so trägt man an der Linie ci in c den Abweichungswinkel der schiefen Linie von der Bildebene geometrisch in ich an — ist die Größe desselben nicht bekannt, so ermittelt man sie nach §. 121 — macht den Schenkel ch geometrisch gleich ci, fällt von h eine Normale

Digitized by Google

(Ordinate) h c auf c i und schneidet die a b durch eine von e nach P gezogene Linie im Punkte f, wonach c f perspectivisch gleich c i ist. Denn die beiden Dreiecke c e f und c e h sind perspectivisch gleich, da die Seite c e beiden gemeinschaftlich, Winkel e c f perspectivisch gleich dem Winkel e c h, und Winkel c e f perspectivisch gleich dem Winkel c e h ist.

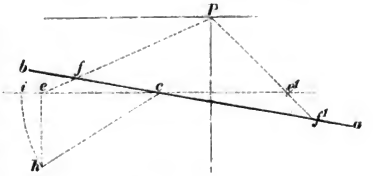

Fig. 54.

Soll das Maß c i vorderhalb des Punktes c auf die Linie a b übertragen werden, so verlängert man die Maßlinie über c hinaus, macht c e¹ geometrisch gleich c e, und schneidet die a b durch eine von P durch e¹ gezogene Linie in f¹, wonach c f¹ perspectivisch gleich c f und c i ist.

b) Liegt die Perspective des Verschwindungspunktes der zu theilenden Linie innerhalb der Constructionsfläche, so kann man, nachdem man das gegebene Maß auf einen Bruchtheil zurückgeführt hat, analog §. 107, als Theilpunkt einen Punkt des Horizontes benutzen, welcher von der Perspective des Verschwindungspunktes um den gleichnamigen Bruchtheil der Entfernung dieser Perspective vom eigentlichen Theilpunkte entfernt liegt. §. 142.

Ist z. B. O v (Fig. 55) der Parallelstrahl der gegebenen Linie a b, auf welche von ihrem Punkte c aus das in der Linie c i gegebene Maß perspectivisch übertragen werden soll, so würde man nach §. 101 den Theilpunkt t für die Linie a b dadurch finden, daß man die Länge des Parallelstrahles O v um v in den Horizont in v t überträgt. Bezeichnet man jedoch, da Punkt t hier außerhalb der Constructionsfläche n s r u fallen würde, auf dem Horizonte von v aus nur einen

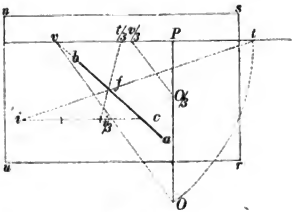

Fig. 55.

Digitized by Google

Bruchtheil, etwa ein Drittel der Länge v t in v $t_{/3}$, und auf der Maßlinie c i das entsprechend gelegene Drittel in c $i_{/3}$, und zieht nun $i_{/3}$ $t_{/3}$, so schneidet man die Linie a b im Punkte f, wonach c f perspectivisch gleich c i gemacht ist, wie wenn man i t gezogen hätte.

Um nun aber, wenn sowohl der herabgeschlagene Gesichtspunkt O, als der Theilpunkt t außerhalb der Constructionsfläche liegen, den Abstand des Punktes $t_{/3}$ von v, welcher gleich $^1/_3$ der Länge des Parallelstrahles v O sein muß, zu ermitteln, bezeichnet man auf der Verticale in P $O_{/3}$ ein Drittel der Distanz, legt an die Verticale in $O_{/3}$ den Abweichungswinkel der Linie a b von der Verticalebene an und schneidet den Horizont in $v_{/3}$, wonach in der Länge $v_{/3}$ $O_{/3}$ jenes Drittel der Länge v t vorliegt und nunmehr in v $t_{/3}$ aufgetragen werden kann.

2) Soll eine auf der Perspective einer horizontalen, zur Bildebene schiefen Linie gegebene Strecke auf dieser Linie mehrmals neben einander perspectivisch aufgetragen werden, so wird dies folgendermaßen ausgeführt:

§. 143. Ist a g (Fig. 56) die gegebene Linie, c e darin die gegebene Strecke, so legt man durch Punkt c oder e eine der Grundlinie parallele Linie x y, schneidet, von einem beliebigen Punkte r des Horizontes nach c ziehend, diese Linie im Punkte h, trägt auf ihr das Maß h e nach links und rechts mehrmals in h i und e k, k l, l m u. s. f. geometrisch gleich auf, und zieht von r durch i und nach k, l, m u. s. f. Linien. Es theilen dann deren Schnittpunkte mit der a g auf dieser der Strecke c e perspectivisch gleiche Strecken z c und e d, d f, f n ab.

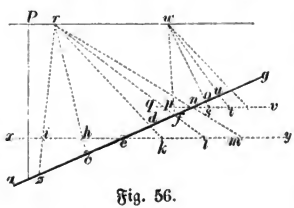

Fig. 56.

Soll die perspectivische Auftragung der gegebenen Strecke c e jenseit des Punktes n fortgesetzt werden, so kann man das mit der

Digitized by Google

Strecke c e Vorgenommene mit der Strecke f n wiederholen, demgemäß durch n abermals eine der Grundlinie parallele Linie q v legen und dieselbe, von einem beliebigen Punkte w des Horizontes — es könnte dies selbstverständlich wieder r sein — nach f ziehend, im Punkte p schneiden. Trägt man hiernach auf ihr das Maß n p mehrmals in n s, s t u. s. f. auf, zieht von den Punkten s, t u. s. f. Linien nach w, so theilen diese auf der a g wieder der c e perspectivisch gleiche Strecken n o, o u u. s. f. ab.

In den in diesem Kapitel gezeigten Hülfsconstructionen sind nunmehr hinlänglich viel Mittel zur Aushülfe für die Fälle geboten, in welchen zur Construction nothwendige Hülfspunkte außerhalb der Bildgrenze fallen, so daß der durch letztern Umstand bedingten Umwege im Folgenden nicht mehr besonders gedacht zu werden braucht. Nichtsdestoweniger ist die Anwendung eines Theiles dieser Hülfsconstructionen in einigen der folgenden Uebungsbeispiele gezeigt. §. 144.

Sechstes Kapitel.

Beispiele.

Nachdem im Vorhergehenden die Regeln erörtert worden, auf welche sich alle perspectivischen Constructionen gründen, erscheint es rathsam, an einer Reihe von Beispielen, für welche zunächst theils einfache geradlinige Figuren, theils von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzte Körper als darzustellende Objecte gewählt sind, die Anwendung jener Regeln zu zeigen und dabei zugleich eine Anleitung hinsichtlich des in verschiedenen Fällen einzuschlagenden Verfahrens zu geben. In letzterer Beziehung sind besonders die beiden ersten ausführlich behandelten Aufgaben zu beachten. §. 145.

Da die Constructionen krummer Linien und von krummen Flächen begrenzter Körper fast durchweg unter Anwendung horizontaler oder lothrechter Hülfslinien ausgeführt werden, und da ferner

Digitized by Google

auch die Constructionen schiefer Linien und Ebenen auf Folgerungen aus den für die Construction horizontaler und lothrechter Linien und Ebenen geltenden Regeln beruhen, so wird die Anleitung zu dem bei diesen beiden Constructionen zweckmäßigsten Verfahren am verständlichsten nach jenen Beispielen zu geben sein.

§. 146. Wegen der häufigen Erwähnung von Verschwindungspunkten und Grenzlinien wird, da nach den vorangegangenen Erklärungen ein Mißverständniß dadurch nicht mehr zu befürchten ist, von dieser Stelle an der Kürze wegen statt des ausführlichen Ausdruckes „Perspective des Verschwindungspunktes" und „Perspective der Grenzlinie" stets nur „Verschwindungspunkt" und „Grenzlinie" gesagt werden.

Der schnelleren Verständigung wegen werden ferner Punkte der in ihrem geometrischen Grundrisse gegebenen Objecte in der Folge stets mit Buchstaben des großen Alphabets, Punkte der perspectivischen Constructionen aber mit Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichnet sein, so daß also hieraus sogleich erkannt werden kann, ob sich eine Bezeichnung auf Punkte des Grundrisses oder der perspectivischen Construction bezieht.

Der Haupt-, der Gesichts- und die Distanzpunkte aber werden überall mit den großen Buchstaben P (späterhin auch H), O und D bezeichnet sein.

Beispiel 1.

§. 147. **Aufgabe.** In Fig. 1 (Taf. 1) liegt der Grundriß des aus quadratischen Steinplatten von je 3 Fuß Seitenlänge bestehenden **Fußbodens** ABCE eines Zimmers vor. Die Stellung der Bildebene ist durch die Linie QR, auf welcher zugleich in den Punkten 0, 1, 2, 3 u. s. w. der Fuß-Maßstab vorliegt, gegeben, der Ort des Gesichtspunktes durch den Punkt O; es fällt demnach der Hauptpunkt in P und beträgt die Distanz 18 Fuß; es soll die Perspective des Fußbodens in doppeltem Maßstabe und unter Annahme des Auges in einer Höhe von 6 Fuß über dem Fußboden construirt werden.

§. 148. **Ausführung.** Nachdem in der Construction (Fig. 2, Taf. 1) der Horizont $D/_2$ D, und 6 Fuß darunter die Grundlinie g1 der Bildebene gezogen, der Hauptpunkt P beliebig, und im gegebenen Abstande (d. i. 18 Fuß)

Digitized by Google

davon einer der Distanzpunkte, D, bezeichnet und durch P die Verticale gezogen worden — der Angabe des herabgeschlagenen Gesichtspunktes bedarf es hier nicht — werden die Maße P I, P M, P N, P H und P F, welche in der Bild- und Grundebene (dem Fußboden nämlich) zugleich liegend gegeben sind, in der Construction auf der Grundlinie vom Grundpunkte p aus nach links und rechts und der Aufgabe gemäß doppelt groß in p i, p m, p n, p h und p f aufgetragen. — Da die Seiten A B und E C des Fußbodenquadrates und die ihnen parallelen, durch die Punkte M, I und H gehenden Steinfugen *normal zur Bildebene* sind, so müssen ihre Perspectiven, dem §. 54 nach, durch die Punkte n, m, i, h und f nach P gezogene Linien sein. — Um die Perspectiven der der *Bildebene parallelen* Steinfugen A E, Y S u. s. w. zu construiren, müßte man zuerst die Perspectiven einzelner Punkte dieser Fugen, etwa der in der Linie E C liegenden Punkte E, S, T, U, C, suchen; also, an den in f perspectivisch schon vorliegenden Punkt F anknüpfend, die Maße F S, F E, F T u. s. w. verdoppelt auf die hier als Maßlinie zu benutzende Grundlinie g l von f aus nach rechts und links in die Maße f σ, f ε, f τ u. s. w. übertragen, und von D, als dem Theilpunkte für alle zur Bildebene normalen Linien (§. 99), durch die Punkte ε, σ, τ u. s. w. ziehend, die von P durch f gezogene Linie in den Punkten e, s, t u. s. w. schneiden, um dann durch diese Punkte mit der Grundlinie parallele Linien e a, s y, t o u. s. w., die Perspectiven der der Bildebene parallelen Steinfugen, ziehen zu können. Doch findet man die Perspectiven einzelner Punkte dieser Steinfugen bequemer, wenn man berücksichtigt, daß eine Diagonale A C im Grundrisse, durch den Punkt K der Bildebene gehend, beide Fugensysteme in ihren Schnittpunkten A, V, W, X und C schneidet, und daß demnach die Schnittpunkte der Perspective dieser Diagonale mit den in P verschwindenden Fugenperspectiven Punkte sein müssen, durch welche die Perspectiven der der Bildebene parallelen Fugen gezogen werden können. Die Diagonale A C schneidet, dem Grundrisse nach, die Bildebene unter einem Winkel von 45°; es ist deshalb die ihr gleich gerichtete Linie O D ihr Parallelstrahl und der Distanzpunkt D ihr Verschwindungspunkt, und zwar wie hier im Grundrisse, so auch in der Construction. Ueberträgt man daher das Maß P K verdoppelt auf die Grundlinie der Construction in p k und zieht hier von D durch k eine Linie, so ist diese die Perspective jener Diagonale, und können durch ihre Schnittpunkte a, v, w, x und c mit den in P verschwindenden Fugen parallel der Grundlinie die Perspectiven a e, y s, o t u. s. w. der der Bildebene parallelen Fugen gezogen werden.

Läge aber der hier benutzte Distanzpunkt D so weit außerhalb des Constructionsraumes, daß man ihn nicht markiren könnte, so müßte man

Digitized by Google

sich nur eines Bruchtheiles der Distanz, etwa der halben, also des Punktes $D/_2$ bedienen und um Punkte der Perspectiven der der Bildebene parallelen Fugen zu finden, nach §. 107 die Maße NA, NY, NB, NZ u. s. w., ebenfalls auf ihre Hälften reducirt, auf die als Maßlinie zu benutzende Grundlinie von n aus nach links und rechts in $n\alpha$, $n\upsilon$, $n\beta$, $n\zeta$ u. s. w. übertragen, um dann, von $D/_2$ durch die Punkte α, υ, β, ζ u. s. w. ziehend, die von P durch n gezogene Linie in den Punkten a, y, b, z u. s. w. schneiden zu können.

Da hier der Grundriß in halbem Maßstabe der Construction gegeben ist, können seine Maße, als der halben Distanz entsprechend, sofort verwendet werden.

Beispiel 2.

§. 149. **Aufgabe** wie im vorhergehenden Beispiele, nur mit dem Unterschiede, daß die Bildebene in der Richtung, wie sie in der Grundriß-Fig. 3 (Taf. 1) die Linie YZ bezeichnet, gegeben ist, wonach selbstverständlich auch der Gesichtspunkt O einen entsprechend andern Ort hat.

§. 150. **Ausführung.** Nachdem, wie im vorhergehenden Beispiele, Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen, der Hauptpunkt P (Fig. 4, Taf. 1), ein Distanzpunkt D und der herabgeschlagene Gesichtspunkt O bezeichnet worden, werden für die zweierlei, zur Bildebene schiefen Richtungen der Steinfugen die Verschwindungspunkte y und z festgestellt, indem man die Winkel, welche jene Fugen im Grundrisse mit der Verticalebene P O bilden, an die Verticale der Construction in O anträgt und dadurch den Horizont in den Punkten y und z schneidet. Um hiernach zuvörderst die Perspective eines der Eckpunkte des Fußbodens, etwa des Punktes A zu finden, wird im Grundrisse durch A eine der Verticalebene parallele Linie A F gezogen, das Maß P F verdoppelt auf die Grundlinie der Construction in p f und das Maß F A verdoppelt in $f\alpha$ übertragen, und dann eine von P durch f gezogene Linie durch eine andere von D durch α gezogene im Punkte a, der gesuchten Perspective, geschnitten. — Zieht man hierauf von a Linien nach y und z, so sind diese die für jetzt noch unendlich langen Perspectiven der Seiten A B und A E des Fußbodenquadrates. — Um auf ihnen die perspectivischen Längen der Strecken AB und A E zu bestimmen, bedarf es für die letztere zunächst des Theilpunktes tz. Man findet ihn nach §. 101, wenn man die Länge des Parallelstrahles z O um z in den Horizont in z tz überträgt. Man bedarf ferner eines Maßstabes, um die Fußgröße für den Ort a kennen zu lernen. Man trägt

Digitized by Google

deshalb auf der Grundlinie der Construction an einer beliebigen Stelle einige, etwa 6 Fuß des verdoppelten Fußmaßes auf und zieht von einem beliebigen Punkte m des Horizontes durch die dadurch bezeichneten Punkte O, 1, 2, 3 u. s. w. Linien; die Schnittpunkte derselben mit einer durch Punkt a gezogenen Horizontalen geben dann auf dieser die perspectivische Fußgröße für den Ort a an. Trägt man nun viermal je drei dieser Fußgrößen auf der durch a Horizontalen von a aus rechts in den Punkten $\varkappa$, λ, ϱ und ε auf und zieht dann von diesen Punkten nach dem Theilpunkte tz Linien, so schneiden diese die Linie az in den Punkten k, l, r und e, welche die Perspectiven der Punkte K, L, R und E sind; und zieht man von diesen Punkten Linien nach y, so sind diese die Perspectiven der wie AB gerichteten Fugen. — Um hiernach die Perspectiven der wie AE gerichteten Fugen ziehen zu können, müßte man zunächst die perspectivische Theilung der Linie ay so ausführen, wie dies mit der Linie az geschehen ist; doch kommt man schneller zum Ziele, wenn man, wie im vorigen Beispiele, die Beziehungen der Diagonale AC des Fußbodenquadrates zu den Fugen benutzt (und zwar gerade dieser Diagonale, weil sie sich der normalen Richtung zur Bildebene am meisten nähert und ihre Perspective deshalb am leichtesten zu construiren ist). Da AC die Richtung einer Linie hat, welche den Winkel, den die Quadratseiten AB und AE bilden, halbirt, so muß auch in der Construction ihr Parallelstrahl den Winkel, welchen die Parallelstrahlen Oy und Oz bilden, halbiren. Zieht man diese Halbirungslinie, so schneidet man den Horizont in dem Punkte *dg*, dem Verschwindungspunkte der Diagonale AC, welchen man kurz den **Diagonalpunkt** nennt. Zieht man hierauf a *dg*, die Perspective der Diagonale, so schneidet man die nach y gerichteten Fugen in Punkten, durch welche die nach z gerichteten Fugenperspectiven nunmehr gezogen werden können.

§. 151. Viel kürzer läßt sich die Construction ausführen, wenn man im Grundrisse die Parallelstrahlen OY und OZ der wie AB und der wie AE gerichteten Fugen zieht, die sich daraus auf der Bildebene ergebenden Abstände der Verschwindungspunkte Y und Z von P verdoppelt von P aus auf den Horizont der Construction in Py und Pz überträgt, und dann, indem man zuerst etwa das wie AB gerichtete Liniensystem ins Auge faßt, die Abstände PM, PI, PH, PG und PT verdoppelt von p aus auf die Grundlinie der Construction in pm, pi, ph, pg und pt überträgt, und durch die Punkte m, i, h, g und t nach y gerichtete Linien zieht. — Verfährt man dem entsprechend auch mit den wie AE gerichteten, also in z verschwindenden Fugen, indem man die Schnittpunkte derselben

Digitized by Google

mit der Bildebene, wie z. B. Q, oder ihrer Verlängerungen, wie z. B. N, in gleicher Weise auf der Grundlinie der Construction, z. B. in q und n, darstellt und durch dieselben Linien nach z zieht, so ist die Aufgabe gelöst. — Einfacher ist es hierbei noch, im Grundrisse den Parallelstrahl O *dg* der Diagonale A C zu ziehen, den Abstand des Diagonalpunktes *dg* verdoppelt auf den Horizont der Construction in P *dg* zu übertragen, dann die nach y gerichteten Linien durch eine von a nach *dg* gezogene Linie zu schneiden, und durch die Schnittpunkte Linien nach z zu ziehen.

§. 152. Wäre jedoch der Constructionsraum so eng begrenzt, wie ihn in Fig. 5 (Taf. I) das Rechteck $N^1 S^1 T^1 R^1$ einschließt, so daß der herabgeschlagene Gesichtspunkt, der Distanzpunkt und die Verschwindungspunkte, als zu entfernt liegend, nicht benutzt werden können, so müßten die im Kapitel 5 gezeigten Hülfsconstructionen etwa in folgender Art zur Anwendung kommen:

Nachdem Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen, ergiebt eine kurze Ueberlegung, daß hier höchstens die $^1/_3$-Distanz anwendbar ist. Es wird demnach der Distanzpunkt $D/_3$ in $^1/_3$ der in der Aufgabe gegebenen Entfernung von P auf dem Horizonte aufgetragen. — Um nun zunächst die Perspective a des Punktes A zu finden, wird wieder das Maß P F (Fig. 3) verdoppelt (weil die Construction im doppelten Maßstabe des Grundrisses ausgeführt werden soll) auf die Grundlinie in p f übertragen, von P eine Linie durch f gezogen und, um f a nach Anleitung des §. 107 perspectivisch gleich F A zu machen, das verdoppelte Maß F A, auf $^1/_3$ reducirt (weil auch die Distanz auf $^1/_3$ reducirt worden), auf der Grundlinie in f α aufgetragen, und die Linie P f durch eine andere von $D/_3$ durch α gezogene im Punkte a geschnitten. — Um die Richtungen der Perspectiven der Linien A B und A E ohne Benutzung ihrer Verschwindungspunkte zu bestimmen, wird am besten nach §. 120 verfahren; demgemäß hier $^1/_6$-Distanz in $O/_6$ auf der Verticale aufgetragen, es werden ferner an dieselbe in $O/_6$ die Abweichungswinkel der Linien A B und A E von der Verticalebene O P des Grundrisses angetragen und dadurch der Horizont in $y/_6$ und $z/_6$ geschnitten; auf der Linie a P wird im Punkte $a/_6$ ein Sechstel ihrer Länge bezeichnet und werden auf einer durch denselben gezogenen Horizontalen die Maße P $y/_6$ und P $z/_6$ in $a/_6$ x und $a/_6$ x^1 aufgetragen. Von a durch x und durch x^1 gezogene Linien a (Y) und a (Z) sind alsdann die Perspectiven der unendlich lang aufgefaßten Linien A B und A E. — Um auf a (Z) die Perspectiven der Punkte K, L, R und E zu finden, ist zunächst der Theilpunkt für a (Z), welcher hier innerhalb des Constructionsraumes fällt, zu suchen. Es ist zu dem Zweck nach §. 114

Digitized by Google

der Winkel $y/_6\ O/_6\ P$ zu halbiren, der Horizont dadurch in $t/_6$ zu schneiden und das Maß $P\,t/_6$ versechsfacht in $P\,t_z$ auf dem Horizonte aufzutragen, wonach t_z der gesuchte Theilpunkt ist. Hiernach ist, um für den Ort a die Größe von 3 Fuß zu ermitteln, entweder innerhalb des Constructionsraumes, oder, um diesen nicht mit zu vielen Hülfslinien zu erfüllen, auf einem Nebenblatte ein Maßstab anzufertigen, wie er in Fig. 4 schon vorliegt, und sind wie dort auf einer durch a gezogenen Horizontalen die 3 Fuß großen Maße $a\varkappa$, $\varkappa\lambda$, $\lambda\varrho$ ($\varrho\varepsilon$ fiele schon außerhalb des Constructionsraumes) aufzutragen. Von den Punkten $\varkappa$, λ und ϱ nach t_z gezogene Linien schneiden dann die Linie $a\,(Z)$ in den Perspectiven k, l und r. Um noch den Punkt e zu finden, ist nach §. 143 durch r eine Horizontale zu ziehen, diese durch eine von einem beliebigen Punkte m des Horizontes nach l gezogene Linie in l^1 zu schneiden, es ist $r\varepsilon$ gleich $r\,l^1$ zu machen und Linie $a\,(Z)$ abermals durch eine von ε nach m gezogene Linie in e zu schneiden. — Um nun durch die Punkte k, l, r und e die der Linie a b perspectivisch parallelen Fugen ziehen zu können, wird nach Anleitung des §. 126 von k eine Horizontale k n bis zur Linie a b gezogen; es werden ferner die Linien $k\,m^1$ und $n\,m^1$ nach einem beliebigen Punkte m^1 des Horizontes gezogen und wird dadurch auf einer beliebigen horizontalen Linie (in der Figur ist die Grundlinie gewählt) das Maß $n^1\,k^1$ abgeschnitten. Trägt man dieses Maß auf der Grundlinie vom Punkte s (in welchem sie die a b schneidet), aus 4 mal neben einander auf, so werden dadurch auf ihr Punkte, wie s^1, s^2, s^3 bezeichnet, durch welche Linien von k, r, e aus als die gesuchten Fugenperspectiven gezogen werden können. — Um für die Perspectiven der mit der Linie A E parallelen Fugen die ersten Punkte zu ermitteln, construirt man auch hier die Perspective der Diagonale des Fußbodens, und kann man dazu die Lage des Diagonalpunktes entweder direct aus dem Grundrisse entnehmen, oder aber dadurch finden, daß man den Winkel $y/_6\ O/_6\ z/_1$ halbirt, den Horizont in $dg/_6$ schneidet und das Maß $P\,dg/_6$ versechsfacht in $P\,dg$ auf den Horizont aufträgt, wonach sich hier dg als Diagonalpunkt ergiebt. Zieht man nun die Perspective $a\,dg$ der Diagonale A C, so schneidet man die Perspectiven der mit A B parallelen Fugen in den Punkten u, i, g und c, durch welche die Perspectiven der mit A E parallelen Fugen gehen müssen. Zweite Punkte für die letzteren findet man wieder nach §. 126, indem man durch u eine die Linie a e im Punkte v schneidende Horizontale legt, von u und v Linien nach einem beliebigen Punkte m^1 des Horizontes Linien zieht, und das Maß q o, welches diese auf einer beliebigen, etwa durch e gelegten Horizontalen abtheilen, auf dieser mehrmals von e aus neben einander in e w, $w\,w^1$ aufträgt. Durch

Digitized by Google

u und w und durch i und w^1 gezogene Linien sind dann schon zwei der Perspectiven der mit A E parallelen Fugen. Legt man nun noch durch g eine die über i verlängerte Fuge w^1 i im Punkte h schneidende Horizontale und macht auf ihr g h^1 geometrisch gleich g h, so kann durch c und h^1 die Perspective der Linie C B gezogen werden; und legt man durch c eine die über h verlängerte Fuge w^1 h im Punkte j schneidende Horizontale, und halbirt c j im Punkte j^1, so ergiebt eine von j^1 durch g gezogene Linie die Perspective der noch fehlenden mittelsten Fuge.

Wäre es hier nicht darauf angekommen, das Verfahren bei der Construction auf engbegrenzter Constructionsfläche ohne vorliegenden Grundriß zu zeigen, so wären die letzten Operationen dadurch sehr abzukürzen gewesen, daß man die Abstände der Schnittpunkte der Fugen mit der Bildebene von P aus dem Grundrisse verdoppelt in die Grundlinie der Construction von p aus übertragen hätte, wodurch zweite Punkte für die zu ziehenden einzelnen Perspectiven schneller gewonnen gewesen wären.

Beispiel 3.

§. 153. **Aufgabe.** In Fig. 6 (Taf. 1) liegt der Grundriß zweier gleichen, aber verschieden gestellten **Prismen** vor, deren eines auf seiner Grundfläche J F G H steht, während das andere auf seiner Seitenfläche A B C L liegt. Die Grundflächen bilden Quadrate von je 5 Fuß Seite, die Längenkanten haben 12 Fuß Länge. Die Stellung der Bildebene ist in der Linie Y (Z), und in einem normalen Abstande von 24 Fuß von dieser der Ort des Gesichtspunktes O gegeben — es sollen unter Annahme einer Höhe des Auges von 9 Fuß die Perspectiven der beiden Prismen in doppeltem Maßstabe, also in dem der Constructionsfig. 7 beigefügten, construirt werden.

§. 154. **Ausführung.** Nachdem in der Construction (Fig. 7, Taf. 1) der Horizont y z, 9 Fuß darunter die Grundlinie, und durch P die Verticale gezogen, nachdem auf letzterer in 24 Fuß Entfernung von P der herabgeschlagene Gesichtspunkt O, und ebenso weit von P auf dem Horizonte einer der Distanzpunkte in D^1 bezeichnet worden, wird, um die Perspective des aufgerichteten Prismas und davon zunächst die des Punktes F zu construiren, der Abstand P V des Prismas von der Verticalebene des Grundrisses nach dem der Construction beigefügten Fußmaßstabe (d. i. verdoppelt) in p v auf der Grundlinie der Construction aufgetragen; es wird ferner das Maß V F, um welches das Prisma vor der Bildebene vor-

Digitized by Google

ragt, in v φ auf der Grundlinie aufgetragen. Schneidet man dann eine von P durch v gezogene Linie durch eine andere von D^1 durch φ gezogene im Punkte f, so ist dieser die Perspective von F. — Macht man nun v n gleich 5 Fuß des Maßstabes und zieht von P durch n eine Linie, so liegen in dieser und in der durch v gezogenen die Richtungen der Perspectiven der zur Bildebene normalen Seiten F G und J H der Grundfläche J F G H vor. Da J F und H G der Bildebene parallel sind, so müssen auch ihre Perspectiven der Grundlinie parallel sein; eine durch f gelegte Horizontale f i ist deshalb die Perspective von F J, und schneidet man f P durch eine von i nach D^1 gezogene Linie in g, so hat man f g perspectivisch gleich f i gemacht, und eine durch g gelegte Horizontale g h ist die Perspective von G H. — Die Perspectiven aller übrigen Kanten finden sich nun leicht, wenn man durch die Punkte f, i, h, g und v lothrechte Linien zieht, die durch letzteren Punkt gelegte v v^1 gleich 12 Fuß des Maßstabes macht, die durch f und g gelegten Lothe durch eine von P durch v^1 gezogene Linie in f^1 und g^1 schneidet, durch letztere beiden Punkte die Horizontalen $f^1 i^1$ und $g^1 h^1$ und endlich die nach P gerichtete Linie $i^1 h^1$ zieht.

Zur Perspective des liegenden Prismas übergehend, ist der (56° große) Winkel zu ermitteln, um welchen die Kante A B von der Verticalebene abweicht, derselbe dann an die Verticale der Construction in O anzutragen und danach der Horizont durch den Parallelstrahl O z in z, dem Verschwindungspunkte der mit A B parallelen Kanten, zu schneiden. Da ferner A L und alle ihr parallelen Kanten normal zu A B sind, so bezeichnet ein zu O z normaler Parallelstrahl O y in y des Horizontes ihren Verschwindungspunkt; endlich schneiden nach §. 105 die Halbirungslinien O tz und O ty der Winkel P O y und P O z den Horizont in den Theilpunkten tz und ty für die mit A B und mit A L parallelen Linienſysteme. — Um nun zunächst die Perspective a des Punktes A zu finden, trägt man die in U P und U A vorliegenden normalen Abstände des letzteren von der Verticalebene und von der Bildebene in u p und u α auf der Grundlinie auf und schneidet eine von P durch u gezogene Linie durch eine andere von D^1 durch α gezogene in a. — Um hierauf die Richtungen und Längen der Perspectiven der Kanten A B und A L zu construiren, zieht man von a nach z und nach y, fertigt dann am Rande der Construction einen perspectivischen Längen-Maßstab an, um aus ihm mittels einer durch a gezogenen Horizontalen die für den Ort a gültigen Längen von 12 Fuß und von 5 Fuß entnehmen und in a β und in a λ auftragen zu können. Schneidet man dann a z durch eine von β nach tz gezogene Linie in b, so ist a b perspectivisch gleich a β; §. 155.

Digitized by Google

schneidet man a y durch eine von λ nach t$_y$ gezogene Linie in l, so ist a l perspectivisch gleich a λ, und a b ist die Perspective von A B, sowie a l die von A L. — Macht man nun noch eine durch a gezogene Lothrechte a a^1 gleich 5 Fuß, d. i. geometrisch gleich a λ, so können die Perspectiven aller anderen Kanten ohne Weiteres gezogen werden: man zieht dann nämlich von l nach z und von b nach y Linien, deren Schnittpunkt c die Perspective von C ergiebt; man legt durch l, b und c lothrechte Linien, schneidet dieselben, von a^1 nach y und nach z ziehend, in l^1 und b^1, und schneidet schließlich die durch c gezogene Lothrechte durch Linien, von b^1 nach y und von l^1 nach z gezogen, im Punkte c^1.

§. 156. Viel einfacher jedoch löst man die Aufgabe, wenn man die durch den Grundriß gebotenen Vortheile folgendermaßen benutzt: Um das aufgerichtete Prisma (Fig. 8, Taf. I) zu construiren, überträgt man die Abstände der Punkte V, N und des Punktes S (in welchem die Diagonale J G der Grundfläche die Bildebene schneidet) von P aus dem Grundrisse (verdoppelt) auf die Grundlinie der Construction in p v, p n und p s, zieht von P durch v und n Linien und schneidet diese durch eine von D^1 durch s gezogene Linie in g und i; man zieht i f und g h horizontal, zieht durch f, i, h, g und v lothrechte Linien, macht die durch v gezogene v v^1 geometrisch gleich 12 Fuß (d. i. 2 mal A B), schneidet ferner, von P durch v^1 ziehend, die durch f und g gezogenen Lothrechten in den Punkten f^1 und g^1, zieht f^1 i^1 und g^1 h^1 horizontal, und schließlich von P durch h^1 und i^1.

§. 157. Um die Perspective des liegenden Prismas entsprechend zu construiren, stellt man zuvörderst die Verschwindungspunkte y und z fest, indem man entweder im Grundrisse die Parallelstrahlen O Y und O Z zieht und die Abstände der Punkte Y und Z von P verdoppelt auf den Horizont der Construction überträgt, oder indem man — wenn das in §. 155 gezeigte Verfahren nicht angewendet werden kann, weil etwa der herabgeschlagene Gesichtspunkt außerhalb des Constructionsraumes fiele — die Abstände der Verschwindungspunkte z und y von P nach Anleitung des §. 59 berechnet. Es weichen nämlich die beiden Kanten A B und A L, die erstere um 56°, die letztere um 34° von der Verticalebene ab. Die Tangente des Winkels von 56° ist 1,4825; hiermit die gegebene Distanz von 24 Fuß multiplicirt, ergiebt für den Abstand des Punktes z von P eine Länge von 35,58 Fuß, d. i. fast gleich 35$^1/_2$ Fuß. Die Tangente des Winkels von 34° ist 0,6745; hiermit die Distanz von 24 Fuß multiplicirt, ergiebt für den Abstand des Punktes y von P eine Länge von 16,188 Fuß, d. i. beinahe 16$^1/_5$ Fuß. — Hierauf überträgt man die

Digitized by Google

Abstände der Punkte K und E, in welchen die Längenkanten die Bildebene schneiden, und der Punkte R und Q, in welchen die Verlängerungen der kurzen Kanten die Bildebene schneiden, von P, verdoppelt von p aus auf die Grundlinie der Construction und bezeichnet dadurch hier die Punkte r, k, e und q, zieht Linien von z durch e und k und schneidet diese durch Linien, von y durch r und durch q gezogen, in den Punkten l, a, b und c. Legt man durch diese Punkte und durch k und e lothrechte Linien, und macht davon k k^1 und e e^1, als in der Bildebene liegend, geometrisch gleich 5 Fuß (d.i. 2 mal A L) und zieht von z durch k^1 und e^1, so schneidet man die anderen Lothrechten in den Punkten b^1, a^1, c^1 und l^1, worauf, um die Perspective zu vollenden, nur noch die nach y gerichteten Linien $b^1 c^1$ und $a^1 l^1$ zu ziehen sind.

§. 158. Lägen jedoch bei diesem Verfahren die Verschwindungspunkte y und z zu weit außerhalb des Constructionsraumes, so daß man sich ihrer nicht bedienen könnte, so müßte man die Perspectiven der Punkte A, B, C und L einzeln so construiren, wie dies in den vorhergehenden Paragraphen stets mit dem Punkte A geschehen ist. Man müßte also von den genannten Punkten im Grundrisse normale Linien (Ordinaten) gegen die Bildebene ziehen, in dieser dadurch die Punkte U, X, T und W bezeichnen, die Abstände dieser von P (die Abscissen) auf die Grundlinie der Construction (Fig. 8) von p aus verdoppelt übertragen und dadurch die Punkte u, x, t und w bezeichnen; man müßte durch diese sämmtlich nach P gerichtete Linien ziehen und auf diesen die perspectivischen Längen jener Normalen construiren, indem man, um z. B. x b zu finden, die Länge X B verdoppelt auf die Grundlinie in x β überträgt und x P durch eine von β nach D^1 gezogene Linie in b schneidet, und, um die Länge t c zu finden, die Länge T C verdoppelt in t γ der Grundlinie überträgt und dann t P durch γ D^1 in c schneidet u. s. w. — Sind so die Eckpunkte a, b, c und l gefunden und die sie verbindenden Kanten gezogen, so bestimmt man die verschiedenen perspectivischen Höhen der durch diese Punkte nunmehr zu ziehenden lothrechten Kanten, indem man etwa in e, oder, wie in der Figur geschehen, in k ein 5 Fuß hohes Loth k k^1 errichtet, von P durch k und k^1 Linien zieht und dadurch einen perspectivischen Höhenmaßstab für das Maß von 5 Fuß für alle Orte der Bildebene schafft, ähnlich dem in den §§. 83 und 84 empfohlenen. Zieht man nämlich von a horizontal bis a^2 in der von P durch k gezogenen Linie und legt durch a^2 eine Lothrechte, welche die von P durch k^1 gezogene in a^3 schneidet, so ergiebt $a^2 a^3$ die perspectivische Höhe für die lothrechte Kante a a^1 des Prismas. So auch hat man, um die perspectivische Höhe $c^2 c^3$ der in c stehenden lothrechten

Digitized by Google

Kante zu finden, von c bis c^2 horizontal zu ziehen, und durch c^2 die Lothrechte $c^2 c^3$ zu ziehen. Nachdem man in gleicher Weise die perspectivischen Höhen der Kanten b b^1 und l l^1 bestimmt, können die die Punkte a^1, b^1 c^1 und l^1 verbindenden Kanten gezogen werden. Es ist dies ein Verfahren, welches im Grunde auf dem in §. 124 Gesagten beruht.

§. 159. Soll die Aufgabe unter der Voraussetzung ausgeführt werden, daß der Constructionsraum so eng begrenzt ist, wie das Fig. 9 (Taf. 2) einschließende Rechteck zeigt, so daß also die Verschwindungspunkte, ein Theilpunkt t_y und der Distanzpunkt D^1 nicht benutzt werden können, so sind, um zunächst das aufgerichtete Prisma zu construiren, die Maße P'V, P S und P N aus dem Grundrisse, Fig. 6, verdoppelt auf die Grundlinie der Construction in p v, p s und p n zu übertragen und Linien von P durch v und durch n zu ziehen. Bezeichnet man hierauf in $s/_3$ ein Drittel von n s und dem entsprechend in $D/_3$ ein Drittel der gegebenen Distanz, und zieht von $D/_3$ durch $s/_3$ eine Linie bis i, wodurch n i perspectivisch gleich n s gemacht ist (wegen der diagonalen Richtung der Linie J G in dem Quadrate F G H J müssen N J und N S gleich sein), so ist i die Perspective des Punktes J. Zieht man alsdann von i durch s bis g, und darauf i f und g h horizontal, so ist i f g h die Perspective der unteren Grundfläche des Prismas. Zieht man nun noch durch ihre Eckpunkte und durch v lothrechte Linien, macht v v^1 gleich 12 Fuß des Maßstabes, schneidet die in f und g stehenden Lothe durch eine von P durch v^1 gezogene Linie in den Punkten f^1 und g^1, so bedarf es keiner weiteren Anleitung, um die Perspective der oberen Grundfläche zu vollenden.

§. 160. Um die Perspective des liegenden Prismas zu construiren, ist zunächst die Perspective des Punktes A wie in §. 155 zu suchen, mit dem Unterschiede, daß hier die $^1/_3$-Distanz angewandt und dem entsprechend auch nur $^1/_3$ von dem verdoppelten Maße U A auf der Grundlinie aufgetragen wird. — Um die Richtungen der Perspectiven der Kanten A B und A L zu finden, ist gemäß §. 120 hier etwa $^1/_6$-Distanz in P $O/_6$ auf der Verticale aufzutragen (es ist dies in der Figur oberhalb des Horizontes geschehen, um die Construction so wenig als möglich durch Hülfslinien zu durchschneiden); es sind an letztere in $O/_6$ die 56° und 34° betragenden Abweichungswinkel der Linien A B und A L von der Verticale anzutragen und ist dadurch der Horizont in $z/_6$ und $y/_6$ zu schneiden. Bezeichnet man hierauf auf einer von a nach P gezogenen Linie $^1/_6$ ihrer Länge in $a/_6$, legt durch diesen Punkt eine Horizontale, macht auf ihr $a/_6$ r gleich P $z/_6$, und $a/_6$ q gleich P $y/_6$, und zieht dann von a durch r und durch q Linien, so sind diese die Richtungen der gesuchten Perspectiven. —

Digitized by Google

Um nun auf der Linie a r die 12 Fuß betragende Länge der Kante A B perſpectiviſch in a b darzuſtellen, benutzt man den Theilpunkt tz, welcher hier noch innerhalb des Conſtructionsraumes liegt (conſtruirt iſt derſelbe dadurch, daß die Länge z/6 O/6 um z/6 in den Horizont in z/6 t/6 übertragen und dann das Maß P t/6 verſechsfacht in P tz aufgetragen wurde); man trägt auf einer durch a Horizontalen das aus dem Maßſtabe neben der Conſtruction entnehmbare, für den Ort a gültige Maß von vorläufig nur 6 Fuß (da das Maß von 12 Fuß die Grenzen des Conſtructionsraumes überſchreiten würde) in a δ auf und ſchneidet die über r verlängerte Linie a r durch eine andere von δ nach tz gezogene in d, wonach a d perſpectiviſch gleich 6 Fuß iſt. Macht man nun noch d b perſpectiviſch gleich a d, ſo iſt a b perſpectiviſch gleich 12 Fuß. Zu dem Zweck iſt nach §. 143 durch d eine Horizontale zu legen, dieſelbe durch eine von a nach einem beliebigen Punkte m des Horizontes zu ziehende Linie in o zu ſchneiden, es iſt das Maß d β geometriſch gleich d o zu machen und die über r verlängerte Linie a r durch eine andere, von β nach m gezogen, in b zu ſchneiden. — Da der Theilpunkt für die Linie a q außerhalb des Conſtructionsraumes fällt, muß das perſpectiviſche Auftragen des Maßes von 5 Fuß auf dieſelbe nach §. 141 geſchehen und demnach der 56° große Abweichungswinkel der Linie A L von der Bildebene an eine durch a gelegte Horizontale a λ angetragen, der angetragene Schenkel a π gleich 5 Fuß, wie ſie der Maßſtab für den Ort a ergiebt, gemacht werden; es muß von π eine Normale π λ auf die a λ gefällt und die über q verlängerte a q durch eine von λ nach P gezogene Linie in l geſchnitten werden, wonach a l perſpectiviſch gleich 5 Fuß iſt. Auf eine kürzere Art hätte man die Perſpectiven b und l der Punkte B und L gefunden, wenn man wie in §. 158 im Grundriſſe von B und L aus Normalen B X und L W auf die Bildebene gefällt, die Maße P X und P W verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p x und p w übertragen und die über r und q verlängerten Linien a r und a q durch Linien, von x und von w nach P gezogen, in den Punkten b und l geſchnitten hätte. — Die Perſpectiven der Kanten B C und L C kann man ziehen, wenn man zuvor die Perſpective des Punktes C wie eben die der Punkte B und L conſtruirt, nämlich im Grundriſſe C T normal zur Bildebene zieht, das Maß P T verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p t überträgt, von P durch t zieht, dann γ t gleich 1/3 des verdoppelten Maßes C T macht und t P durch eine von γ nach D/3 gezogene Linie in c ſchneidet. — Die verſchiedenen perſpectiviſchen Höhen der nunmehr durch die Punkte a, b, c und l zu ziehenden lothrechten Kanten ergeben ſich aus dem Maßſtabe, wenn man

Digitized by Google

von jenen Punkten Horizontalen durch dieſen zieht und daraus das 5 Fußmaß für jede Kante entnimmt. — Schließlich ſind a^1 und c^1 mit b^1 und l^1 durch gerade Linien zu verbinden.

§. 161. Endlich erſcheint es zweckmäßig, bei dieſer Aufgabe auch noch das Verfahren zu zeigen, welches der ſchon in §. 44 erläuterten Grundrißmethode entſpricht, weil ſich aus demſelben Vortheile für die Conſtruction im Allgemeinen und beſonders für die Conſtruction panoramatiſcher Bilder herleiten laſſen.

In Fig. 10 (Taf. 2) liegt in dem Rechtecke A B C L die in Fig. 6 gegebene Grundrißprojection des liegenden Prismas in einem willkührlich vergrößerten Maßſtabe vor; $\beta\lambda$ iſt dazu die Grundrißprojection der Bildebene, O die des Geſichtspunktes. Darüber iſt in dem Rechtecke $A^1 A^2 C^2 C^1$ die Aufrißprojection deſſelben Körpers, in $P^1 p$ die der Bildebene, in $C^1 S$ die der Grundebene und in O^1 die des 9 Fuß hoch über der Grundebene gegebenen Geſichtspunktes dargeſtellt.

Nach der Grundrißmethode iſt es nun erforderlich, ſowohl im Grundriſſe als im Aufriſſe aus dem Geſichtspunkte die Geſichtslinien nach ſämmtlichen Eckpunkten des Körpers zu ziehen; es ergeben dann die Schnittpunkte der Geſichtslinien mit der Bildebene im Grundriſſe die in die Conſtruction (Fig. 11, Taf. 2) zu übertragenden Abſtände der Perſpectiven der Eckpunkte von der Verticale, während die Schnittpunkte der Geſichtslinien mit der Bildebene im Aufriſſe für die Conſtruction die Abſtände der Perſpectiven der entſprechenden Punkte vom Horizonte ergeben. Um z. B. die Perſpective der durch den Punkt A im Grundriſſe bezeichneten lothrechten Kante zu finden, hat man alſo das Maß $P\alpha$ des Grundriſſes in $P\alpha$ der Conſtruction (Fig. 11) zu übertragen, hier durch α eine Lothrechte zu ziehen und in dieſer αa^2 und αa^1 geometriſch gleich $P^1\alpha^2$ und $P^1\alpha^1$ des Aufriſſes (Fig. 10) zu machen. Um die Perſpective der Kante C des Grundriſſes zu finden, iſt aus dieſem das Maß $P\gamma$ in $P\gamma$ der Conſtruction zu übertragen, hier durch γ eine Lothrechte zu ziehen und in dieſer γc^2 und γc^1 gleich $P^1\gamma^2$ und $P^1\gamma^1$ des Aufriſſes zu machen u. ſ. w. — Die Perſpectiven der horizontalen Kanten ergeben ſich dann von ſelbſt dadurch, daß man Punkte, wie a^2 und a^1 mit b^2 und b^1 durch gerade Linien verbindet.

§. 162. Vergleicht man nun die in den §§. 154—161 gezeigten Conſtructionsarten mit einander, ſo ergiebt ſich auf den erſten Blick, daß die in den §§. 156—158 vorgeführten, welche das Vorhandenſein eines Grundriſſes vorausſetzen, und davon namentlich die erſtere, die einfachſten ſind; daß ferner das in §. 154 eingeſchlagene Ver-

Digitized by Google

fahren sich besonders für solche Fälle eignet, in welchen ein Grundriß nicht vorliegt und man vielmehr nach wörtlichen Beschreibungen der Gestalt und der Dimensionen der gegebenen Objecte und ihrer Lage zur Bildebene construiren muß. Bei dem in §. 159 gezeigten Verfahren wird die Bildfläche mit sehr vielen Hülfslinien und Zirkelstichen bedeckt und kommt man häufig in den Fall, die Richtung von Linien nur durch Punkte feststellen zu können, welche zu dicht neben einander liegen, als daß die Richtigkeit der Richtung der so construirten Linien nicht bezweifelt werden müßte. Das in §. 161 eingeschlagene Verfahren ist wegen seiner Vorbereitungen zwar umständlich, bietet jedoch, wie später folgende Aufgaben zeigen werden, mancherlei Vortheile, zumal man die hier gezeigte Anwendung des Aufrisses durch andere Constructionen ersetzen kann. Besonders zuverlässig und nützlich ist dieses Verfahren, wie schon oben ausgesprochen, bei der Construction von Perspectiven auf der gekrümmten Panorama-Bildfläche.

Hiernach muß im Allgemeinen dem in §. 156 gezeigten Verfahren der Vorzug gegeben werden. Fast immer ist ein Grundriß des darzustellenden Objectes schon vorhanden, oder doch schon deshalb anzufertigen nöthig, um Bildebene und Gesichtspunkt dazu orientiren zu können. In jedem Falle lohnt sich die Mühe, die seine Anfertigung erfordert, durch Abkürzung und Genauigkeit der Construction. Sollten aber bei diesem empfohlenen Verfahren Verschwindungspunkte so weit außerhalb des Constructionsraumes fallen, daß dies auch durch ein Construiren in verkleinertem Maßstabe behufs nachheriger vergrößerter Uebertragung auf die eigentliche Bildfläche nicht zu umgehen ist, dann wird sich die in §. 161 gezeigte Anwendung der Hülfsconstructionen von selbst empfehlen.

Es wird demnach in der Folge, wo nicht auch ein Aufriß des gegebenen Objectes erforderlich ist, stets wenigstens der Grundriß gegeben sein und die Construction meist den in §. 156 gezeigten Weg nehmen; doch soll, wo dies erwähnenswerth erscheint, jedesmal auch der Weg für die anderen Constructionsarten gezeigt werden.

Digitized by Google

Beispiel 4.

§. 163. **Aufgabe.** In Fig. 12 (Taf. 3) liegt der geometrische Grundriß eines Theiles eines **Fußbodens** vor, welcher aus rhombenförmigen Steinen zusammengesetzt ist, deren je 3 zu einem regelmäßigen Sechseck von je 1 Fuß Seitenlänge geordnet sind. In der Linie YZ ist der Grundriß der Bildebene, im Punkte O der des Gesichtspunktes bei 10 Fuß Distanz gegeben; die Höhe des Auges betrage 5 Fuß — es soll die Perspective des vorliegenden Theiles des Fußbodens in einem $1\frac{1}{2}$ mal größeren Maßstabe construirt werden.

§. 164. **Ausführung.** Faßt man die in dem Fußboden vorkommenden Fugenrichtungen an irgendeinem einzelnen der Sechsecke, welche ihn bilden, z. B. an dem Sechseck A B C E F G ins Auge, so findet man, daß hier 3 Systeme von horizontalen Linien vorliegen: 1) solche Linien, wie A G, B H und C E, zu welchen O Y der Parallelstrahl und demnach Y der Verschwindungspunkt ist, 2) Linien wie G F, H E und B C, zu welchen O Z der Parallelstrahl und Z der Verschwindungspunkt ist, 3) Linien wie B A, H G und E F, zu welchen der Parallelstrahl die Bildebene in einem sehr entfernten Punkte schneiden würde, deren Verschwindungspunkt aber auch entbehrlich ist, da alle nach ihm gerichteten Linien doch gezogen werden können, wenn man nach vorangegangener Construction der beiden anderen Liniensysteme die entsprechenden Schnittpunkte derselben durch Linien verbindet. — Zunächst muß, weil in der Aufgabe $1\frac{1}{2}$ malige Vergrößerung vorgeschrieben worden, ein geometrischer Vergrößerungsmaßstab, wie er neben Fig. 13 (Taf. 3) vorliegt, angefertigt werden und theilt man zu dem Zweck eine beliebig gerichtete und beliebig lange Linie $0, 1\frac{1}{2}$ in 3 gleiche Theile, wie dies die Punkte $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ angeben, und zieht hierauf durch die Punkte 1 und $1\frac{1}{2}$ zwei beliebig gerichtete parallele Linien. Trägt man alsdann auf die durch Punkt 1 gezogene Linie irgendein Maß, beispielsweise das Maß n q auf und zieht von O Linien durch n und q bis zu n^1 und q^1 in der durch $1\frac{1}{2}$ gezogenen Linie, so ist das Maß $n^1 q^1$ anderthalbmal größer als das Maß n q. Auf diese Weise wird hier nun jedes aus dem Grundrisse auf die Grundlinie der Construction zu übertragende Maß zuvor zu vergrößern sein.

Nachdem man hiernach in der Construction (Fig. 13) den Horizont, 5 Fuß darunter die Grundlinie und außerdem die Verticale gezogen, den Hauptpunkt P und den Grundpunkt p bezeichnet, und die Entfernungen P Y und P Z der Verschwindungspunkte Y und Z von P aus dem Grund-

Digitized by Google

risse in entsprechender Vergrößerung in Py und Pz auf den Horizont übertragen, verlängert man im Grundrisse sämmtliche Steinfugen, mit Ausnahme der wie BA gerichteten, bis zu ihren Schnittpunkten (wie z. B. J, K, L und M, N, Q) mit der Bildebene; überträgt dann die Entfernungen dieser Schnittpunkte von P, also z. B. PJ, PK, PL und PM, PN, PQ anderthalbmal vergrößert auf die Grundlinie der Construction in pi, pk, pl und pm, pn, pq und zieht von Punkten wie i, k und l Linien nach z, von Punkten aber wie m, n und q Linien nach y. Verbindet man hierauf die entsprechenden Schnittpunkte dieser Linien mit einander durch andere Linien, also z. B. e mit f, h mit g und b mit a, so entstehen die Perspectiven sämmtlicher Sechsecke des Fußbodens wie hier die des Sechsecks ABCEFG entstanden ist.

Während es bei dem in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Muster des Fußbodens zweckmäßig war, die Schnittpunkte der bis in die Bildebene verlängerten Fugen der Steine zu benutzen, würde es sich bei einem complicirteren Muster, wie z. B. bei dem in Fig. 14 (Taf. 4) gegebenen, empfehlen, das Netz von Hülfslinien, welches man schon zur geometrischen Construction der den Fußboden bildenden Figuren brauchen würde, perspectivisch zu construiren, indem man die Schnittpunkte dieser Hülfslinien mit der Bildebene (Y) (Z) aus dem Grundrisse wieder auf die Grundlinie der Construction überträgt, von diesen Punkten Linien nach den Verschwindungspunkten y und z der beiden Hülfsliniensysteme zieht und in dem so entstandenen perspectivischen Hülfsliniennetz die dem Grundrisse entsprechenden Punkte mit einander durch Linien verbindet. §. 165.

Beispiel 5.

Aufgabe. In Fig. 15 (Taf. 3) liegt der Aufriß eines **Monumentes** nebst Maßstab, in Fig. 16 der Grundriß desselben vor. In letzterem ist die Bildebene als durch die Achse A des Monumentes stehend, 21 Fuß von P entfernt der Gesichtspunkt O gegeben; die Höhe des Auges betrage 7 Fuß — es soll die Perspective des Monumentes in doppeltem, d. h. in dem über der Construction, Fig. 17, gegebenen Maßstabe construirt werden. §. 166.

Da die Grundflächen der einzelnen Theile des Monumentes sämmtlich Quadrate bilden, so möge jedes einzelne derselben durch einen besonderen Buchstaben, wie dies im Aufrisse, Fig. 15, angedeutet ist, bezeichnet werden, seine vier Eckpunkte jedoch mögen, wie dies der Grundriß erläutert, durch die den Buchstaben beigefügten Zahlen 1, 2, 3, 4 unterschieden werden,

Digitized by Google

derart, daß die linke vordere Ecke des Quadrates B z. B. durch B^1, die rechte vordere Ecke durch B^2, die rechte hintere Ecke durch B^3, die linke hintere Ecke durch B^4 bezeichnet ist.

§. 167. **Ausführung.** Nachdem man in der Construction (Fig. 17, Taf. 3), den Horizont (y) (z), der Aufgabe gemäß 7 Fuß darunter die Grundlinie, und durch beide Linien die Verticale gezogen, den Hauptpunkt P und den Grundpunkt p bezeichnet, werden die Verschwindungspunkte y und z der hier vorkommenden beiden horizontalen Liniensysteme, des wie $B^1 B^4$ (Fig. 16) und des wie $B^1 B^2$ gerichteten, festgestellt und zwar, da der herabgeschlagene Gesichtspunkt in der Construction zu weit außerhalb des Constructionsraumes liegt, nach §. 111, durch Anwendung eines Bruchtheiles, hier etwa eines Drittels der Distanz. Da zufällig der (Grund-) Punkt p = 7 Fuß von P in der Verticale gelegen ist, so kann er gleich als $^1/_3$-Distanz angewendet werden, und wird deshalb an die Verticale in p der 38° große Abweichungswinkel der wie $B^1 B^4$ gerichteten Linien angetragen, der Horizont in y_3 geschnitten, das Maß $P y_3$ verdreifacht auf letzterem aufgetragen und dadurch der links außerhalb der Figur liegende Verschwindungspunkt y festgestellt. Ebenso wird der 52° große Abweichungswinkel der wie $B^1 B^2$ gerichteten Linien von der Verticale an diese in p angetragen, der Horizont in z_3 geschnitten, das Maß $P z_3$ auf dem letzteren aufgetragen und dadurch der Verschwindungspunkt z, welcher ebenfalls außerhalb der Figur fällt, bestimmt. Halbirt man alsdann den Winkel y_3 p P durch die Linie p t_3 und verdreifacht das Maß P t_3, so ergiebt sich tz als Theilpunkt für die in z verschwindenden Linien; halbirt man den Winkel y_3 p z_3 durch die Linie p dg_3 und verdreifacht das Maß P dg_3 auf dem Horizonte, so ergiebt sich *dg* als Diagonalpunkt.

Da im Grundrisse die Bildebene durch die Achse des Monumentes stehend gegeben ist, so fällt in der Construction die Perspective a des Fußpunktes A der Achse in die Grundlinie, und zwar ist hier pa wegen der verlangten Verdoppelung des Maßstabes gleich 2 mal PA des Grundrisses. Zieht man nun aa^1 lothrecht und macht sie gleich 2 mal AA^1 des Aufrisses, so ist dies die Perspective der Achse.

Hinsichtlich des weiteren Verfahrens bei der Construction ist zuvor Folgendes anzuführen:

§. 168. Hat man, wie in der vorliegenden Aufgabe, die Perspective eines Objectes zu construiren, dessen obere Theile Formen enthalten, welche von denen der unteren Theile verschieden sind, oder fällt die Perspective eines Objectes dem Horizonte voraussichtlich so nahe,

Digitized by Google

daß die zur Construction nöthigen Hülfslinien sich wenig von der horizontalen Richtung unterscheiden und daher ihre Schnittpunkte nicht sicher erkennbar sind, so ist es vortheilhaft, lothrecht über oder unter der zu construirenden Perspective des Objectes zuvor die Perspective des Grundrisses desselben (den perspectivischen Hülfsgrundriß) zu construiren und die Punkte des letzteren unter Anwendung lothrechter Linien zur Construction des perspectivischen Aufrisses, der eigentlichen Perspective des Objectes, zu benutzen. Zur Construction dieses Hülfsgrundrisses nimmt man eine besondere Hülfsgrundebene an, deren Lage über dem Horizonte oder auch wohl unterhalb der eigentlichen Grundebene den Vortheil bietet, daß wegen der in ihr stärkeren Divergenz der Hülfslinien Schnittpunkte sicherer zu erkennen sind. Außerdem wird dabei die Perspective des Objectes selbst weniger durch Hülfslinien durchkreuzt.

Um Punkte des perspectivischen Hülfsgrundrisses als solche vorweg erkennbar zu machen, werden die sie bezeichnenden Buchstaben in der Folge mit einer Null, wie z. B. a^0 bezeichnet sein, oder wie $a^{1\circ}$, wenn der Buchstabe schon mit einer Zahl, wie a^1, versehen wäre.

§. 169. Zur Construction zurückkehrend denkt man sich nun die Bildebene unterhalb bis zu einer circa $5\frac{1}{2}$ Fuß unter der eigentlichen Grundebene angenommenen Hülfs-Grundebene, in welcher $u^0 w^0$ die (Hülfs-) Grundlinie sein würde, und bis a^0 in dieser die Achse verlängert, und construirt um a^0 die Perspective des in Fig. 16 gegebenen geometrischen Grundrisses etwa folgendermaßen: Nachdem man im Grundrisse durch den Achspunkt A eine der $B^1 B^2$ parallele Linie $B^5 B^6$ gezogen, zieht man durch den Punkt a^0 des perspectivischen Grundrisses eine nach z gerichtete Linie $b^{5\circ} b^{6\circ}$; man überträgt die Abstände der Punkte B^5, D^5, F^5 u. s. w. (in welchen die Linie $B^5 B^6$ die Grundrißquadrate der Stufen und der anderen Theile des Monumentes schneidet) von A verdoppelt von a^0 aus auf die Hülfs-Grundlinie $u^0 w^0$ in $a^0 \beta$, $a^0 \delta$, $a^0 \varphi$ u. s. w., und schneidet hier, von dem Theilpunkte tz durch β, δ, φ u. s. w. ziehend, die vorher gezogene Linie $b^{5\circ} b^{6\circ}$ in den Punkten $b^{5\circ}$ und $b^{6\circ}$, $d^{5\circ}$ und $d^{6\circ}$, $f^{5\circ}$ und $f^{6\circ}$ u. s. w., wodurch die Abstände dieser Punkte von a^0 den Abständen der entsprechenden Punkte des geometrischen Grundrisses von A perspectivisch gleich gemacht sind. Zieht man hiernach von y durch die Punkte $b^{5\circ}$, $b^{6\circ}$, $d^{5\circ}$, $d^{6\circ}$, $f^{5\circ}$, $f^{6\circ}$ u. s. w. Linien und schneidet sie durch eine von dem Diagonalpunkte *dg*

Digitized by Google

durch den Achspunkt a° gezogene Linie in $b^{1\circ}$ und $b^{3\circ}$, $d^{1\circ}$ und $d^{3\circ}$ u. s. w., so sind dies Punkte, durch welche sogleich die nach z gerichteten Linien $b^{1\circ}\,b^{2\circ}$, $b^{4\circ}\,b^{3\circ}$, $d^{1\circ}\,d^{2\circ}$, $d^{4\circ}\,d^{3\circ}$ u. s. w. zur Vervollständigung der Perspectiven der Grundrißquadrate gezogen werden können. Auf gleiche Weise werden die Hülfsgrundriß-Perspectiven aller anderen im geometrischen Grundrisse vorliegenden Quadrate und auch derer, welche die Kreuzesarme bilden, construirt.

Um nach dieser Vorbereitung die eigentliche Perspective des Monumentes auszuführen, werden auf der Perspective $a\,a^1$ der Achse desselben die aus dem Aufrisse (Fig. 15) entnehmbaren Höhenmaße der einzelnen Theile von a aus in a c, a d, a e u. s. w. bis zur Spitze a^1 verdoppelt aufgetragen, es werden durch sämmtliche dadurch bezeichneten Punkte a, c, d, e u. s. w. Linien vom Diagonalpunkte *dg* aus gezogen, und diese durch lothrechte Linien, welche man durch die entsprechenden Punkte des Hülfsgrundrisses legt, geschnitten; also die von *dg* durch a und durch c gezogenen Diagonalen werden durch zwei durch die Punkte $b^{1\circ}$ und $b^{3\circ}$ gelegte Lothrechte in b^1 und c^1 und in b^3 und c^3 geschnitten, die durch d und e gezogenen Diagonalen werden ferner durch zwei durch $d^{1\circ}$ und $d^{3\circ}$ gelegte Lothrechte in d^1 und e^1 und in d^3 und e^3 geschnitten u. s. f. Zieht man hierauf von den Verschwindungspunkten y und z Linien durch b^1, c^1, d^1, e^1 u. s. w. und durch b^3, c^3 u. s. w., so ergeben diese die Kanten $b^1\,b^4$, $b^3\,b^2$, $b^1\,b^2$, $b^3\,b^4$, $c^1\,c^4$, $c^3\,c^2$ u. s. w., wonach die lothrechten und die schiefen Kanten, wie $c^1\,d^1$ z. B., gezogen werden können. Die Richtigkeit der Kanten, wie $b^2\,c^2$ und $b^4\,c^4$, kann schließlich noch durch Lothe, durch $b^{2\circ}$ und $b^{4\circ}$ gelegt, controlirt werden. — Das Construiren der Kreuzesarme, welche aus Würfeln bestehen, wird durch die aus der Construction ersichtliche Anwendung des Diagonalpunktes *dg* vereinfacht. Man construirt zunächst die Perspective des dem Kreuzesstamme angehörigen Quadrates T, welches mit den unteren Flächen der Würfel in gleicher Höhe liegt, verlängert die vier Seiten dieser Perspective und schneidet diese Verlängerungen durch entsprechend gezogene Diagonalen, oder auch durch Lothrechte, welche man durch die entsprechenden Punkte des Hülfsgrundrisses zieht.

§. 170. Der Vortheil, welchen hier die Benutzung der Achse des Objectes zur Auftragung der Höhenmaße bot, muß auch bei Aufgaben anderer Art stets ins Auge gefaßt werden, und zwar muß dieses Auftragen, wenn nicht an irgendeiner lothrechten Kante des Objectes selbst, welche in der Folge dann die Hauptkante heißen möge, doch an der Verlängerung einer solchen Kante, oder an einer

Digitized by Google

anderweitig im Objecte unter Rücksichtnahme auf den Maßstab vortheilhaft auserſehenen lothrechten Linie geſchehen.

Beiſpiel 6.

Aufgabe. In Fig. 18 (Taf. 3) liegt abermals der Grundriß des in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen **Monumentes** vor; die Stellung der Bildebene iſt, parallel zwei Seiten deſſelben, in der Linie PB^6 gegeben; O iſt die Projection des Geſichtspunktes bei abermals 21 Fuß Diſtanz; die Höhe des Auges betrage wieder 7 Fuß — es ſoll die Perſpective des Monumentes in doppeltem, d. i. in dem Maßſtabe der Fig. 17 conſtruirt werden. §. 171.

Ausführung. Nachdem in Fig. 19 Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen und 21 Fuß von P rechts der Diſtanzpunkt D^1 (in die Figur nicht mit aufgenommen) bezeichnet worden, wird auf der Grundlinie die Perſpective a des Fußpunktes A der Achſe des Monumentes in einem 2 mal PA des Grundriſſes gleichen Abſtande von p aufgetragen, durch a die Perſpective aa^1 der Achſe lothrecht gezogen, und um dieſelbe ein lothrechter geometriſcher Durchſchnitt des Monumentes, wie derſelbe in der durch die Punkte ... $c^6 b^6 b^5 c^5 d^5 e^5 f^5$ u. ſ. w. theilweiſe bezeichneten Figur vorliegt, in dem dem Orte a zukömmlichen Maßſtabe gezeichnet. — Dem Grundriſſe nach iſt das wie $B^1 B^4$ gerichtete Horizontallinien-Syſtem normal zur Bildebene, hat alſo P zum Verſchwindungspunkt; das andere Syſtem, wie $B^1 B^2$ gerichtet, iſt parallel der Bildebene, deshalb in der Conſtruction parallel der Grundlinie, d. i. horizontal. Um nun die Perſpective des in der Grundebene liegenden Quadrates B zu conſtruiren, zieht man von P Linien durch b^5 und b^6, ſchneidet dieſelben durch eine von D^1 durch a gezogene Diagonale in b^3 und b^1 und zieht $b^3 b^4$ und $b^1 b^2$ horizontal. So auch wird die Perſpective des Quadrates C conſtruirt, indem man von P durch c^5 und c^6 gezogene Linien durch eine von D^1 durch c gezogene Diagonale in c^3 und c^1 ſchneidet und dann $c^3 c^4$ und $c^1 c^2$ horizontal zieht. Dieſes mit allen anderen horizontal liegenden Quadraten des Monumentes vorzunehmende Verfahren findet nur Schwierigkeit bei den ungefähr in der Höhe des Horizontes liegenden Quadraten, wie etwa Q und R, weil in ihren Perſpectiven die Schnittpunkte der Diagonalen mit den nach P gerichteten Linien wegen ihrer Nähe am Horizonte nicht ſicher erkennbar ſind, und bedarf es darum hier der theilweiſen Anwendung eines perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes. Nachdem man deshalb die Perſpective der Achſe bis zu Punkt a° in einer unterhalb der §. 172.

Digitized by Google

eigentlichen Grundebene' beliebig angenommenen Hülfs-Grundebene verlängert hat, macht man hier $a^\circ q^{5\circ}$ und $a^\circ q^{6\circ}$ gleich $q\,q^5$ und $q\,q^6$, zieht von P Linien durch $q^{5\circ}$ und $q^{6\circ}$, schneidet dieselben durch eine von D^1 durch a° gezogene Diagonale in $q^{3\circ}$ und $q^{1\circ}$, zieht $q^{3\circ}q^{4\circ}$ und $q^{1\circ}$ und $q^{2\circ}$ horizontal, und schneidet nach dieser Vorbereitung die in der eigentlichen Perspective von P durch q^5, q^6, r^5 und r^6 zu ziehenden Linien durch Lothrechte, welche man durch die Punkte $q^{1\circ}$, $q^{2\circ}$, $q^{3\circ}$ und $q^{4\circ}$ legt. — Die Perspectiven der aus Würfeln bestehenden Kreuzesarme findet man wie im vorhergehenden Beispiele, indem man zunächst die Perspective des dem Kreuzesstamme angehörenden Quadrates T, welches mit den unteren Flächen der Kreuzesarme in derselben Ebene liegt, construirt, die vier Seiten dieser Perspective verlängert und die Verlängerungen durch entsprechend gezogene Diagonalen schneidet.

Beispiel 7.

§. 173. **Aufgabe.** In Fig. 21 (Taf. 2) sind außer dem Horizonte PD^1, der Grundlinie pg°, der Verticale $P(O)$, dem Hauptpunkte P und dem Distanzpunkte D^1 die Stücke hh^1, aa^1 und gg^1 der Perspectiven der drei sichtbaren lothrechten Kanten eines in Fig. 20 im Grundrisse in halbem Maßstabe vorliegenden quadratischen **Pfeilers** HAGJ gegeben, dessen Vorderfläche AG hier mit der Bildebene zusammenfällt. Außerdem ist an der bis f^1 verlängerten Kante aa^1 (Fig. 21) in der Figur $a^1b^2c^2e^2f^2f^1$ das in der Ebene der Vorderfläche (in der Bildebene), im Grundrisse also wie AF^2 liegende Profil des den Pfeiler ringsum **deckenden Gesimses** gegeben — es soll die Perspective des Gesimses construirt werden.

§. 174. **Ausführung.** Der hier an einer Kante des Objectes gegebene, mit der Bildebene zusammenfallende Gesimsdurchschnitt ist in ähnlicher Weise zu verwenden, wie der in der vorhergehenden Aufgabe erst neben der Achse construirte, und ist es am förderlichsten, ihn sofort zur Construction der Perspective der Gehrung über der Kante aa^1 zu benutzen. Die vier Gehrungen liegen hier offenbar in zwei lothrechten, zu einander rechtwinkligen Ebenen (Gehrungsebenen), welche die rechten Winkel, unter denen die lothrechten Pfeilerflächen an einander stoßen, halbiren, d. h. mit ihnen Winkel von 45° bilden, während sie hier zugleich durch die Achse X des Pfeilers gehen. Die Grenzlinien dieser Gehrungsebenen würden deshalb lothrechte, durch die Distanzpunkte D und D^1 gehende Linien,

Digitized by Google

die Hauptpunkte darin aber, in welchen alle diesen Ebenen angehörigen horizontalen Linien verschwinden, müssen D und D^1 selbst sein. Um also aus dem gegebenen Profile zuerst Punkte der Gehrung über der Kante $a\,a^1$ zu construiren, hat man, wegen der zur Bildebene normalen Richtung der Pfeilerfläche A H, zunächst von P Linien durch die Punkte f^2, e^2, c^2 u. s. w. zu ziehen und dieselben durch andere diagonal gerichtete Linien, von D^1 durch f^1, e^1, c^1 u. s. w. gezogen, in den Punkten f, e, c u. s. w. zu schneiden, wonach man durch letztere die sogenannte Gehrungslinie zeichnen kann. Die zuletzt gezogenen Linien schneiden die Perspective x φ der Achse des Pfeilers in den Punkten φ, ε, γ u. s. w.; zieht man durch diese Punkte Linien von dem andern Distanzpunkte D aus, so schneidet man damit die von f^2, e^2, c^2 u. s. w. nach P gezogenen Gesimskanten in den Punkten n, t, r u. s. w., und die von f, e, c u. s. w. horizontal zu ziehenden Kanten in m, s, q u. s. w., und kann nun durch die so bestimmten Punkte auch die Gehrungslinien über den Kanten $h\,h^1$ und $g\,g^1$ des Pfeilers zeichnen. — Läge der zweite Distanzpunkt D zu entfernt, als daß man ihn benutzen könnte, so müßte man die in der verlängerten Kante $a\,a^1$ gegebenen Punkte f^1, e^1, c^1 u. s. w. vermittelst horizontaler Linien auf die verlängerte Kante $g\,g^1$ in die Punkte f^4, e^4, c^4 u. s. w. übertragen, und würde dann durch diese Punkte und die ihnen entsprechenden φ, ε, γ u. s. w. der Achse Linien zu ziehen haben und dadurch die vorhandenen horizontalen Gesimskanten ebenfalls in den Punkten n, t, r u. s. w. und in m, s, q u. s. w. schneiden.

Der der Construction unterhalb beigefügte perspectivische Hülfsgrundriß veranschaulicht das Gesagte deutlicher und zeigt zugleich, auf welche andere Art man durch ihn zu Punkten wie n, t, r und m, s, q gelangen konnte.

Die stark verzerrte Perspective der Gehrungslinie über der Kante $g\,g^1$ kann als ein Beleg zu der in §. 21 enthaltenen Regel dienen, daß man nicht, wie es in der Figur, um den Distanzpunkt D^1 in der Nähe und überhaupt stark divergirende Hülfslinien zu haben, geschehen ist, eine zur Größe des Objectes unverhältnißmäßig kleine Distanz annehmen soll.

Beispiel 8.

Aufgabe. In Fig. 23 (Taf. 2) [Horizont (y) (z), Grundlinie qp, Verticale Pp, Hauptpunkt P, Theilpunkt tz, Diagonalpunkt *dg*] sind wieder in den Linien $h\,h^1$, $a\,a^1$, $g\,g^1$ Stücke der Perspectiven der drei sichtbaren lothrechten Kanten eines in Fig. 22 im Grundrisse in halbem Maßstabe vorliegenden §. 175.

Digitized by Google

Pfeilers H A G J gegeben, durch dessen Kante A (Hauptkante) hier die Bildebene steht. Außerdem ist an der bis f^1 verlängerten Kante aa^1 (Fig. 23) in der Figur $a^1 b^2 c^2 e^2 f^2 f^1$ das mit der Bildebene zusammenfallende, im Grundrisse also wie $A F^2$ liegende Profil des den Pfeiler **deckenden Gesimses** gegeben; die Stellung der Bildebene und der Ort des Gesichtspunktes sind aus dem Grundrisse ersichtlich — es soll die Perspective des Gesimses construirt werden.

§. 176. **Ausführung.** Die Aufgabe — welche sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, daß 1) hier der Pfeiler nicht quadratischen, sondern oblongen Horizontaldurchschnittes ist und daß 2) wegen der schiefen Stellung der Bildebene zu den Pfeilerflächen das gegebene Profil nicht wie vorher in der Ebene der vordern Pfeilerfläche liegt, oder auch nur dieser parallel ist — kann ähnlich der vorhergehenden auch ohne perspectivischen Hülfsgrundriß gelöst werden, wenn man zuvor das mit der Bildebene zusammenfallend gegebene, im Grundrisse wie $A F^2$ gerichtete Profil in die Ebene der vordern Pfeilerfläche G A, also in $A F^3$ überträgt, wie dies der der Construction unterhalb beigefügte perspectivische Hülfsgrundriß durch die Linie $a^\circ f^{3\circ}$ veranschaulicht. Man hat zu dem Zwecke von dem außerhalb der Figur liegenden Verschwindungspunkte $z_\circ$ (der der Pfeilerfläche angehörigen horizontalen Linien) durch f^1, e^1 u. s. w. Linien zu ziehen und diese durch andere Linien, von dem Theilpunkte t_z (für die in z verschwindenden Linien) durch $f^2 e^2$ u. s. w. gezogen, in f^3, e^3 u. s. w. zu schneiden, wonach $f^1 f^3$ und $e^1 e^3$ perspectivisch gleich $f^1 f^2$ und $e^1 e^2$, und das perspectivische Profil $f^3 e^3$ u. s. w. dem geometrisch gegebenen gleich gemacht ist. Zieht man hiernach von dem außerhalb der Figur liegenden Verschwindungspunkte y Linien durch f^3, e^3 u. s. w. und schneidet dieselben durch Linien, von dem Diagonalpunkte *dg* (als dem Verschwindungspunkte aller Horizontalen, welche den rechten Winkel der Pfeilerflächen an der Kante aa^1 halbiren) durch f^1, e^1 u. s. w. gezogen, in f und e, so sind dies Punkte der Perspective der Gehrungslinie an der Kante aa^1 des Pfeilers. — Während nun in der vorhergehenden Aufgabe, wegen der dort quadratischen Form des Pfeilers, die Gehrungsebenen sich in der einen Achse desselben schnitten und diese Achse zur Construction aller anderen Gehrungslinien verwendet werden konnte, schneidet sich hier, wie der geometrische Grundriß und der perspectivische Hülfsgrundriß zeigen, die an sich zu einander rechtwinkligen Gehrungsebenen in zwei verschiedenen Achsen, die der Kanten A und G nämlich in einer durch Punkt X (resp. x°), die Gehrungsebenen der Kanten H und J aber in einer durch Punkt X^1 (resp. $x^{1\circ}$) denkbaren lothrechten

Digitized by Google

Achse. Um nun der vorhergehenden Construction ähnlich zu verfahren, müßte man den sehr entfernt liegenden Verschwindungspunkt dg^1 der horizontalen Linien suchen, welche normal zu den in dg verschwindenden sind; man müßte dann von diesem Punkte Linien durch φ, ε u. s. w. (in welchen Punkten die von dg durch f^1, e^1 u. s. w. gezogenen Linien die Perspective φ x der Achse X schneiden) ziehen und damit die von f, e u. s. w. nach z zu ziehenden horizontalen Gesimskanten in m, s u. s. w. schneiden, wonach dies Punkte der Gehrungslinie an der Kante $g\,g^1$ wären. Doch könnte man auch, um den entfernt liegenden Diagonalpunkt dg^1 entbehrlich zu machen, die in der verlängerten Kante $a\,a^1$ gegebenen Punkte f^1, e^1 u. s. w. vermittelst durch sie nach z zu ziehender Linien auf die verlängerte Kante $g\,g^1$ in die Punkte f^4, e^4 u. s. w. übertragen und nun, von φ, ε u. s. w. durch diese ziehend, die horizontalen Gesimskanten ebenfalls in den Punkten m, s u. s. w. schneiden. — So müßte man denn auch, um die Gehrungslinie an der Kante $h\,h^1$ zu finden, dem Vorigen entsprechend, in $\varphi^1\,x^1$ die Perspective der Achse X^1 des geometrischen Grundrisses ($x^{1\circ}$ des perspectivischen Hülfsgrundrisses) darstellen, auf sie durch Linien, von y durch φ, ε u. s. w. gezogen, die letzteren Punkte in φ^1, ε^1 u. s. w. übertragen; man müßte ferner die Punkte f^1, e^1 u. s. w. der Kante $a\,a^1$ durch nach y gezogene Linien in entsprechende Punkte der Kante $h\,h^1$ übertragen, und würde dann, durch diese Punkte von φ^1, ε^1 u. s. w. aus Linien (welche in dg^1 verschwinden würden) ziehend, in n, t u. s. w. Punkte der Perspective der Gehrungslinie der Kante $h\,h^1$ erzielen.

Ob nun das gezeigte Verfahren oder das mit Anwendung des perspectivischen Hülfsgrundrisses, dessen Construction selbst hier wohl keiner Erläuterung bedarf, vorzuziehen ist, hängt in anderen Fällen von der Beschaffenheit des gegebenen Objectes ab; hier würde die Construction der Gehrungen vermittelst des perspectivischen Hülfsgrundrisses jedenfalls einfacher als die oben gezeigte sein.

§. 177. Handelt es sich um die Construction der Perspectiven von Gehrungslinien bei einspringendem Gesimswinkel, so ist dem Vorigen ähnlich unter Berücksichtigung der diagonalen Richtung der Gehrungsebenen zu verfahren. Stößt z. B., wie der Grundriß zeigt, der Pfeiler an eine mit seiner Vorderfläche A G parallele Wand K L, an welcher das Gesims fortläuft, so bildet dieses über der Ecke K die Gehrungslinie K V mit einspringendem Winkel und ist die Ebene dieser Gehrung parallel der Gehrungsebene der Kante A; d. h. die in ihr liegenden Horizontalen verschwinden ebenfalls in dg. Ist demnach die Perspective $k\,k^1$ der Ecke K construirt und oberhalb verlängert, so überträgt man auf sie die Punkte f^1, e^1 u. s. w.

Digitized by Google

vermittelst nach y zu ziehender Linien in die Punkte d u. s. w. und schneidet die in y verschwindenden Gesimskanten durch Linien, von *dg* durch d u. s. w. gezogen, in v u. s. w., wonach v k^1 die Perspective der Gehrungslinie V K ist. Wie dieselbe mit Anwendung des perspectivischen Hülfsgrundrisses zu construiren wäre, ergiebt sich aus Fig. 23 von selbst.

Beispiel 9.

§. 178. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 24 (Taf. 4) der Grundriß einer **Freitreppe** von 3 Stufen, die je 7 Zoll Höhe und 10 Zoll Auftritt haben, gegeben. Die Linie (Y)(Z) giebt die Stellung der Bildebene, der Punkt O den Ort des Gesichtspunktes an — es soll bei einer Höhe des Auges von 6 Fuß die Perspective der Freitreppe in dreifach größerem Maßstabe, d. i. in dem über der Construction, Fig. 25, vorliegenden construirt werden.

§. 179. **Ausführung.** Die Bildebene ist hier gleich als durch den Punkt, nämlich A, stehend gegeben worden, von welchem aus die Construction am zweckmäßigsten anzufangen ist. — Nachdem man den Horizont, 6 Fuß darunter die Grundlinie, und die Verticale gezogen, auf dem Horizonte die Verschwindungspunkte y und z der um $48^1/_2{}^\circ$ und $41^1/_2{}^\circ$ von der Verticalebene abweichenden horizontalen Stufenkanten, außerdem die Theilpunkte *ty* und *tz* und den Diagonalpunkt *dg* festgestellt, construirt man zuvörderst auf der Grundlinie die Perspective a des Punktes A, indem man p a gleich 3 mal P A des Grundrisses macht. Durch a zieht man eine Linie nach y und macht darin unter Benutzung des Theilpunktes *ty* die Stücke a b, a g und g h perspectivisch gleich 3 mal A B, A G und G H, d. i. je 5 Fuß lang; man zieht ferner von z durch b, a, g und h, macht e a und a k vermittelst des Theilpunktes *tz* perspectivisch gleich 3 mal E A und A K, d. i. je 4 Fuß lang, und zieht von y noch durch e und durch k. Es liegt dann in der Figur c b a e f g h i die Perspective des Grundrisses ohne die Stufen vor. Errichtet man darauf in allen Eckpunkten dieser Figur lothrechte Linien, macht dann $a\,a^1$, $a^1\,a^2$ und $a^2\,a^3$ je gleich 7 Zoll (d. i. die gegebene Stufenhöhe), so kann man durch Linien, von y und von z durch a, a^1, a^2 und a^3 gezogen, die perspectivischen Höhen der einzelnen Stufen an den Ecken $b\,b^3$, $h\,h^3$ und $e\,e^3$ bestimmen, wonach auch $c\,c^3$, $i\,i^3$ und $f\,f^3$ sich construiren lassen. — Um nun die Perspectiven der Stufen selbst zu finden, stellt man zuvor an der Lothrechten $a\,a^3$ in $a^3\,a^2\,l^2\,l^1\,m^1\,m$ das in der lothrechten Ebene $b\,h\,h^3\,b^3$ denkbare Stufenprofil perspectivisch dar, indem man a l und l m vermittelst des Theil-

Digitized by Google

punktes ty je 10 Zoll lang (d. i. die gegebene Breite des Auftrittes) macht und 11^2 und mm^1 lothrecht zieht; es sind dann Linien, von z durch die Eckpunkte jenes Profiles gezogen, die Perspectiven der horizontalen Kanten der Seite des Treppenvorsprunges. Schneidet man diese durch Linien, vom Diagonalpunkte dg durch a, a^1 und a^2 gezogen, so erhält man in a^2, n^2, n^1, q^1 und q die Punkte des einspringenden Winkels der Stufen in der Ecke A; und zieht man ebenso Linien von dg durch e, e^1 und e^2, so ergeben deren Schnittpunkte mit den horizontalen Stufenkanten die Perspectiven der Stufenecken bei E. — Zieht man hierauf durch die so bei A und E erzielten Schnittpunkte Linien nach y, so sind diese die Perspectiven der nach y gerichteten horizontalen Stufenkanten, welche noch durch Linien, von dg durch b, b^1 und b^2 gezogen, zu schneiden sind, um dadurch die Stufenecken bei B festzustellen. Linien, von hier aus nach z gezogen, und durch andere, von y durch c, c^1 und c^2 gezogen, geschnitten, ergeben die Schnittfigur der Stufen mit der Wand. — Um nun die Perspectiven der lothrechten Stufenkanten an den Ecken F und H construiren zu können und dabei der Benutzung des sehr entfernt liegenden zweiten Diagonalpunktes überhoben zu sein, sind auch hier, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Achsen X und X^4 (siehe den Grundriß) ins Auge zu fassen, in welchen sich die die Winkel bei B und E und bei H und F halbirenden Ebenen schneiden. Die Perspectiven $x\,x^3$ und $x^4\,x^7$ derselben findet man, wenn man ag zuvörderst in r perspectivisch halbirt, dann von z durch r eine Linie zieht, diese durch Linien, von b und von e nach dg gezogen, in x^4 und x schneidet und endlich x^4x^7 und $x\,x^3$ lothrecht zieht. Theilt man diese Achsen je in 3 gleiche Theile und zieht von diesen Theilungspunkten durch die entsprechend hoch gelegenen Theilungspunkte der Lothrechten hh^3 und ff^3 Linien, so schneiden diese die schon vorhandenen horizontalen Stufenkanten in solchen Punkten, durch welche man nunmehr die noch fehlenden Perspectiven der lothrechten Kanten dieser Ecken ziehen kann.

Ueberblickt man das hier eingeschlagene Verfahren, so wird man finden, daß auch hier gewissermaßen mit der Construction eines perspectivischen Hülfsgrundrisses, jedoch nicht auf einer besondern Hülfs-Grundebene, sondern auf der eigentlichen Grundebene selbst und zudem unter Weglassung der Stufen vorgegangen worden. Hätte man auch diese in den perspectivischen Grundriß aufgenommen, so würden die Perspectiven der Stufengehrungen kaum umständlicher, jedenfalls aber nur desto genauer erzielt worden sein.

Digitized by Google

Beispiel 10.

§. 180. **Aufgabe.** In Fig. 26 (Taf. 5) liegt der Grundriß eines der **Potsdamer Thorgebäude** von Berlin vor; der Aufriß und die Höhenmaße sind als bekannt vorausgesetzt und hier aus der Construction, Fig. 27, erkennbar — es soll die Perspective des Gebäudes unter Weglassung alles Details und unter möglichster Vereinfachung der Formen in dreifachem Maßstabe des Grundrisses, d. i. in dem unter Fig. 27 gegebenen, construirt werden.

§. 181. **Ausführung.** Als Höhe des Auges (über der Grundebene, hier das Straßenpflaster) erscheint das Maß von 6 Fuß, die Augenhöhe eines großen Mannes, passend. Der Ort des Gesichtspunktes, und damit zugleich die Größe der Distanz (75 Fuß), wird festgestellt, wie dies in §. 25 (s. daselbst), wo gerade dieses Beispiel ins Auge gefaßt ist, gezeigt worden. Das dort eingeschlagene Verfahren ergab zugleich in O G die Richtung der Hauptgesichtslinie (d. i. die Richtung der Verticalebene) und dadurch die Richtung der Bildebene, insofern diese normal zu jener sein muß. Als Ort der Bildebene erscheint der Ort der lothrechten vordern rechten Kante des Architraves, die, wenn man, um hier der Construction krummer Linien auszuweichen, die dorischen Säulen vorläufig als quadratische Pfeiler auffaßt, mit der vordern rechten Kante des äußersten rechten Pfeilers ziemlich zusammenfallen würde, am günstigsten, da sich hierauf, als Hauptkante (s. §. 170), die Höhenmaße aller Theile des Gebäudes bequem auf- und von hier durch Linien nach den Verschwindungspunkten auf die betreffenden Theile des Gebäudes perspectivisch übertragen lassen.

Nachdem man in der Construction, Fig. 27, den Horizont gezogen, in ihm gleich weit von den Seitenrändern der Constructionsfläche den Hauptpunkt P bezeichnet und durch diesen die Verticale gezogen, nachdem man ferner die Verschwindungspunkte y (136½ Fuß links von P) und z (41 Fuß rechts von P) und dazu die Theilpunkte t_y und t_z (letzterer 44 Fuß links von P) und den Diagonalpunkt festgestellt, wird 6 Fuß unter dem Horizonte und in einer Entfernung von der Verticale gleich 3 mal P H die Perspective h des Punktes H bezeichnet, in welchem die vorerwähnte Hauptkante auf der Grundebene, dem Straßenpflaster, steht. Da hiernach die Perspectiven der horizontalen Kanten der unteren Theile des Gebäudes dem Horizonte offenbar so nahe fallen müssen, daß sie von der horizontalen Richtung wenig verschieden sind und ihre Schnittpunkte deshalb nicht deutlich erkannt werden können, so wird zunächst ein perspectivischer Hülfs-

Digitized by Google

grundriß construirt, zu dessen Aufnahme man etwa 35 Fuß unterhalb der Grundebene eine Hülfs-Grundebene annimmt. Die Hauptkante wird demgemäß bis zum Punkte h°, d. i. ungefähr 35 Fuß unterhalb h, verlängert, und durch h° wird die Grundlinie jener Ebene gezogen.

Auf dieser Hülfsgrundlinie trägt man nun von h° aus die Längen der einzelnen Theile beider sichtbaren Seiten des Gebäudes geometrisch auf, und überträgt dieselben vermittelst der Theilpunkte perspectivisch auf von h° nach y zu ziehende Linien. Auf diese Weise werden z. B. auf der Linie h° y in h° n° und i° m° die Vorsprünge der untersten Setzstufen an den Seiten der Treppe, ferner die perspectivischen Breiten der vorderen Pfeilerflächen, in q° ein Punkt der Ebene des Gitters, in s° der Halbirungspunkt der Breite der Façade u. s. w. festgestellt, so daß die Setzstufen an der Seite, die Seitenflächen der Pfeiler, die die Richtung der Gitterpfeiler bezeichnende, und durch s° die den Grundriß des Gebäudes der Tiefe nach halbirende Linie gezogen werden können. Auf letztere können von der Hülfsgrundlinie aus auch die der Tiefe des Gebäudes angehörigen Maße vermittelst des Theilpunktes tz perspectivisch übertragen werden. — Die Gehrungen der Stufen, sowie die des Gesimses werden vermittelst des Diagonalpunktes und der Perspectiven v°, v^1, v^2 und v^3 der zuvor im geometrischen Grundrisse festzustellenden Achsen V, V^1, V^2 und V^3 construirt. — Die lothrechten Kanten der Thür und der Fenster unter der Halle werden gefunden, wenn man die Wand, welcher sie angehören, bis in die Hülfsgrundlinie verlängert, vom Schnittpunkte w mit letzterer aus die entsprechenden Abstände geometrisch aufträgt und vermittelst des Theilpunktes ty perspectivisch in die Wand überträgt. So auch ist die Mittellinie des Gitters bis in die Grundlinie zu verlängern und sind auf gleiche Weise die perspectivischen Orte der Gitterpfeiler und -Stangen festzustellen.

Nach dieser Vorbereitung wird im perspectivischen Aufrisse die lothrechte Hauptkante gezogen. Es werden auf ihr von h aus die Höhen der 4 Stufen, des Pfeilerschaftes, des Capitäles, des Architraves, des trennenden Gliedes, des Frieses, der hängenden Platte und des bekrönenden Gliedes aufgetragen; durch die hierdurch bezeichneten Punkte werden Linien vom Diagonalpunkte aus gezogen und diese durch Lothe aus den entsprechenden Eckpunkten des Hülfsgrundrisses in Punkten geschnitten, durch welche nunmehr die Perspective der Kante H in ihren Einzelheiten vollendet werden kann. — Zieht man von denselben Schnittpunkten Linien nach y und z und schneidet dieselben entsprechend durch Lothe aus den Punkten des Hülfsgrundrisses, so findet man auch die Perspectiven der meisten anderen Kanten an dem Gebäude. — Auch die Höhen des Gitters, seines

Digitized by Google

Unterbaues, der Stangen und Pfeiler, werden zuerst auf der Hauptkante aufgetragen und vermittelst nach y gezogener Linien in das Gitter selbst übertragen. — Die Höhe der Mauer hinter dem Gebäude wird ebenfalls zuerst auf der Hauptkante aufgetragen, von hier durch eine Linie nach z auf die Kante B des Gebäudes, und von da wieder durch eine Linie nach y auf ein durch den entsprechenden Punkt des Hülfsgrundrisses zu ziehendes Loth übertragen. So auch werden die Höhen der Thür und der Fenster von der Hauptkante auf die Wand unter der Halle übertragen. — Um die Perspective der Gehrung in der Spitze des Frontons zu construiren, wird dessen Höhe selbst, sowie die in der Gehrung selbstverständlich sich vergrößernde Breite der hängenden Platte und des bekrönenden Gliedes, zuerst auf der Hauptkante aufgetragen und durch Linien nach y auf ein durch Punkt s^0 des Hülfsgrundrisses gezogenes Loth in die Punkte 1, 2 und 3 übertragen. Zieht man dann durch diese Punkte Linien von z aus und schneidet sie durch Lothe aus den entsprechenden Punkten des Hülfsgrundrisses, welche hier in der Linie $v^0 v^3$ vorderhalb des Punktes s^0 liegen, so ergeben die Schnittpunkte die Gehrungslinie in der Spitze, und kann man hierauf die Perspectiven der schiefen Frontonkanten ziehen. — Die hier angewandte einfache Art der Construction der am Fronton aufsteigenden Linien ist zu empfehlen, sobald man nicht viele solcher schiefen Linien zu ziehen hat. Ist deren Zahl aber eine größere, wie dies etwa bei der Darstellung von Sparrwerken vorkommt, so ist es, und wenn auch nur um die Genauigkeit zu controliren, rathsam, die Verschwindungspunkte solcher Linien festzustellen, wie dies mit Bezug auf dieses Beispiel in §. 289 bei den Constructionen schiefer Ebenen gezeigt werden wird.

Im geometrischen Grundrisse schneiden die Gesichtslinien OF und OE, welche nach der in §. 25 angestellten Ermittelung das Gesichtsfeld einschließen, die Bildebene in den Punkten L und K, welche jeder etwa $24\frac{1}{2}$ Fuß von P entfernt sind. Bezeichnet man nun in der Construction im Horizonte die Punkte l und k ebenfalls $24\frac{1}{2}$ Fuß von P und zieht durch beide lothrechte Linien, so begrenzen diese die Darstellung seitlich auf eine der Größe der Distanz angemessene Weise.

Beispiel 11.

§. 182. **Aufgabe.** In Fig. 28 (Taf. 6) liegt der Grundriß **einer Kirche** (der Johanniskirche in Moabit ohne Thurm und sonstige Umgebung) vor; der Aufriß und die Höhenmaße sind als bekannt vorausgesetzt und aus der Construction, Fig. 29, erkennbar; der Ort des Gesichtspunktes O ist (hier außerhalb

Digitized by Google

der Figur liegend) gegeben, die Höhe des Auges betrage 10 Fuß — es soll die Perspective des Gebäudes unter Weglassung alles Details und unter möglichster Vereinfachung der Formen construirt werden.

Es möge diese Aufgabe benutzt werden, um das der Grundriß- §. 183.
methode entsprechende, in vielen Beziehungen vortheilhafte Verfahren etwas ausführlicher darzulegen und zugleich zu zeigen, inwiefern durch Mitanwendung der Verschwindungspunkt-Methode der in §. 161, Fig. 11, noch erforderlich gewesene geometrische Aufriß des darzustellenden Objectes entbehrlich gemacht werden kann. Das darauf folgende zwölfte Beispiel wird dieselbe Constructionsart ohne Anwendung von Verschwindungs-, Theil- und Diagonalpunkten zeigen und zugleich eine Anleitung zu dem Verfahren geben, durch welches das Entstehen des perspectivischen Bildes in jeder beliebigen Größe im Voraus zu sichern ist.

Ausführung. Nimmt man als Hauptgesichtslinie (Verticalebene) §. 184.
die Linie (O) A und als Hauptkante die Kante K des Gebäudes an, so ist eine durch Punkt K zu der (O) A normale Linie Y (Z) die Bildebene im Grundrisse, und P O, die Distanz, beträgt alsdann 96 Fuß des dem Grundrisse beigefügten Maßstabes. Die Verschwindungspunkte y und z, wovon der erstere sehr nahe liegt, und der Diagonalpunkt *dg* werden in der Construction Fig. 29 (Taf. 6) vermittelst der $^1/_6$-Distanz $O/_6$ gefunden.

In der Construction wird zunächst die Perspective k des Punktes K = 10 Fuß unter dem Horizonte und gleich P K von der Verticale entfernt festgestellt und durch sie die lothrechte Hauptkante gezogen. Hierauf werden von allen Punkten des Grundrisses, welche eine dem Auge in O sichtbare Kante des Gebäudes bezeichnen, gerade Linien (Gesichtslinien) nach O wenigstens so weit, daß sie die Bildebene Y (Z) schneiden, gezogen — zunächst von solchen wie G und R, welche die Hauptformen des Gebäudes bezeichnen —, dann werden die Entfernungen dieser Schnittpunkte von P, wie Pγ und Pϱ, in die Construction auf den Horizont in Pγ und Pϱ übertragen und werden hier durch γ und ϱ lothrechte Linien gezogen, welche die einstweilen ihrer Länge nach noch unbestimmten Perspectiven der lothrechten Kanten G und R des Gebäudes sind. So werden auch durch Uebertragung von Punkten wie ε und φ die Fenster an der Seitenfaçade, durch Punkte wie σ und β die der Treppe angehörigen lothrechten Kanten, durch τ die lothrechte Halbirungslinie der Hauptfaçade, und so auch die

Digitized by Google

Säulen zwischen den Thüren und die Punkte der Gehrungen in den Gesimsen u. s. w. bestimmt.*)

Ist dies mit allen Punkten geschehen, so werden, wie im vorhergehenden Beispiele, auf der Hauptkante von k aufwärts die Höhen der ihr angehörigen Theile, des Fuß- und des Hauptgesimses, aufgetragen; durch die sie bezeichnenden Punkte werden Linien vom Diagonalpunkte *dg* aus gezogen und diese durch lothrechte Linien geschnitten, welche durch die entsprechenden der vorher auf den Horizont übertragenen, die Gesimsgehrungen bezeichnenden Punkte gezogen werden. Nachdem so die Gehrungen beider Gesimse an der Hauptkante entstanden, werden von ihren Eckpunkten Linien nach y und z gezogen und deren perspectivische Längen abermals durch Lothe, wie vorher, bestimmt, was die Perspectiven der horizontalen Gesimskanten und die Gehrungen an den Ecken G und R ergiebt. — Auf der Hauptkante werden ferner die Höhen der Thüren, und der Fenster der Seitenfaçade aufgetragen und durch Linien nach z und nach y auf die entsprechenden Wände übertragen, während die perspectivischen Breiten jener Objecte wieder durch Lothe, wie z. B. die durch ε und φ gelegten, bestimmt werden. — Auch die Höhen der Stufen werden erst auf der Hauptkante aufgetragen, durch Linien vom Diagonalpunkte in die lothrechte Gehrungskante des Fußgesimses, und von da durch Linien nach z in die Hauptfaçade übertragen. Sind dann diese Linien erst durch Lothe, wie etwa σ s, entsprechend geschnitten, sodaß die Schnittfigur der Treppe mit dem Fußgesimse construirt ist, so werden durch sämmtliche Eckpunkte dieser Figur Linien von y aus, wie z. B. s c, gezogen und diese abermals durch Lothe, wie das durch Punkt c gehende, geschnitten, was die Perspective der Gehrung der Stufen bei C ergiebt. Linien, von den Eckpunkten dieser Gehrung nach z gezogen und entsprechend durch Lothe, wie etwa β b, geschnitten, ergeben endlich die Perspective der Gehrung der Stufen bei B u. s. w. — Die Gehrung des Hauptgesimses in der Giebelspitze wird construirt, wie in dem vorhergehenden Beispiele. Die in der Gehrung größeren Breiten der einzelnen Glieder des Gesimses werden

*) Das Ziehen der Gesichtslinien nach O und das Uebertragen ihrer Schnittpunkte mit der Bildebene Y (Z) wird am sichersten ausgeführt, wenn man, um auch Verwechselungen zu vermeiden, für die Seitenfaçade, für die Hauptfaçade und für die Treppe je besondere geradegeschnittene Papierstreifen an die Bildebene im Grundrisse legt, vor allem P genau darauf markirt, dann die Gesichtslinien darüberzieht, sie mit Buchstaben oder Zahlen bezeichnet und, nachdem man die Streifen genau gegen den Horizont der Construction gelegt, auf diesen die fraglichen Punkte überträgt.

Digitized by Google

wieder auf der Hauptkante zwischen q und h auf- und von hier in die lothrechte Halbirungslinie τ t der Hauptfaçade übertragen; durch die hierdurch bezeichneten Punkte werden Linien von y aus gezogen, und dieselben durch Lothe, wie λ l u. s. w., geschnitten.

Die Anleitung zur Construction der Perspectiven des runden Fensters und der Bögen über den Thüren muß aus Kapitel 8, welches die Construction krummer Linien behandelt, entnommen werden.

Beispiel 12.

Aufgabe. In Fig. 30 (Taf. 6) liegt der Grundriß **einer Kirche** vor; Aufriß und Höhenmaße sind als bekannt vorausgesetzt und aus der Construction (Fig. 31) erkennbar. Im Punkte O, etwas unterhalb der Construction gelegen, ist der Ort des Gesichtspunktes, in der Linie O A die Richtung der Hauptgesichtslinie (der Verticalebene) gegeben, die Höhe des Auges betrage 7 Fuß — es soll die Perspective der Kirche construirt werden. §. 185.

Als Hauptkante ist hier wieder die Kante A, da sie eine beiden Façaden zugleich angehörige Linie ist, anzunehmen. Würde man nun durch A die Bildebene (T) (T) annehmen und auf ihr nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe die Construction ausführen, so würde das perspectivische Bild darauf eine geringe Breite, ungefähr wie sie die Punkte i und l bezeichnen, bekommen, während es vielleicht erwünscht wäre, dasselbe in $1\frac{1}{2}$ mal größerer Breite, ungefähr wie sie die Punkte ε und σ auf der Linie T T einschließen, herzustellen. Um dies zu erreichen, hat man nur die 127 Fuß betragende Distanz (P) O des Gesichtspunktes von der Bildebene (T) (T) mit $1\frac{1}{2}$ zu multipliciren und der sich hieraus ergebenden Distanz von $190\frac{1}{2}$ Fuß gemäß die Bildebene (T) (T) um $63\frac{1}{2}$ Fuß über (P) hinaus nach T T zu verlegen, wonach dann die äußersten der wie in der vorhergehenden Aufgabe durch alle Eckpunkte des Grundrisses zu ziehenden Gesichtslinien eine Bildbreite wie ε σ ergeben. §. 186.

Um außerdem der Anwendung der zum Theil sehr entfernt fallenden Verschwindungs- und anderen Hülfspunkte überhoben zu sein, bedarf es auch hier nicht der Anwendung eines geometrischen Aufrisses des Objectes, wie in §. 161, Fig. 11; vielmehr ergeben sich §. 187.

Digitized by Google

die Perspectiven horizontaler Linien von selbst, wenn man zuerst die perspectivischen Höhen sämmtlicher lothrechten Linien, und zwar vermittelst eines folgendermaßen neben der Construction einzurichtenden perspectivischen Höhenmaßstabes bestimmt:

Faßt man z. B. vorläufig nur die an sich gleich langen lothrechten Kanten A, E und B der Kirche ins Auge, indem man einstweilen von den Thürmen absieht, und denkt sich dieselben unter Festhaltung ihrer normalen Abstände von der Bildebene T T in die Verticalebene, oder besser in eine mit dieser parallele Ebene (a) $\varkappa$, also in (a), (e) und (b) versetzt, und man hätte die Perspectiven dieser Ebene und der darin vorhandenen Kanten zu construiren, so würden die perspectivischen Längen (die Perspectiven der Endpunkte) der letzteren vermittelst nach dem Hauptpunkte gerichteter Linien abgeschnitten werden müssen, da die Ebene (a) $\varkappa$ normal zu der Bildebene T T ist. Wenn man nun neben der Construction die Perspective der gedachten Ebene, oder wenigstens der in sie versetzt gedachten Kanten wirklich construirt, so sind es hier die nach P gerichteten Linien $a^3 k^3$, $a^2 k^2$ u. s. w., welche den Maßstab zur Bestimmung der perspectivischen Längen jener Kanten ergeben.

Der Fig. 30 nach fällt, wie die Gesichtslinien O (a) und O $\varkappa$ ergeben, die Perspective der Ebene $\varkappa$ (a) in $\varkappa$ (a^1) der Bildebene T T, die perspectivischen Projectionen der in Rede stehenden Kanten fallen aber in (a^1), (e^1) und (b^1). Ueberträgt man nun diese Projectionen unter Festhaltung ihrer Abstände von P auf den Horizont der Construction (Fig. 31) in a^1, e^1 und b^1, und $\varkappa$ in k, und zieht hier durch diese Punkte lothrechte Linien, so ist dem Vorhergehenden nach, wenn $a^2 a^3$ die in der Bildebene selbst liegende Größe der Kante A ist, durch von a^2 und a^3 nach P gezogene Linien in $a^2 k^2$ $k^3 a^3$ die Perspective jener der verticalen parallel angenommenen Ebene construirt. Durch dieselben Linien sind aber auch die verschiedenen Längen $a^2 a^3$, $e^2 e^3$ und $b^2 b^3$ der Perspectiven der Kanten A, E und B abgeschnitten, so daß dieselben unmittelbar in die Construction in $a\, a^6$, $e\, e^6$ u. s. w. übertragen werden können.

§. 188. **Ausführung.** Wie in der vorhergehenden Aufgabe werden von O aus die Gesichtslinien durch alle Eckpunkte des Grundrisses gegen die

Digitized by Google

Bildebene T T gezogen und ihre Schnittpunkte mit dieſer, wie z. B. α, ε und β, unter ſteter Berückſichtigung ihrer Abſtände von P in die Conſtruction in α, ε und β übertragen; durch dieſe Punkte gezogene lothrechte Linien ſind dann die Perſpectiven der gleichnamigen Kanten, deren perſpectiviſche Länge nun noch zu beſtimmen iſt. Macht man zu dieſem Behufe die durch a^1 lothrechte Maßſtabslinie unterhalb des Horizontes gleich $a^1 a^2$, d. i. $1^1/_2$ mal 7 Fuß (die gegebene Höhe des Auges) des dem Grundriß beigefügten Fußmaßſtabes, und $a^2 a^3$ gleich $1^1/_2$ mal der gegebenen Höhe der Kanten A, E und B, und zieht dann a^2 P und a^3 P, ſo ergeben dieſe in $a^2 a^3$ die perſpectiviſche Höhe der Kante A, und in $e^2 e^3$ und $b^2 b^3$ die der Kanten E und B bis zum Hauptgeſimſe. — In gleicher Weiſe werden der perſpectiviſche Ort und die perſpectiviſche Höhe jeder an dem Gebäude vorhandenen lothrechten Kante beſtimmt; der erſtere jedesmal durch eine Geſichtslinie gegen die Bildebene im Grundriſſe, die Höhe vermittelſt einer beſondern Höhenmaßſtabs-Linie.

Sind ſo die verſchiedenen perſpectiviſchen Höhen an ſich gleich hoher Kanten beſtimmt, ſo können die Perſpectiven der ſie verbindenden horizontalen Kanten leicht gezogen werden.

Bei dieſem Verfahren bieten ſich mancherlei Vortheile dar: Punkte der Perſpectiven der oberſten horizontalen Kanten des Hauptgeſimſes an der Haupt- oder Seitenfaçade kann man nämlich auch in den Perſpectiven m und n der jenen Kanten angehörigen Punkte M und N finden, weil dieſe mit A in gleichem normalen Abſtande von der Bildebene T T liegen und für ſie deshalb in der Conſtruction die Lothrechte durch a^1 ebenfalls die Maßſtabslinie iſt. Hat man daher zuvor vermittelſt der entſprechenden Geſichtslinien die Punkte μ und ν in der Conſtruction feſtgeſtellt, ſo ergiebt eine Horizontale, durch a^4 ($a^3 a^4$ iſt die geometriſche Breite des Hauptgeſimſes) gezogen, in m und n die Perſpectiven der Punkte M und N. — Die Perſpective des Gehrungspunktes F findet ſich von ſelbſt — allenfalls iſt ſie noch zu controliren durch die entſprechende Geſichtslinie — im Schnittpunkte f der oberſten Hauptgeſimskanten beider Façaden, nachdem man für dieſe Kanten außer den ſchon vorhandenen u und m noch zweite Punkte, wie u und q, folgendermaßen feſtgeſtellt: Um zur Conſtruction des Punktes u zugleich die Maßſtabslinie $b^1 b^4$ benutzen zu können, verlängert man F U bis S, in welchem Punkte ſie gleichen Abſtand von der Bildebene T T mit B hat, überträgt die Schnittpunkte der durch U und S zu ziehenden Geſichtslinien in die Conſtruction; giebt hier dem Punkte s eine $b^1 b^4$ gleiche Höhe über dem Horizonte, zieht von s durch n, und ſchneidet dadurch u und f als Gehrungspunkte des Haupt-

Digitized by Google

gesimses ab. — Um zur Construction von q zugleich die Maßstabslinie $e^1 e^4$ benutzen zu können, wird der mit E in gleichem Abstande von der Bildebene T T liegende Punkt R ins Auge gefaßt, der Schnittpunkt seiner Gesichtslinie mit der Bildebene in die Construction übertragen, r gleich $e^1 e^4$ hoch über dem Horizonte bestimmt, es wird von m durch r gezogen, und q in dieser Linie vermittelst der durch k Lothrechten abgeschnitten. — Wie im Grundrisse der Punkt V der Treppe mit dem in der verlängerten B A anzunehmenden Punkte X in gleichem Abstande von der Bildebene T T liegt, so ist auch in der Construction in der verlängerten b a der Ort des Punktes x vermittelst der dem Punkte X entsprechenden Gesichtslinie zu bestimmen, x v horizontal zu ziehen, und v darin wieder vermittelst der dem Punkte V entsprechenden Gesichtslinie zu bestimmen. — Um durch eine Linie v w den Vorsprung der untersten Setzstufen der Seitentreppen, und dieserhalb zunächst Punkt w bestimmen zu können, zieht man W Y parallel der Bildebene T T, construirt in dem in der Linie b a liegenden Punkte y die Perspective des in der Linie B A liegenden Punktes Y vermittelst einer Gesichtslinie, zieht y w horizontal, und bestimmt darin w abermals vermittelst einer Gesichtslinie durch W u. s. f.

§. 189. Wäre nicht eine Vergrößerung des perspectivischen Bildes beliebt worden, so hätte die perspectivische Projicirung der in die Ebene (a) $\varkappa$ versetzten Kanten selbstverständlich nicht auf der Bildebene T T, sondern auf (T) (T) stattfinden müssen; und hätte das Bild verkleinert ausfallen sollen, so würde man die dieser Bestimmung entsprechende Bildebene dem Gesichtspunkte näher anzunehmen und die perspectivische Projicirung auf dieser auszuführen gehabt haben.

§. 190. Es versteht sich von selbst, daß man bei Anwendung der Verschwindungspunkt-Methode einfach durch Vergrößerung oder Verkleinerung des geometrischen Fußmaßstabes es in der Hand hat, das perspectivische Bild nach Belieben größer oder kleiner ausfallen zu lassen. Da es aber häufig vorkommt, daß diese Vergrößerung oder Verkleinerung in einem Verhältnisse stattfinden soll, welches sich nicht durch eine Zahl ohne Bruch ausdrücken läßt, wonach man den Maßstab verändern könnte, während man doch den Ausfall der Breite des perspectivischen Bildes gern vorher übersehen und in jedem Falle den Hauptpunkt von Anfang an in möglichst richtiger Entfernung von

Digitized by Google

den seitlichen Grenzen des Bildes hinsetzen möchte, so erweist sich, auch bei ausschließlicher Anwendung der genannten Methode, für die Ermittelung des einer Vergrößerung oder Verkleinerung entsprechenden Ortes der Bildebene und der damit zusammenhängenden Maßstabsgröße durch geometrische Construction die Anwendung des geometrischen Grundrisses von Neuem als vortheilhaft. Wäre z. B. in Fig. 32 (Taf. 6) der Grundriß der eben construirten Kirche, durch deren Ecke A, als Hauptkante, die Bildebene, und in O der Gesichtspunkt gegeben, und bezeichneten die Punkte 0, 10′, 20′ u. s. w. auf der Bildebene den Zehnfuß-Maßstab, so würde, wenn die Perspective des Gebäudes nebst seiner Umgebung bis zu den Punkten E und F construirt werden soll, das perspectivische Bild die Breite e f einnehmen. Käme es nun darauf an, daß dasselbe, nun etwa als Pendant zu einem andern Bilde zu passen, nur die Breite B R bekomme, deren Verhältniß zu e f nur sehr umständlich durch einen Bruch zu bezeichnen wäre, so findet man den dieser kleineren Construction angemessenen Zehnfuß-Maßstab, wenn man zuvor in einer Nebenconstruction, Fig. 33 (Taf. 6) $\varepsilon\varphi$ (gleich e f) parallel $\beta\varrho$ (gleich B R) zieht, von ε durch β und von φ durch ϱ Linien bis zu ihrem Schnittpunkte x zieht, auf der Seite $\varepsilon\varphi$ des entstandenen Dreiecks $\varepsilon\pi$ gleich e P macht und, von P nach x ziehend, $\beta\varrho$ in π^1 schneidet, wodurch $\beta\varrho$ proportional $\varepsilon\varphi$ getheilt ist. Ueberträgt man dann $\pi^1\beta$ und $\pi^1\varrho$ in die Bildebene des Grundrisses in P β^1 und P ϱ^1, zieht hier β^1 b und ϱ^1 r parallel P O, außerdem b r, und schneidet diese durch Linien, von den Maßstabspunkten 0, 10′, 20′ u. s. w. nach O gezogen, so erhält man dadurch auf b r den der Breite B R des perspectivischen Bildes angemessenen Zehnfuß-Maßstab, und hat außerdem in b P^1 und r P^1 zugleich den Abstand, in welchem man in der nunmehr auszuführenden verkleinerten Construction den Hauptpunkt P von den seitlichen Grenzen des Bildes hinzusetzen hat.

Beispiel 13.

Aufgabe. In Fig. 34 (Taf. 4) ist in halbem Maßstabe der Grundriß eines zehnseitigen **Vogelhauses** angedeutet, dessen äußere Anordnung aus der Construction, Fig. 35, ersichtlich §. 191.

Digitized by Google

ist. Die durch die Achse M gehende Linie NQ bezeichnet die um 14° von dem Durchmesser FL abweichende Richtung der Bildebene, O den Ort des 46 Fuß von P entfernten Gesichtspunktes — es soll, bei einer Höhe des Auges von 11 Fuß, die Perspective des Vogelhauses in dem über der Construction gegebenen Maßstabe construirt werden.

§. 192. Wird in einer Aufgabe, wie in der vorliegenden, voraussichtlich die Anwendung vieler und zum Theil sehr entfernt fallender Verschwindungs- und Theilpunkte nothwendig, so ist in der Anwendung eines perspectivischen Höhenmaßstabes, wie er in der vorhergehenden Aufgabe benutzt worden, verbunden mit einem perspectivischen Hülfsgrundrisse, bei dessen Entstehen der Gebrauch der Verschwindungs- und Theilpunkte durch das in §. 141 gezeigte Verfahren ersetzt wird, ein Mittel zu finden, um die Construction auszuführen, ohne die Grenzen der Bildfläche zu weit zu überschreiten und ohne ganz auf die in Kap. 5 gezeigten Hülfsconstructionen angewiesen zu sein.

§. 193. **Ausführung.** Nachdem in der Construction, Fig. 35 (Taf. 4), Horizont und Verticale gezogen, auf letzterer in $O/_2$ die halbe, d.i. 23 Fuß große Distanz, welche hier genügen wird, bezeichnet worden, wird 11 Fuß unter dem Horizonte die Grundlinie gezogen und in ihr, indem man p m gleich 2 mal P M macht, im Punkte m die Perspective des Fußpunktes M der Achse des Käfigs bezeichnet, und darauf durch m die Perspective der Achse lothrecht gezogen. — Den perspectivischen Hülfsgrundriß zu construiren genügt es, wenige, etwa 4 Fuß unterhalb der Grundebene in der verlängerten Achse den Punkt m° als Fußpunkt anzunehmen. Nachdem man durch ihn die Hülfsgrundlinie $n^\circ q^\circ$ gezogen und, um alle Maße geometrisch bei der Hand zu haben, um denselben Punkt einen geometrischen Grundriß des Gebäudes derart gezeichnet, daß dessen Durchmesser der Fig. 34 gemäß um 14° von der Richtung der Linie $n^\circ q^\circ$ abweicht, wandelt man diesen Grundriß in einen perspectivischen um, indem man, um dabei zugleich der Anwendung der Verschwindungs- und der diesen entsprechenden Theilpunkte überhoben zu sein, nach den §§. 118 und 141 verfährt. Man behandelt demgemäß alle Punkte, wie dies hier mit den der Ecke E des Vogelhauses entsprechenden Punkten geschehen wird: man zieht nämlich von den Punkten E, E^6, E^5, E^4, E^3, E^2 und E^1 (von denen der erste die Ecke des Unterbaues, der zweite die des Daches, die drei folgenden die der drei Stufen, der vorletzte die des Sockels, der letzte die des Käfigs

Digitized by Google

selbst bedeutet) Ordinaten gegen n° q°, zieht ferner durch die Schnittpunkte mit dieser Linien von P aus, und macht dieselben jenen Ordinaten perspectivisch gleich, indem man, z. B. von $O/_2$ durch den Halbirungspunkt der Ordinate E u ziehend, u e° in e° schneidet, und darauf e° m° zieht. Die Schnittpunkte e^6, e^5, e^4 u. s. w. sind dann die Perspectiven der Punkte E^6, E^5, E^4 u. s. w. Auf gleiche Weise werden auch die den anderen Ecken des Gebäudes angehörigen Punkte des perspectivischen Hülfsgrundrisses construirt. — Lothrechte Linien, durch diese Punkte, hier beispielsweise durch e°, e^6, e^5 u. s. w. gezogen, ergeben die Perspectiven der der Ecke E angehörigen lothrechten Kanten des Gebäudes, deren perspectivische Höhen nun noch durch einen folgendermaßen einzurichtenden perspectivischen Höhenmaßstab zu bestimmen sind: Durch einen beliebigen Punkt n° der Hülfsgrundlinie n° q° wird eine Lothrechte gezogen und n° μ darin gleich m° m gemacht; von μ aus aufwärts werden die Höhen der einzelnen Theile des Gebäudes, des Unterbaues, der Stufen, des Käfigs und seines Sockels, des schrägen Daches u. s. w. aufgetragen, und durch sämmtliche hierdurch bezeichneten Theilungspunkte und auch durch n° Linien von P aus, wie P ε°, welche der Ebene des Hülfsgrundrisses, und P ε, welche der eigentlichen Grundebene entspricht, gezogen. Zieht man darauf — um hier wieder bei der Ecke E zu bleiben — horizontale Linien von allen Punkten e°, e^6, e^5 u. s. w. des Hülfsgrundrisses gegen P ε° und errichtet in den Schnittpunkten mit dieser wieder Lothe, so schneiden diese zwischen den in diesem Maßstabe nach P gerichteten Linien die perspectivischen Höhen für die einzelnen der Ecke E angehörigen lothrechten Kanten des Gebäudes ab. So ergiebt $\varepsilon\,\varepsilon^1$ die perspectivische Höhe der in e stehenden Kante des Unterbaues, $\varepsilon^6\,\varepsilon^6$ die Höhe der Dachecke u. s. w. Auf dieselbe Weise wird mit sämmtlichen lothrechten Kanten verfahren, wobei natürlich die nach P gerichteten Linien des Höhenmaßstabes für sämmtliche zehn Ecken benutzbar sind. — Die Spitze der Pyramide, welche das Dach bildet, liegt im Punkte m 7 der Achse.

Scheint dieses Verfahren auch auf den ersten Blick umständlich, so finden sich bei weiterem Eingehen doch manche dasselbe sehr vereinfachende Vortheile; namentlich wird man, nachdem man auf die angegebene Art erst einige der vorderen lothrechten Kanten construirt, andere dadurch leichter bestimmen können, daß man zum Ziehen der Perspectiven der horizontalen Kanten Verschwindungspunkte wie v^g, v^f, v^l, v^a u. s. w. benutzt, welche sich bei Verlängerung von Seiten, Durchmessern und Querlinien des perspectivischen Zehnecks, wie a° l°, b° k°, c° i°, e° h°, f° g° — e° f°, e° g°, b° h° u. s. w. — b° l°, f° h° u. s. w. — b° a°, e° k° u. s. w. als in der Nähe liegend ergeben.

Digitized by Google

Es darf hiernach diese Constructionsart im Allgemeinen und insbesondere in den Fällen, wo viele Verschwindungs- und Theilpunkte außerhalb der Bildfläche fallen, wohl empfohlen werden, da sie, wie die Figur zeigt, nur in geringem Maße ein Ueberschreiten der Grenzen der Bildfläche erfordert, ja, wenn man es nicht scheut, diese mit vielen Hülfslinien zu durchziehen, sogar streng innerhalb ihrer Grenzen ausgeführt werden kann. Im Grunde ist dieses Verfahren nur eine weitere Ausführung des schon in den §§. 124 und 158 gezeigten.

Beispiel 14.

§. 194. **Aufgabe.** In Fig. 36 (Taf. 7) liegt in kleinem Maßstabe der geometrische Grundriß des **Gebäudes der Berliner Sternwarte** vor; Aufriß und Höhenmaße sind als bekannt vorausgesetzt und aus der Construction, Fig. 37, ersichtlich. In der Linie PA ist die durch die Hauptkante A gestellte Bildebene, in O der Ort des Gesichtspunktes bei einer Distanz OP von 219 Fuß gegeben — es soll mit Uebergehung alles Details, bei einer Höhe des Auges von 7 Fuß, die Perspective des Gebäudes nach dem unterhalb der Construction vorliegenden Maßstabe construirt werden.

Es soll diese Aufgabe zugleich dazu benutzt werden, die Anwendung der in den §§. 115, 120, 138 und 141 erörterten Hülfsconstructionen zu zeigen.

§. 195. **Ausführung.** Nachdem der Horizont gezogen, wird darin zunächst der Punkt P bestimmt. Damit dies der etwa gegebenen seitlichen Begrenzung der Bildfläche (in der Construction bezeichnet durch die durch die Punkte r^1 und r des Horizontes gezogenen Lothrechten) sogleich möglichst genau entsprechend geschehe, zieht man im Grundrisse die Gesichtslinien OR^1 und OR nach den seitlich äußerst sichtbaren Punkten R^1 und R der mit darzustellenden Umgebung des Gebäudes, schneidet dabei die Bildebene in (R^1) und (R), und bezeichnet nun auf dem Horizonte den Punkt P so viel Fuß rechts von r^1, wie im Grundrisse der Punkt P rechts von (R^1) liegt. Durch P wird die Verticale gezogen und in ihr, da unterhalb des Horizontes der Constructionsraum sehr beschränkt ist, oberhalb des Horizontes ein Bruchtheil, etwa $^1/_6$ der 219 Fuß großen Distanz (d. i. $36^1/_2$ Fuß des Maßstabes der Construction), in $O/_6$ aufgetragen. — Hiernach wird zunächst im Horizonte 83 Fuß (d. i. das Maß von PA) rechts von P der

Digitized by Google

Punkt a bestimmt, durch ihn die Perspective der Hauptkante lothrecht gezogen, in dieser 7 Fuß (d. i. die Höhe des Auges) unterhalb des Horizontes in a^1 ihr Fußpunkt auf der Grundebene bestimmt und, da bei dieser Construction wieder ein perspectivischer Hülfsgrundriß von großem Nutzen ist, möglichst weit oberhalb des Horizontes in der Verlängerung der Hauptkante, etwa in a^0, der Ausgangspunkt für die Construction dieses Grundrisses angenommen und durch a^0 vorläufig die der Ebene desselben entsprechende Grundlinie horizontal gezogen. — Um hierauf durch denselben Punkt zunächst die Perspectiven der Hauptfaçade und der langen Seitenfaçade ziehen zu können, bedarf es, da ihre Verschwindungspunkte y und z zu entfernt liegen und doch sehr viele Linien nach diesen zu ziehen sind, der nach §. 138 auszuführenden Theilung der seitlichen Grenzen der Construction, nachdem man zuvor die Richtungen der Perspectiven zweier durch einen beliebigen, der Mitte der Bildfläche nahen Punkt α gehenden, jenen beiden Façaden parallel gedachten horizontalen Linien nach Anleitung des §. 120 folgendermaßen festgestellt hat: An die Verticale trägt man in $O/_6$ rechts den 37° großen Abweichungswinkel der Hauptfaçade von der Verticalebene und schneidet dadurch den Horizont in $z/_6$. Durch Halbirung dieses Winkels erhält man sogleich in $ty/_6 \ldots {}^1/_6$ des Abstandes des Theilpunktes der in y verschwindenden Linien von P, und, trägt man das Maß dieses Abstandes sechsfach auf dem Horizont auf, so erhält man nach §. 115 in ty den Theilpunkt selbst. Wollte man nun auch den 53° großen Abweichungswinkel der Seitenfaçade von der Verticalebene links von dieser in $O/_6$ antragen, wie es angemessen wäre, so würde sein angetragener Schenkel den Horizont außerhalb der Grenzen der Bildfläche schneiden, und muß man daher, um den hier zunächst vorliegenden Zweck zu erreichen, den genannten Winkel rechts an die Verticale antragen und den Horizont in $(y/_6)$ schneiden. Zieht man die Linie α P, theilt auf ihr in $\alpha/_6 \ldots {}^1/_6$ ab, zieht durch Punkt $\alpha/_6$ eine Horizontale und macht in dieser $\alpha/_6$ [$z/_6$] gleich P $z/_6$, und $\alpha/_6$ [$y/_6$] gleich P $(y/_6)$, so sind nach §. 120 von α durch [$z/_6$] und durch [$y/_6$] zu ziehende Linien nach den Verschwindungspunkten z und y gerichtet. — Diese beiden Linien genügen, um nach §. 138 eine Richtungsscala für andere nach z und nach y gerichteten Linien anfertigen zu können. Nachdem man nämlich die Linie α [$y/_6$] zu beiden Seiten bis in die Ränder der Bildfläche, d. h. bis zu den durch die Punkte r^1 und r des Horizontes lothrecht gezogenen Linien verlängert, theilt man die Abstände ihrer beiden Schnittpunkte mit dem Rande von dem Horizonte in gleichviele (in der Figur in 24) gleiche Theile, numerirt diese derart, daß die Nullpunkte

Digitized by Google

im Horizonte in r^1 und r liegen und trägt noch einige dieser Theile unterhalb des Horizontes und auch oberhalb der Nummer 24 auf. Jede alsdann durch gleiche Nummern gezogene Linie ist nach y gerichtet. Für die in z verschwindenden Linien, deren Richtung, wie $\alpha\,[z/_6]$ zeigt, auffallender von der horizontalen abweicht, erscheint es zweckmäßig, zur Scala zwei andere, näher bei einander liegende lothrechte Linien, etwa die durch die Punkte m^1 und m des Horizontes gezogenen, zu benutzen. Auf ihnen sind ebenfalls die Abstände ihrer Schnittpunkte 16 und 16 mit der $\alpha\,[z/_6]$ von dem Horizonte in gleichviele (in der Figur in 16) gleiche Theile zu theilen und diese Theilungen oberhalb der Nummer 16 und unterhalb des Horizontes fortzusetzen, wonach dann, wie vorher, alle durch gleiche Nummern dieses Maßstabes gezogenen Linien nach z gerichtet sind. — Der Theilpunkt t_y für die in y verschwindenden Linien ist schon weiter oben festgestellt worden. Da der Theilpunkt t_z für die in z verschwindenden Linien außerhalb der Grenzen des Constructionsraumes fällt, so muß die perspectivische Theilung der genannten Linien nach Anleitung des §. 141 geschehen. Der Diagonalpunkt dg, welcher den Grenzen der Bildfläche noch zu nahe fällt, um nicht benutzt werden zu sollen, wird gefunden, wenn man an den Parallelstrahl $z/_6\,O/_6$ in $O/_6$ einen halben rechten Winkel legt, den Horizont in $dg/_6$ schneidet, und das Maß $P\,dg/_6$ versechsfacht in $P\,dg$ auf dem Horizont aufträgt.

Nach dieser Vorbereitung wird zur Construction des perspectivischen Hülfsgrundrisses geschritten, und zwar werden dabei nur die Theile des Gebäudes berücksichtigt, welche der Aufgabe nach sichtbar sind. Es werden dabei alle Horizontalmaße der Theile der langen Seitenfaçade zuvor auf der Hülfsgrundlinie $a^\circ 1^\circ$ auf-, und von da vermittelst des Theilpunktes t_y auf die Linie a° (y) übertragen. Die Gehrungen der Gesimse werden mit Hülfe des Diagonalpunktes dg und gewisser entsprechend angenommenen Achspunkte, wie u°, v°, w°, construirt. — Die perspectivische Uebertragung der Horizontalmaße der einzelnen Theile der Hauptfaçade auf die Linie a° (z) geschieht, wie gesagt, nach §. 141, indem man nämlich den 53° großen Abweichungswinkel der Hauptfaçade von der Bildebene an die Hülfsgrundlinie in a° anträgt, jene Maße von a° aus auf den angetragenen Schenkel $a^\circ x$ aufträgt, von den hierdurch bestimmten Theilungspunkten Ordinaten gegen die Hülfsgrundlinie zieht und, von den Schnittpunkten derselben mit dieser nach P ziehend, die Linie $a^\circ k^\circ$ schneidet. — Die Construction der Kuppel muß einstweilen außer Betracht bleiben.

Ist der perspectivische Hülfsgrundriß vollendet, so wird die Construction des perspectivischen Aufrisses von der Hauptkante a aus begonnen.

Digitized by Google

Auf dieser werden von a^1 aus die Höhen des Fußgesimses, der Fenster, des Frontons u. s. w. aufgetragen; es werden durch die so bezeichneten Höhenpunkte je nach Erfordern nach y und nach z gerichtete Linien gezogen und diese entsprechend durch Lothe aus dem Hülfsgrundrisse geschnitten. Die Höhe der Kuppel und ihrer einzelnen Theile würde ebenfalls von der Hauptkante aus auf eine durch Punkt q (in der Mitte der Hauptfaçade) lothrechte Linie und von hier in die Achse der Kuppel übertragen werden müssen. Die perspectivische Höhe der Vorderfläche DE des seitlichen und die des hintern Ausbaues werden desgleichen durch Uebertragung ihrer Höhen von der Hauptkante aus auf die lothrechten Linien, welche durch die vermittelst des Hülfsgrundrisses bestimmten Punkte n und o gehen, festgestellt, u. s. w.

Beispiel 15.

Aufgabe. In Fig. 38 (Taf. 5) liegen Grund- und Aufriß eines **umgestürzten**, auf dreien seiner Ecken, R, U und H ruhenden, aus acht Würfeln zusammengesetzten **Doppelkreuzes** vor — es soll die Perspective desselben in dem Maßstabe der gegebenen Projectionen construirt werden und dazu P in Fig. 39 der Hauptpunkt, PD^1 die Distanz, $\varphi\beta$ die Grundlinie und die Punkte r und u in dieser die Perspectiven der zwei Stützpunkte R und U des Kreuzes sein. §. 196.

Die Aufgabe hat den Zweck, zu zeigen, inwiefern die bis hierher gegebenen Regeln ausreichen, um auch die Perspectiven solcher Objecte construiren zu können, deren Flächen und Kanten schief stehen. Dem Abschnitte über die Construction schiefer Linien und Ebenen ist es dabei freilich vorbehalten, nachzuweisen, auf welche Weise derartige Constructionen sicherer und weniger umständlich auszuführen sind.

Ausführung. Aus dem Grundrisse ist der geometrische Abstand eines jeden einzelnen Punktes des Objectes von der Bildebene, die hier als durch die Punkte R und U stehend angenommen ist, und aus dem Aufrisse die geometrische Höhe jedes Punktes über der Grundebene entnehmbar. Da in den längeren Kanten des Kreuzes stets mehrere zu construirenden Punkte zugleich liegen, erscheint es vortheilhaft, von jenen immer zuerst die Endpunkte zu construiren, und die zwischen diesen liegenden Punkte alsdann durch entsprechende Lothe von der Grundebene aus zu bestimmen. So enthält z. B. die Kante RB zugleich den zu construirenden §. 197.

Digitized by Google

Punkt A. Sie selbst liegt, dem Grundrisse nach, in einer von der Verticalebene um 60° abweichenden lothrechten Ebene. Bestimmt man nun erst den Verschwindungspunkt z für alle dieser Ebene angehörigen Horizontalen und zieht dann r (z) längs der Grundebene nach z, so müssen die Perspectiven gewisser Punkte der Linie R B durch Lothe aus den entsprechenden Punkten der horizontalen Linie r (z) zu ermitteln sein. Trägt man deshalb zuvor die im Grundrisse vorliegenden Maße R A und R B auf der Grundlinie in r α und r β geometrisch auf und überträgt dieselben vermittelst des Theilpunktes tz perspectivisch auf die Linie r (z) in r α^1 und r β^1, errichtet in r, α^1 und β^1 Lothe, macht das erstere r β^2 geometrisch gleich B^1 B des Aufrisses, schneidet das letztere durch eine von β^2 nach z gezogene Linie in b und zieht r b, so ist diese zunächst die Perspective von R B, und ein im Punkte α^1 errichtetes Loth schneidet sie in der Perspective a des Punktes A. — Ebenso ist die Perspective u v der Kante U V zu finden. Auch diese liegt in einer lothrechten Ebene, deren horizontale Schnittlinie u (y) mit der Grundebene, so wie r (z), von der Verticalebene um 60° abweicht. Nachdem man deshalb wieder den Verschwindungspunkt y der dieser lothrechten Ebene angehörigen Horizontalen, also auch jener Schnittlinie, und dazu den Theilpunkt ty gesucht, zieht man u (y), macht u v^1 perspectivisch gleich u φ (gleich (U) V des Grundrisses), errichtet in u und in v^1 Lothe, macht ersteres u d — Punkt V liegt dem Aufrisse nach mit D und G in gleicher Höhe, D dabei dem Auf- und Grundrisse nach lothrecht über U, wie G lothrecht über R liegt, weshalb auch die Perspectiven d und g lothrecht über u und r liegen müssen — geometrisch gleich U D des Aufrisses, und schneidet letzteres Loth durch eine von d nach y gezogene Linie in v. Es ist alsdann u v die Perspective von U V, während der Punkt a derselben Kante schon construirt vorliegt. — Die Kante H J nebst den in ihr liegenden Punkten A und C liegt dem Grund- und Aufrisse nach in einer der Verticalebene parallelen Ebene, deren horizontale Linien demnach in P verschwinden. Von dieser Kante ist zunächst Punkt h in einer der Grundebene angehörigen von α^1 nach P zu ziehenden Linie vermittelst des Distanzpunktes D^1 zu construiren; es ist dann von h durch die schon vorhandene Perspective a des Punktes A zu ziehen und die Lage der Punkte e und i darin durch Lothe zu bestimmen, wie dies vorher mit den Punkten b und v geschehen ist. — Da die Punkte c, d und g schon vorhanden sind, so können die Perspectiven der durch C und D, und durch C und G gehenden Kanten gezogen und die ferner in diesen liegenden Punkte q und f, und p^1 und w wieder durch Lothe aus der Grundebene bestimmt werden u. s. w. — Daß hier die Kante f e durch den Theilpunkt ty geht, ist eine Zufälligkeit.

Digitized by Google

Die Umständlichkeit dieses Verfahrens springt zu deutlich in die Augen, als daß man nicht das Bedürfniß erkennen sollte, für die dreierlei Richtungen von schiefen Linien, welche in dem Objecte vorkommen, nämlich R B, U V und J H, Verschwindungspunkte wie z^1, y^1 und x zu benutzen, wie dies bei den Constructionen horizontaler Linien geschieht. Es soll deshalb in dem die Constructionen schiefer Linien und Ebenen behandelnden Abschnitte die Construction solcher Verschwindungspunkte gezeigt und auch dieses Beispiels besonders gedacht werden (s. §. 312).

Siebentes Kapitel.

Nachträgliche Ermittelung der zur Construction erforderlichen Hülfspunkte u. dgl. aus dieser selbst.

§. 198. In den Fällen, in welchen man genöthigt ist, die zum perspectivischen Construiren nöthigen Stücke: den Horizont, den Hauptpunkt, die Distanz, die Verschwindungspunkte u. s. w. aus der vollendeten Darstellung nachträglich zu ermitteln — wie z. B., wenn es darauf ankommt, die Perspective einer nach der Natur angefertigten Zeichnung durch Construction zu berichtigen, oder Aenderungen in vollendeten Bildern vorzunehmen, nachdem man die Hülfslinien schon beseitigt hat, oder während des Construirens verlorene Constructionspunkte wiederzufinden — stehen folgende Hülfsmittel zu Gebote:

§. 199. In bildlichen Darstellungen bezeichnet die Grenze zwischen Himmel und Ebene oder Meer selbst den Horizont. Ist dieser durch Berge oder Bäume u. dgl. verdeckt, so ist man darauf angewiesen, aus den Linien des Terrains oder aus der perspectivischen Größe von Objecten, deren Größe zufällig bekannt ist und die sich auf einer und derselben horizontalen Ebene befinden, auf den perspectivischen Ort des Horizontes zu schließen. Finden sich jedoch Gebäude in der Darstellung, so hat man nur zwei der daran als horizontal und

Digitized by Google

einander parallel erkennbaren Linien, wie in Fig. 57 etwa die Linien a b und c d, oder a b und e f, bis zu ihrem Schnitt- oder Verschwindungspunkte y zu verlängern, um dann durch diesen den Horizont ziehen zu können.

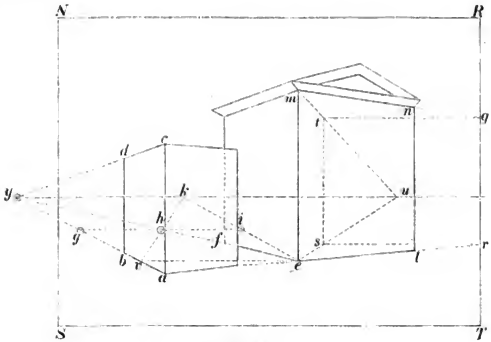

Fig. 57.

Fällt hierbei der Schnittpunkt der ins Auge gefaßten beiden Linien a b und e f außerhalb der durch die Linie N S bezeichneten Bildgrenze, so verfährt man umgekehrt wie in §. 126. Man zieht nämlich e v horizontal, an einer beliebigen andern Stelle g h ebenfalls horizontal durch die beiden Linien, verlängert g h über h hinaus und macht in ihr h i geometrisch gleich g h, wonach eine von v durch h und eine von e durch i gezogene Linie sich in einem im Horizonte gelegenen Punkte k schneiden müssen.

§. 200. Ständen zur Ermittelung des Horizontes nur die beiden als horizontal und parallel erkennbaren Linien e l und m n zu Gebote, deren Schnitt- und Verschwindungspunkt jedoch ebenfalls außerhalb der durch die Linie R T bezeichneten Bildgrenze fiele, so verfährt man umgekehrt wie in §. 124. Man verlängert die beiden Linien bis zu den in der Bildgrenze liegenden Punkten r und q, zieht durch diese horizontale Linien, zieht ferner e u beliebig, legt durch ihren Schnittpunkt s eine Lothrechte s t, und zieht dann von m durch t eine Linie. Der Schnittpunkt u derselben mit der Linie e u ist dann ein Punkt des Horizontes.

Digitized by Google

Sind von zwei neben einander liegenden Strecken b a und a c (Fig. 58) der Perspective b c einer als horizontal bekannten, der Bildebene nicht parallelen Linie B C deren geometrische Längen zufällig, z. B. als gleich b α und α γ, bekannt, so findet man, wenn §. 201.

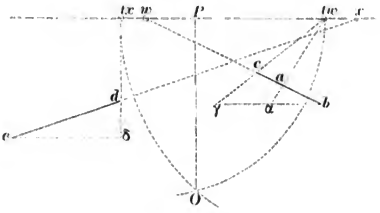

Fig. 58.

man auf eine durch b gezogene Horizontale von b aus die bekannten Längen b α und α γ neben einander geometrisch aufträgt und Linien von α durch a, und von γ durch c bis zu ihrem Schnittpunkte tw zieht, in einer durch diesen gezogenen Horizontalen den Horizont; denn tw ist den gegebenen Umständen nach der Theilpunkt für b c.

Ist der perspectivische Ort des Horizontes außer Zweifel, so §. 202. kann man aus der perspectivischen Größe etwa vorhandener Objecte von bekannter Größe, etwa menschlicher Figuren, nachdem man durch sie das Fußmaß für den Ort ihres Standpunktes festgestellt hat, berechnen, wie viel Fuß der Horizont über oder unter ihrem Standpunkte liege; indem man nämlich ermittelt, wieviel mal die vorliegende perspectivische Größe des Objectes in dem normalen Abstande seines Fußpunktes von dem Horizonte enthalten ist, und dann mit der gefundenen Zahl ihre bekannte Größe multiplicirt. (S. §. 363.) Hierdurch ist der Fußmaßstab und zugleich das Maß der Höhe des Auges leicht zu ermitteln, besonders wenn man dabei beachtet, daß in den Perspectiven von lothrechten Linien, welche auf einer und derselben horizontalen Ebene stehen, die Strecken von ihren Fußpunkten bis zum Horizonte stets einander geometrisch gleichen Längen entsprechen.

Digitized by Google

§. 203. Sind die Perspectiven a c und b d (Fig. 59) horizontaler Linien mit der Grundlinie der Bildebene parallel, so sind nach §. 54 die Perspectiven a e und b f der als zu jenen rechtwinklig erkennbaren Horizontalen nach dem Hauptpunkte P gerichtet und ist dieser durch Verlängerung der letzteren bestimmbar.

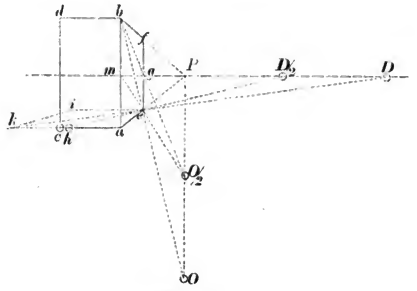

Fig. 59.

§. 204. Liegt die Perspective a e i k (Fig. 59) eines horizontal liegenden, oder die Perspective a e f b eines lothrecht stehenden, zur Bildebene normalen Quadrates vor, oder gelingt es durch Combination derartige Quadrate zu bilden, so ergiebt eine Quadrat-Diagonale k e in ihrem Schnittpunkte D mit dem Horizonte einen Distanzpunkt (die Distanz); ebenso eine Diagonale b e in ihrem Schnittpunkte O mit der Verticale den herabgeschlagenen Gesichtspunkt (die Distanz). Zieht man von dem Halbirungspunkte h der Quadratseite a k durch e eine Linie, so ergiebt ihr Schnittpunkt $D_{/2}$ mit dem Horizonte die halbe Distanz, so wie eine von dem Halbirungspunkte m der Quadratseite a b durch e, oder eine von b durch den Halbirungspunkt g der Quadratseite e f gezogene Linie in ihrem Schnittpunkte $O_{/2}$ mit der Verticale auf dieser die halbe Distanz ergiebt.

§. 205. Liegt nur die Perspective a e (Fig. 59) einer Linie vor, deren Richtung als zur Bildebene normal, und deren Länge als geometrisch etwa gleich a k bekannt ist, so ergiebt die Verlängerung der Linie bis zum Horizonte hierin zunächst den Hauptpunkt;

Digitized by Google

legt man darauf durch a eine Horizontale von der bekannten Länge a k, so schneidet eine von k durch e bis zum Horizonte gezogene Linie diesen im Distanzpunkte.

Liegt die Perspective eines horizontal liegenden rechten Winkels §. 206.
c a b (Fig. 60), dessen Schenkel schief zur Bildebene sind, vor, und ist der Hauptpunkt des Bildes aus anderen Umständen bekannt,

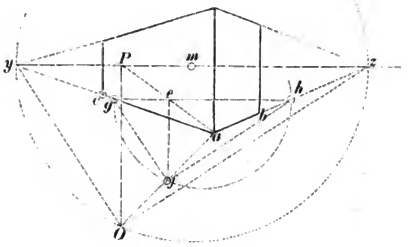

Fig. 60.

so findet man den herabgeschlagenen Gesichtspunkt, die Distanz, wenn man das Stück des Horizontes zwischen den beiden Verschwindungspunkten y und z der Winkelschenkel als Durchmesser eines Kreises ansieht, diesen, nachdem man in m seinen Mittelpunkt festgestellt hat, mit dem Radius m y schlägt, und durch den Hauptpunkt eine zum Horizonte normale Linie P O zieht. Es ist diese dann selbstverständlich die Verticale, und ihr Schnittpunkt O mit der Peripherie des Kreises der herabgeschlagene Gesichtspunkt (die Distanz). Zieht man nämlich O y und O z, welche mit einander einen rechten Winkel bilden, da sie einen Peripheriewinkel über einem Durchmesser (y z) bilden, so hat man in ihnen die Parallelstrahlen zu den Winkelschenkeln a c und a b vor sich.

Liegen hierbei die Verschwindungspunkte y und z außerhalb des §. 207.
Bildes, so zieht man a P, theilt darauf einen Bruchtheil, in e z. B. die Hälfte ab, und schneidet durch eine durch e gezogene Horizontale die Winkelschenkel in g und h, wonach g h gleich der Hälfte von y z ist (§. 120); man schlägt ferner um g h, diese Linie als Durchmesser

Digitized by Google

angesehen, einen Kreis, und errichtet auf ihr in e eine Normale, welche den Kreis in f schneidet. e f ist alsdann die halbe Distanz. Denn da a e die Hälfte von a P ist, so muß in dem wegen Parallelität der Seiten dem Dreieck a P O ähnlichen Dreieck a e f auch die Seite e f die Hälfte von P O sein. Der herabgeschlagene Gesichtspunkt selbst ist hiernach in dem Punkte zu finden, in welchem eine von a durch f gezogene Linie die Verticale schneidet.

§. 208. Der Hauptpunkt und die Distanz sind in Darstellungen, in welchen die Perspectiven horizontal liegender rechter Winkel vorliegen, deren Schenkel schief zur Bildebene und von unbekannter Länge (s. §. 213) sind, durch Construction nur aufzufinden, wenn

1) jene rechten Winkel Quadraten angehören, so daß man durch diese zugleich den Diagonalpunkt; oder wenn man diesen doch aus anderen Umständen bestimmen kann; oder wenn

2) wenigstens zweierlei horizontal, aber verschieden liegende rechte Winkel vorliegen.

§. 209. Ist, was den ersten Fall betrifft, etwa durch Verlängerung einer Quadrat-Diagonale, allenfalls durch eine durch die Gehrung einer rechtwinkligen Ecke hindurchgezogene Linie, der Diagonalpunkt dg (Fig. 61) bestimmt, so hat man zunächst die Verschwindungspunkte y und z der Schenkel a d und a b des vorliegenden rechten Winkels festzustellen, um das zwischen ihnen liegende Stück des Horizontes, dieses als Durchmesser angesehen, einen Kreis zu schlagen, dessen obere Hälfte durch den lothrechten Radius m r in zwei gleiche Bogen y r und z r zu theilen, und dann, von r durch den Diagonalpunkt ziehend, die Peripherie im Punkte O zu schneiden. Dieser ist alsdann der herab-

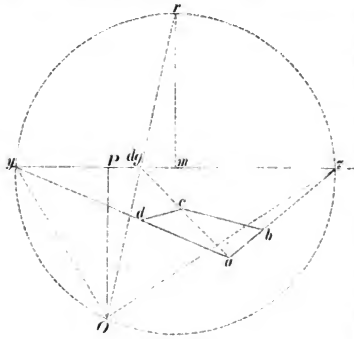

Fig. 61.

geschlagene Gesichtspunkt; eine von ihm auf den Horizont gefällte Normale O P ist die Verticale und zugleich die Distanz, P der Hauptpunkt, und O y, O z und O dg sind die Parallelstrahlen zu den Winkelschenkeln a d und a b und zu der Diagonale a c. Indem man nämlich r dg verlängert bis zur Peripherie zog, bezeichnete man im Punkte O, was diesen als herabgeschlagenen Gesichtspunkt charakterisirt, den Scheitelpunkt des über dem Halbkreise y r z liegenden rechten Peripheriewinkels y O z und zugleich der beiden neben dessen Halbirungslinie r O über den gleichen Bogen y r und z r liegenden gleichen Peripheriewinkel y O r und z O r.

Ergeben sich hierbei die Verschwindungspunkte y und z als außerhalb der Bildfläche liegend, so kann man dieselbe Construction in kleinerem Maßstabe ausführen, wenn man von einer beliebig, am besten normal von a zum Horizonte gezogenen Linie a h (Fig. 62) §. 210.

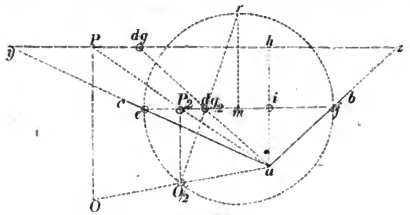

Fig. 62.

einen Bruchtheil, etwa $^1/_2$ im Punkte i abtheilt, durch letzteren eine Horizontale zieht, welche die Schenkel des vorliegenden rechten Winkels c a b in e und f und die Diagonale a dg in $dg_{/2}$ schneidet, dann über der Linie e f, diese als Durchmesser genommen, einen Kreis schlägt, in ihm den lothrechten Radius m r und von r eine Linie durch $dg_{/2}$ bis $O_{/2}$ in der Peripherie zieht. Fällt man darauf von $O_{/2}$ auf e f eine Normale $O_{/2}$ $P_{/2}$, so ist diese die Hälfte der Distanz, so wie $P_{/2}$ $dg_{/2}$ die Hälfte des wirklichen Abstandes des Hauptpunktes vom Diagonalpunkte ist. Es ist deshalb, wenn man von a durch $P_{/2}$ bis Punkt P im Horizonte und von a durch $O_{/2}$ bis O in der Verticale zieht, ersterer der Hauptpunkt und letzterer der herabgeschlagene Gesichtspunkt.

Digitized by Google

§. 211. Liegen, was den zweiten der in §. 208 gedachten Fälle betrifft, die Perspectiven a b c und d e f (Fig. 63) zweier horizontal liegenden rechten Winkel vor, deren Schenkel nach verschiedenen Verschwindungs-

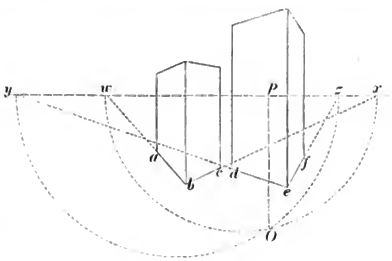

Fig. 63.

punkten y und z, und w und x gerichtet sind, so findet man den Hauptpunkt und die Distanz folgendermaßen:

Da der herabgeschlagene Gesichtspunkt jedesmal der Scheitelpunkt des rechten Winkels ist, welchen die Parallelstrahlen zu den Perspectiven der Schenkel eines rechten Winkels bilden, so ist er in der Peripherie des Kreises gelegen, welchen man durch die beiden Verschwindungspunkte, ihren Abstand von einander als Durchmesser angesehen, schlagen kann. In der Figur muß daher der herabgeschlagene Gesichtspunkt sowohl in dem Kreise, welchen man um den Durchmesser y z, wie in dem Kreise, welchen man um den Durchmesser w x construiren kann, d. h. in dem Schnittpunkte O beider Kreise, liegen. Eine von O normal zum Horizonte gezogene Linie O P (die Verticale) ergiebt demnach an sich die Distanz und in P den Hauptpunkt.

§. 212. Die Perspectiven zweier rechten Winkel mit verschiedenen Verschwindungspunkten liegen vor, sobald es nur glückt, die Perspective eines horizontal liegenden Quadrates aufzufinden. Es bieten dann nämlich je zwei Quadratseiten den einen und die Diagonalen des Quadrates den andern rechten Winkel dar. Da aber hierbei von den vier Verschwindungspunkten gewöhnlich zwei sehr entfernt liegen, so

Digitized by Google

muß die Construction in kleinerem Maßstabe und zwar am besten folgendermaßen ausgeführt werden:

Ist a b c d in Fig. 64 die Perspective eines Quadrates, so ist a b c der eine zur Construction dienliche rechte Winkel, und der Winkel d m c, welchen die Diagonalen des Quadrates bilden, der andere.

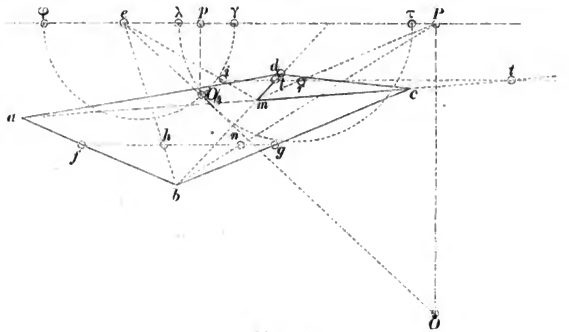

Fig. 64.

Man zieht nun von den Scheitelpunkten b und m beider nach einem beliebigen Punkte e des Horizontes Linien, steckt auf der Linie b e einen Bruchtheil von ihr, etwa 1/4 in h, und den gleichnamigen Bruchtheil von m e in i ab, legt durch h eine Horizontale, welche die entsprechenden Winkelschenkel in f und g, und durch i eine Horizontale, welche die entsprechenden Winkelschenkel in l und t schneidet. Macht man darauf im Horizonte e φ und e γ geometrisch gleich h f und h g, und ebenso e λ und e τ gleich i l und i t, und schlägt dann durch φ und γ, und durch λ und τ, die Abstände dieser Punkte von einander als Durchmesser angesehen, Kreise, so schneiden sich diese im Punkte O/4, dessen normaler Abstand O/4 p vom Horizonte 1/4 der Distanz ergiebt. Vervierfacht man alsdann e p zu e P, so ist P der Hauptpunkt und P O (gleich 4 mal p O/4) die Distanz. Doch ist P auch dadurch zu finden, daß man h n auf der Linie f g, oder i r auf der Linie i t geometrisch gleich e p macht, und dann von b durch n, oder von m durch r bis zum Horizonte zieht. So auch

Digitized by Google

ist O dadurch zu finden, daß man von e durch $O/_4$ eine Linie zieht und dieselbe von e aus gleich 4 mal e $O/_4$ macht.

§. 213. Ist der Horizont bekannt, und sind im Bilde die Perspectiven von wenigstens zwei ihrer geometrischen Länge nach bekannten horizontalen, zur Bildebene schiefen Linien aufzufinden, so sind hierdurch Distanz und Hauptpunkt, und zwar wegen der in §. 101 hervorgehobenen Beziehungen der Theilpunkte zu den Verschwindungspunkten, zu ermitteln.

Sind z. B. (Fig. 58) die Perspectiven e d und b a zweier horizontalen Linien E D und B A vorhanden, von denen die erstere als etwa 30 Fuß, die letztere als etwa 20 Fuß lang bekannt ist, so ergeben sich zunächst die Verschwindungspunkte x und w ihrer Perspectiven durch deren Verlängerung bis zum Horizonte. Die diesen Linien entsprechenden Theilpunkte tx und tw aber werden gefunden, wenn man durch e die 30 Fuß lange Horizontale e δ, und durch b die 20 Fuß lange Horizontale b α legt und dann δ d und α a beide verlängert bis zum Horizonte zieht. Schlägt man hiernach um x einen Kreisbogen mit dem Radius x tx, und um w einen Kreisbogen mit dem Radius w tw, so schneiden sich beide Bogen in dem herabgeschlagenen Gesichtspunkte O, woraus sich Hauptpunkt und Distanz nun leicht ergeben.

---

b. Krummlinige geometrische Figuren und Körper, welche von krummen Flächen begrenzt sind.

Achtes Kapitel.

Perspectiven krummer Linien.

§. 214. Um die Perspective einer krummen Linie zeichnen zu können, reicht selbstverständlich nicht, wie bei den Perspectiven gerader Linien, die Construction nur zweier ihrer Punkte aus; es müßte vielmehr, streng genommen, jeder einzelne ihrer Punkte construirt werden. Da

Digitized by Google

dies jedoch unausführbar ist, läßt man es bei der Construction mehrerer womöglich charakteristisch gelegenen, etwa durch leicht zu construirende Tangenten bestimmten Punkte der Curve bewenden und zeichnet die Perspective der letztern durch jene hindurch aus freier Hand. Nachdem man nämlich für die Curve zuvor an irgendeiner beliebig angenommenen, am besten lothrechten oder horizontalen geraden Linie (Abscissenachse) Anhalt gesucht, zieht man von jenen als charakteristisch befundenen Punkten Ordinaten, zu dieser, construirt die Perspectiven der Abscissen, darauf die der Ordinaten, und erzielt so in den Endpunkten der letzteren die Perspectiven jener Punkte.

Sollte z. B. die Perspective der in Fig. 40 (Taf. 8) gegebenen, §. 215.
bei Tunnel-Eingängen vorkommenden Curve construirt werden, so würden wohl als charakteristisch und vortheilhaft für die Construction gelegen ins Auge zu fassen sein zunächst die Endpunkte A und G, dann C und E, in welchen lothrechte, durch A und G gezogene Linien die Curve schneiden; ferner D, in welchem eine horizontale Linie die Curve berührt; endlich B und F, in welchen lothrechte Linien die Curve berühren. Nach Feststellung dieser Punkte müßte man dann außer den schon vorhandenen Ordinaten CA, EG, BJ und FK noch DH gegen die Abscissenachse KJ, in welcher zugleich die Ebene der Curve die Grundebene schneidet, ziehen, man müßte die Perspectiven der Punkte J, A, H, G und K, und darauf die Perspectiven der in diesen Punkten lothrecht stehenden Ordinaten construiren, wonach dann deren Endpunkte a, b, c, d, e, f und g Punkte der Perspective der Curve wären.

Wenn die gegebene Curve sich dazu eignet, wie etwa die in §. 216.
Fig. 41 (Taf. 8) vorliegende Verzierung, so kann man dieselbe auch vorweg in ein Netz von Quadraten oder gleichen Rechtecken, wie die Figur es zeigt, einschließen, die Perspective dieser Rechtecke, deren Seiten als die gedachten Ordinaten anzusehen sind, construiren, und darin die Perspective der Curve nach dem Augenmaße einzeichnen.

Mittels der Ordinaten ist auch die am häufigsten vorkom- §. 217.
mende Curve, der Kreis, zu construiren, und gestattet dabei die

Digitized by Google

große Regelmäßigkeit dieser Curve die Anwendung gewisser, in allen Fällen ähnlich liegenden Ordinaten. Bevor jedoch das dabei einzuschlagende Verfahren erörtert wird, erscheint es zweckmäßig, festzustellen, welche Figuren möglicherweise die Perspective eines Kreises bilden könne:

§. 218. Die Perspective eines Kreises, dessen Ebene mit der Bildebene selbst zusammenfällt oder dieser parallel ist, ist ebenfalls ein Kreis; denn sie ist die Durchschnittsfigur der Bildebene mit dem dem Kreise selbst entsprechenden Gesichtslinienkegel und muß, weil sie hier parallel der Grundfläche dieses Kegels ist, eine dieser Grundfläche mathematisch ähnliche Figur bilden.

Ist die Ebene des gegebenen Kreises jedoch nicht der Bildebene parallel, so ist Folgendes zu bemerken: Schon in §. 63 ist erwähnt worden, daß in der Standebene oder rückwärts derselben liegende Punkte nicht darstellbar sind, da ihre Perspectiven in unendlicher Entfernung liegen. Während nun die Perspective eines Kreises, dessen sämmtliche Punkte vorwärts der Standebene liegen und dessen Ebene der Bildebene nicht parallel ist, eine Ellipse ist, weil hier die Bildebene den Gesichtslinienkegel nicht parallel mit dessen Grundfläche durchschneidet, muß in dem Falle, daß ein solcher Kreis mit einem Punkte in der Standebene liegend gegeben ist, seine Perspective ein Kegelschnitt mit einem in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darstellbaren Punkte, also eine Parabel sein. In dem Falle aber, daß ein Kreis mit zwei Punkten in der Standebene liegend gegeben ist, muß seine Perspective ein Kegelschnitt mit zwei in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darstellbaren Punkten, also eine Hyperbel sein (§. 235).

Die Perspective eines Kreises schließlich, dessen Ebene durch den Gesichtspunkt geht, muß eine gerade Linie sein, denn zwei Ebenen, die Ebene der Gesichtslinien nach diesem Kreise und die Bildebene, können sich nur in einer geraden Linie schneiden.

§. 219. Um die Perspective eines Kreises — wenn dieselbe nicht selbst ein Kreis ist — zu construiren, faßt man, was das Einfachste ist, zunächst dasjenige der ihn einschließenden Quadrate ins Auge, dessen eines Seitenpaar parallel der Bildebene ist. Wäre z. B. in

Digitized by Google

Fig. 42 (Taf. 8) der Kreis, und in dessen Durchmesser II. IV die Richtung der Bildebene gegeben, so würde J F G H das gedachte Quadrat sein. Durch Construction der Perspective dieses Quadrates erzielt man nämlich nicht allein in den Halbirungspunkten I, II, III und IV seiner Seiten vier Punkte der Perspective des Kreises, sondern auch in den Seiten selbst, was bei der Construction von Curven unentbehrlich ist, die Tangenten zu diesen Punkten. Noch vier andere leicht construirbare Punkte bieten sich dar in den Schnittpunkten V, VI, VII und VIII der Diagonalen desselben Quadrates mit der Peripherie des Kreises. Sie sind die Eckpunkte des vom Kreise eingeschlossenen, dem ersten ähnlich liegenden Quadrates. Die Tangenten dazu werden gebildet durch die Seiten eines einschließenden Quadrates S R T U, dessen Seiten wie die Diagonalen des ersten Quadrates gerichtet sind.

§. 220. Ist also P in Fig. 43 (Taf. 8) der Hauptpunkt, P D die Distanz, a die Perspective des Mittelpunktes A des gegebenen Kreises, und 2. 4 die seines der Bildebene parallelen Durchmessers, so sind, um seine Perspective zu construiren, von P aus Linien durch die Punkte a, 2 und 4 zu ziehen und dieselben durch eine von D durch a zu ziehende Diagonale in f und h zu schneiden. Es liegt dann, nachdem man noch f g und h i horizontal gezogen, in der Figur f g h i die Perspective des ersten den Kreis einschließenden Quadrates vor, deren Seiten Tangenten zu den vier der Kreisperspective angehörigen Punkten 1, 2, 3, 4 sind. — Die zweiten vier, in den Diagonalen f h und g i der Quadratperspective liegenden Punkte der Kreisperspective werden gefunden, wenn man — nachdem man zuvor, wie über der Fig. 43 geschehen ist, einen Quadranten des Kreises geometrisch dargestellt, denselben durch den Radius a° 5° halbirt, die Ordinate 5° q° gezogen, und das Maß a° q° auf den horizontalen Durchmesser der Construction von a aus nach beiden Seiten in a q¹ und a q aufgetragen hat — Linien von P durch q¹ und q zieht; es schneiden diese dann die Diagonalen in den gesuchten vier Punkten 5, 6, 7 und 8. — Die perspectivischen Tangenten zu diesen Punkten findet man, wenn man auf dem horizontalen Durchmesser q¹ u und q r geometrisch gleich a q macht und darauf Linien von u

Digitized by Google

durch 6 und 7, und von r durch 5 und 8 zieht. Da diese Linien jedoch nach den Distanzpunkten D und D^1 gerichtet sind, kann man sie, wenn diese vorhanden sind, gleich von diesen aus, ohne Anwendung der Punkte u und r, durch 7 und 5, und durch 6 und 8 ziehen.

Als die zu diesem Verfahren erforderliche Abscissenlänge a q kann man übrigens, wie der Quadrant veranschaulicht, sofort die halbe Diagonale, a° (q°) oder 1° (q°), des Quadrates verwenden, welches den Quadranten einschließt, oder, was dasselbe sagt, die Hälfte der Sehne 1° 4° des Quadranten. Da sich ferner die Länge des Radius a° 4° zur Länge der Abscisse a° q° verhält wie die Hypotenuse (a° 5°) eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (a° 5° q°) zur Kathete (a° q°), also wie etwa 17 : 12, oder wie 10 : 7, so könnte man auch, um den Punkt q in der Construction zu finden, den Radius a 4 in 10 Theile theilen und, ohne erheblich zu irren, q als 7 dieser Theile von a entfernt liegend bestimmen.

§. 221. In den meisten Fällen werden die so construirten acht Punkte nebst ihren Tangenten genügen, um durch sie die Perspective des Kreises aus freier Hand zeichnen zu können. Fällt die Perspective jedoch so groß aus, daß noch mehr Punkte wünschenswerth sind, so kann man noch acht je zwischen zweien der schon vorhandenen acht Punkte gelegene andere Punkte der Peripherie, welche durch Linien zwischen schon vorhandenen Hülfspunkten bestimmbar sind, benutzen. Es liegen dieselben alle entsprechend dem Punkte IX (Fig. 42), welcher der Schnittpunkt der Linien Q X und III R ist und dessen Tangente die Linie W IX ist. In der Construction liegen die Punkte q, x, 3 und r schon vor; nur w ist noch auf der Quadratseite i h durch Verlängerung der Linie 5. 8 zu bestimmen. Nachdem hier also dann vermittelst der Linien q x und 3 r der Punkt 9 selbst festgestellt ist, ergiebt sich in der Linie w 9 die Tangente dazu u. s. w.

Andere zur Construction der Kreisperspective ins Auge zu fassenden Punkte sind die wie Punkt XVII in Fig. 42 gelegenen (acht) Punkte der Kreisperipherie. XVII ist der Schnittpunkt der Diagonale F IV des Rechtecks F G IV. II, welches die Hälfte des den Kreis einschließenden Quadrates ist, mit einer Linie, welche man von Punkt II nach Punkt Y, dem Halbirungspunkte von F I, zieht.

Digitized by Google

Derartig zu verwendender Punkte giebt es noch viele in der Kreisperipherie; doch ist die Construction ihrer Tangenten zu umständlich, als daß man sie zur Benutzung empfehlen könnte.

Noch andere Punkte der Perspective der Kreiscurve kann man erzielen, wenn man die Perspective noch irgendeines andern der den Kreis einschließenden Quadrate, deren eines Seitenpaar der Bildebene nicht parallel ist, darstellt und dabei für die in den Diagonalen liegenden Punkte die Abscissenlängen mittels der Theilpunkte construirt. Das Verfahren hierbei ist ähnlich dem in der folgenden Figur befolgten, wo indessen die Ebene des darzustellenden Kreises nicht horizontal, sondern lothrecht und zur Bildebene schief ist. §. 222.

Ist nämlich, wenn P in Fig. 44 (Taf. 8) als Hauptpunkt und P O als Distanz gegeben sind, um den Mittelpunkt a die Perspective eines Halbkreises zu construiren, zu welchem b g f i die Perspective des einschließenden ganzen Quadrates ist, und dessen Ebene also die durch Punkt z lothrechte Linie zur Grenzlinie hat, so bezeichnen zunächst die perspectivisch-horizontale Halbirungslinie 3. 1 und die lothrechte Halbirungslinie 4. 2 des Quadrates auf dessen Seiten schon drei Punkte: 3, 4 und 1 der Perspective der Curve. Die Perspectiven der beiden in den Diagonalen liegenden Punkte findet man, wenn man die beiden Diagonalen zieht, dann in i C B den Quadranten des Kreises und vermittelst der Linien B E und E K in E K die ihm entsprechende Abscissenlänge geometrisch darstellt; darauf vermittelst des Theilpunktes tz (für die in z verschwindenden Linien) 2 k und 2 k^1 perspectivisch gleich B K macht, und k 8 und k^1 5 lothrecht zieht. Zieht man dann noch 8. 5 und macht q r gleich q a, so sind von r durch 8 und 5 gezogene Linien r u und r s die Tangenten an letzteren Punkten. Beide Linien weichen von der der Grenzlinie z D^3 entsprechenden Verticale z tz (dem Horizonte) um einen halben rechten Winkel ab und verschwinden daher in den jener Grenzlinie entsprechenden Distanzpunkten D^2 und D^3. Um zwischen den Punkten 8 und 3 noch einen Punkt 9 der Curve zu finden, hat man nach §. 221 die Punkte c mit e, und 4 mit u durch Linien zu verbinden, und durch deren Schnittpunkt 9 die Tangente v 9 zu ziehen. §. 223.

Digitized by Google

§. 224. Bedarf man außer den bei der vorher gezeigten Constructionsart benutzten Punkten für gewisse Stellen der Kreisperspective noch mehrerer, so kann man dieserhalb das der Eigenthümlichkeit der Kreiscurve am meisten entsprechende Verfahren einschlagen, nämlich die Perspectiven beliebiger Radien construiren.

Ist z. B. a in Fig. 45 (Taf. 8) die Perspective des Mittelpunktes, c b die Perspective des der Bildebene parallelen Durchmessers eines gegebenen horizontalen Kreises, und zieht man durch a einen beliebigen Radius a h, so ist v dessen Verschwindungspunkt, tv sein Theilpunkt. Wird nun a h durch eine von tv durch c gezogene Linie perspectivisch gleich a c gemacht, so ist h ein Punkt der Kreisperspective. — Der Verschwindungspunkt der Tangente an dem Punkte h würde der mit dem Punkte v correspondirende Verschwindungspunkt sein.

§. 225. Dem mathematischen Lehrsatze zufolge, daß alle Peripheriewinkel über einem Durchmesser rechte Winkel sind, ist die Kreiscurve als durch eine Reihe von Scheitelpunkten der über dem Durchmesser denkbaren rechten Winkel gebildet anzusehen, und kann man ihre Perspective, wenn der der Bildebene parallele Durchmesser gegeben ist, auch demgemäß construiren.

Ist z. B. c b in Fig. 45 ein solcher Durchmesser eines gegebenen horizontalen Kreises, und man zieht durch c eine beliebig gerichtete perspectivisch horizontale Linie c z, construirt durch Punkt b die Perspective b y einer zu c z rechtwinkligen horizontalen Linie, so ist der Schnittpunkt e beider Linien c z und b y ein Punkt der dem Durchmesser c b entsprechenden Kreisperspective, weil er der Scheitelpunkt eines rechten Winkels c e b ist, dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen. Aus demselben Grunde muß auch der Schnittpunkt f der beiden Linien y c und z b ein Punkt der Kreisperspective sein. Ebensolche Punkte sind auch i und g als Schnittpunkte der zu einander rechtwinkligen Linien c D^1 und b D, und D c und D^1 b. Noch mehr Punkte als die nun schon vorhandenen c, e, i, b, f und g ergeben sich aus der Fortsetzung dieses Verfahrens, das nur wegen der Punkte in der Nähe von c und b unzureichend wird, da hierzu je ein Verschwindungspunkt der Schenkel

Digitized by Google

der rechten Winkel zu entfernt fällt. Aushülfe gewährt hier die zuerst empfohlene Ordinaten-Construction §. 217.

Die Tangente an einem Punkte wie f findet man, wenn man den Radius a f zieht, denselben bis w im Horizonte verlängert, zu w den correspondirenden Verschwindungspunkt x ermittelt und x f zieht. Die Tangenten an i und g sind, da die Radien nach diesen Punkten in P verschwinden, selbstverständlich mit c b parallel.

Auf Grund des mathematischen Lehrsatzes, daß jeder Peripherie- §. 226.
winkel über einer Sehne halb so groß ist wie der Centriwinkel über der Sehne, kann man, wenn die Perspective einer der Bildebene parallelen Sehne, deren Centriwinkel man kennt, gegeben ist, Punkte der entsprechenden Kreisperspective auch in den Scheitelpunkten der Perspectiven solcher Winkel finden, welche halb so groß wie der Centriwinkel sind und deren Schenkel durch die Endpunkte der Sehne gehen.

Ist z. B. k f in Fig. 45 eine solche Sehne, welche als einem Centriwinkel (k a f) von 62° entsprechend bekannt ist, und man zieht k P, trägt dann an P O in O die Hälfte des Centriwinkels, also den Winkel P O w von 31°, an und zieht die Linie f w, so ist ihr Schnittpunkt e mit k P ein Punkt der Kreisperspective; denn der Winkel k e f entspricht den obigen Bedingungen. Zieht man ebenso k u, trägt an den Parallelstrahl O u in O den Winkel u O r von 31° an und zieht die Linie f r, so schneidet sie die k u ebenfalls in einem Punkte n der Kreisperspective u. s. w. — Die Perspectiven der Tangenten an den Punkten e und n müssen wie in dem vorhergehenden Paragraphen perspectivisch normal zu den Radien a e und a n construirt werden.

Punkte der Kreisperspective unter der Sehne sind in den Perspectiven der Scheitelpunkte von Peripheriewinkeln zu finden, welche 180° — 31°, d. i. 149°, groß sind.

Ist die Perspective eines Kreises oder eines Theiles desselben §. 227.
in sehr großem Maßstabe darzustellen, so kann dies auch ausschließlich durch Construction einer Folge von leicht construirbaren Tangenten des Kreises geschehen, deren Lage, s. Fig. 46 (Taf. 8), folgendermaßen bestimmt wird: In dem Quadranten A B M z. B. theilt man die

Digitized by Google

Seite C B des ihn einschließenden Quadratviertels in eine beliebige Anzahl, etwa 8, geometrisch gleicher Theile, zieht dann B A über A verlängert und macht darin A F gleich B A, wobei Punkt F in die dem getheilten Stücke gegenüberliegende verlängerte Quadratseite und zwar so weit entfernt von E fällt, wie C von B liegt. Schneidet man darauf die Seite C A durch Linien, aus dem Punkte F nach den Theilungspunkten der Seite C B gezogen, und verbindet die Schnittpunkte durch Linien mit den entgegengesetzt bezifferten Theilungspunkten der Seite C B, so sind diese Linien Tangenten des Quadranten. Die auf dem Stück C A einmal ausgeführte Theilung ist dann leicht durch Linien, parallel C B gezogen, auf das Stück J K, und durch andere Linien, durch den Mittelpunkt M gezogen, auf das Stück K H zu übertragen, während B J, H G u. s. w. wieder wie C B getheilt werden.

§. 228. Soll nun demgemäß in Fig. 47 (Taf. 8) in der Perspective i c e h eines in einer lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene liegenden Quadrates, ein Stück der Perspective des eingeschlossenen Kreises construirt werden, so theilt man c b und b i je in eine beliebige Anzahl, etwa 8, geometrisch gleicher Theile, zieht von b durch a bis f in der verlängerten Quadratseite h c, und schneidet c a durch Linien, von den Theilungspunkten des Stückes b c nach f gezogen. Es sind dann Linien, durch die entgegengesetzt gelegenen Theilungspunkte der Stücke b c und a c gezogen, Tangenten der Quadrantenperspective a b m. Die Theilung des Stückes a c kann auch durch Linien von dem Punkte g nach den Theilungspunkten des Stückes c l bewirkt werden. Die Theilung des Stückes e a ist durch Linien, von den gleichentfernten Theilungspunkten des Stückes g e nach dem Punkte l gezogen, zu bewirken, aber auch durch Linien, welche von den gleichentfernten Theilungspunkten des Stückes e f nach b gezogen werden. Die Theilung des Stückes i k kann durch Linien, von den Theilungspunkten des Stückes e a durch den Mittelpunkt m gezogen, geschehen; doch kann man einen Theil der Tangenten in dem Quadranten b k m auch dadurch erlangen, daß man, von f durch die Theilungspunkte des Stückes c l ziehend, die verlängerte e c schneidet, und von diesen Schnittpunkten durch die Theilungspunkte des Stückes b i zieht u. s. w. —

Digitized by Google

Nachdem im Vorhergehenden das bei der Construction der Perspectiven krummer Linien einzuschlagende Verfahren gezeigt worden, bleibt noch übrig, an einer Reihe von Beispielen die Anwendung der gegebenen Rathschläge beim Construiren der Perspectiven von Körpern, welche ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzt sind, zu zeigen. Daß zur perspectivischen Construction sich vorzüglich regelmäßige geometrische Körper, wie Kegel, Cylinder, Kugel, und die aus diesen zusammengesetzten eignen, und daß man unregelmäßigen Körpern gegenüber, wenn man dieselben nicht wenigstens in ihren Theilen auf regelmäßige zurückführen kann, der großen Umständlichkeit wegen auf das Construiren verzichten muß und auf die freie Auffassung angewiesen ist, ergiebt ein Blick auf die dargelegten Constructionsmittel. §. 229.

Neuntes Kapitel.

Beispiele. Perspectiven von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt sind.

Beispiel 16.

Aufgabe. In Fig. 48 (Taf. 9) ist in dem gleichschenkligen Dreiecke KGL der Aufriß eines **Kegels**, und in Fig. 49 in der lothrechten Linie ka die Perspective seiner Achse, wozu P in Fig. 52 der Hauptpunkt und PD die Distanz ist, gegeben — es soll, die Bildebene durch die Achse ka angenommen, die Perspective des Kegels construirt werden. §. 230.

Ausführung. Nachdem man in Fig. 49 durch a den hier mit der Bildebene zusammenfallenden Durchmesser lg der Grundfläche gezogen, construirt man die elliptische Perspective lhgi der Peripherie der letztern mittels des sie einschließenden Quadrates und der in dessen Diagonalen liegenden Punkte, wie dies in §. 220 gezeigt ist. Die Perspectiven der beiden als Umrisse auftretenden Kegelseiten ergeben sich in den beiden Tangenten, welche man von der Spitze k an die Ellipse zieht. §. 231.

Digitized by Google

Um hierfür die Berührungspunkte u und t durch eine Linealconstruction, die bei allen Kegelschnitten zutrifft, genau festzustellen, zieht man von k aus zwei beliebige gerade Linien, etwa k l und k q durch die Ellipse, verbindet die vier Schnittpunkte l mit m, und q mit n durch gerade, sich hier im Punkte s schneidende Linien, zieht ferner von m durch n, und von q durch l Linien, welche sich im Punkte r schneiden, und findet dann in den Schnittpunkten u und t einer von r durch s gezogenen Linie mit der Ellipse die gesuchten Berührungspunkte.

Beispiel 17.

§. 232. **Aufgabe.** In Fig. 50 (Taf. 9) ist in den beiden kleineren um Punkt A geschlagenen Kreisen der Grundriß eines **cylindrischen Fontainenbassins**, in Fig. 51 dazu der Aufriß gegeben; ferner ist in den beiden größeren Kreisen der Fig. 50 der Grundriß eines 5 Fuß breiten und in 8 Fuß Entfernung um das Bassin laufenden Weges, außerdem in der durch die Achse A des Bassins gehenden Linie $\varrho 5$ der Grundriß der Bildebene, im Punkte P der des Hauptpunktes, im Punkte O der des Gesichtspunktes gegeben — es soll unter Annahme einer Höhe des Auges von 7 Fuß die Perspective des Bassins und eines Theiles des Weges in doppeltem Maßstabe des Grundrisses, d. i. in dem unter der Construction (Fig. 52) vorliegenden, construirt werden.

§. 233. **Ausführung.** Nachdem in der Construction der Horizont gezogen, der Hauptpunkt P, der herabgeschlagene Gesichtspunkt O und die Distanzpunkte D und D^1 bezeichnet worden, wird 7 Fuß unter dem Horizonte die Grundlinie gezogen, darin die Perspective a des Achspunktes A gleich zweimal A P von der Verticale entfernt bestimmt, und über b g der mit der Bildebene zusammenfallende Durchschnitt des Bassins gezeichnet. Die beiden Cylinder c h g b und f l i e, welche die Bassinwände bilden, und der Kegel k c h, welchen die obere Fläche des Bassins bildet, enthalten in ihren Grundflächen im Ganzen 4 Kreise, deren Radien für den ersten Kreis a e, für den zweiten a^1 f, für den dritten a b und für den vierten a^2 c sind. An dem Wege möge der innere Kreis der fünfte, der äußere der sechste heißen. — Man construirt nun am sichersten nach Anleitung des §. 220, mittels der die Kreise einschließenden Quadrate, zuerst die Perspectiven der beiden in der Grundebene liegenden Kreise durch ihre acht Punkte nebst Tangenten dazu, und darauf auf gleiche Art die Perspectiven des zweiten

Digitized by Google

und vierten Kreises. Doch kann man die letzteren auch dadurch erzielen, daß man in beliebigen Punkten der Perspectiven der beiden in der Grundebene liegenden Kreise Lothe (Cylinderseiten) errichtet und deren perspectivische Höhen sämmtlich, wie dies in der Figur für die Cylinderseite $m\,m^2$ geschehen ist, vermittelst horizontaler Linien aus dem Höhenmaßstabe entlehnt, welchen die von P durch die Mittelpunkte a^2, a^1 und a gezogenen Linien bilden. Außerdem kann man die perspectivische Höhe solcher beliebig angenommenen Cylinderseite, wie z. B. $n\,n^2$, auch dadurch bestimmen, daß man aus n durch a eine Linie nach dem Horizonte, und aus dem Schnittpunkte mit diesem wieder eine Linie durch a^2 gegen die Cylinderseite zieht, wodurch zugleich die perspectivische Höhe der dieser Cylinderseite diametral gegenüberliegenden bestimmt wird. Die Perspective des zweiten Kreises ist dem entsprechend zu finden; doch kann man Punkte von ihr auch dadurch construiren, daß man in der Peripherie der ersten Kreisperspective solche Cylinderseiten errichtet, welche radial zu schon vorhandenen Seiten des äußern Cylinders stehen, wie z. B. $q\,q^2$ zu $n\,n^2$, und ihre perspectivische Höhe ($q\,q^2$) durch Linien (Kegelseiten), wie $n^2\,k$, nach der Perspective k der Spitze des Kegels gezogen, welchen die obere Bassinfläche bildet, bestimmt, so wie im Verticaldurchschnitte selbst die Höhen e f und i l durch Linien, aus c und h nach k gezogen, bestimmt sind. — Sind die Perspectiven der vier Kreise construirt, so ergeben lothrechte Tangenten, zu beiden Seiten an die dritte und vierte Kreisperspective gezogen, die Perspectiven der Cylinderseiten, welche den scheinbaren Umriß bilden. — Auch die Perspectiven der dem Wege angehörigen Kreise, von denen überhaupt nur Stücke dargestellt werden können, werden unter Anwendung der entsprechenden Stücke der sie einschließenden Quadrate construirt. In der Construction sind für jeden derselben fünf Punkte: I, II, III, IV, V und 1, 2, 3, 4, 5 nach Anleitung des §. 220 construirt. Sollten diese jedoch nicht ausreichend befunden werden, so kann man im Grundrisse noch beliebige andere Punkte auswählen und vermittelst der ihnen entsprechenden Ordinaten ihre Perspectiven nebst Tangenten construiren, wie dies z. B. mit Punkt r im sechsten Kreise, wozu $\varrho\,r$ die Tangente ist, geschehen ist. Fielen bei der Construction der den fünften und sechsten Kreis einschließenden Quadrate die Punkte 1, I, 5 und V etwa schon seitlich außerhalb des Constructionsraumes, so daß man die Quadrate nicht unter Anwendung dieser Punkte construiren könnte, so fängt man jene bei den Punkten 3 und III an, indem man a 3 perspectivisch 21 Fuß und a III perspectivisch 16 Fuß lang macht. Die in der Construction fortgelassenen Ordinaten zu den in den Diagonalen liegenden Punkten dieser Kreise sind dann auch dadurch zu bestimmen, daß

Digitized by Google

man bei der Ermittelung der ihnen entsprechenden Abscissenlängen nicht a 5 und a V, sondern 3 w und III u als Radien nimmt, die gefundenen Abscissenlängen auf v w und t u aufträgt und nun, von P aus die Ordinaten ziehend, die Diagonalen in 2 und 4, und in II und IV schneidet. Oder man zieht — was sich hier deutlicher an dem Grundrisse, Fig. 50, erklären läßt — aus dem Mittelpunkte, also aus A eine Linie durch Punkt X, in welchem die eine verlängerte Ordinate des dritten Kreises dessen einschließendes Quadrat schneidet, und bezeichnet dadurch auf den Quadratseiten des fünften und sechsten Kreises Punkte wie Y und Z, welche so gelegen sind, daß durch sie zur Bildebene normal gezogene Linien selbst die in Rede stehenden Ordinaten sind.

§. 234. In Bezug auf den Ort der Perspective der durch den Punkt III liegenden Quadratseite des fünften Kreises, deren Durchgangspunkt Δ durch die Verticalebene so weit hinter der Bildebene liegt, wie der Gesichtspunkt davor, ist zu bemerken, daß dieselbe wie die aller ähnlich gelegenen Objecte genau in die Mitte zwischen der Grundlinie und dem Horizonte fallen muß.

Stellt man nämlich in Fig. 53 (Taf. 8) in P p die Bildebene, in O den Gesichtspunkt, und in Δ jenen Durchgangspunkt im Aufrisse geometrisch dar, und zieht hier die Gesichtslinie O Δ, so schneidet diese die Bildebene im Punkte δ, welcher der Halbirungspunkt von P p sein muß, da P δ und p δ sich gleich sind als entsprechende Seiten zweier Dreiecke P O δ und p Δ δ, die wegen Gleichheit je einer Seite (P O und p Δ) und der beiden daranliegenden Winkel congruent sind.

§. 235. Was die Gestalt der Curven, welche die Perspectiven des fünften und sechsten Kreises bilden, betrifft, so muß, dem Inhalte des §. 218 nach, die des fünften Kreises, weil einer seiner Punkte, nämlich S (Fig. 50), in der Standebene liegend gegeben ist, ein Kegelschnitt mit einem in unendlicher Entfernung gelegenen nicht darstellbaren Punkte, d. i. eine Parabel sein; die Perspective des sechsten Kreises aber muß, weil zwei seiner Punkte in der Standebene liegend gegeben sind, ein Kegelschnitt mit zwei in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darstellbaren Punkten, d. i. eine Hyperbel, sein.

Untersucht man nun die Construction (Fig. 52), in wiefern dieselbe dies zu bestätigen vermag, so findet man:

Digitized by Google

1) hinsichtlich der Perspective des fünften Kreises, daß hier die durch den Achspunkt a gehenden Perspectiven der Diagonalen des einschließenden Quadrates je geometrisch parallel den durch die Punkte I und V liegenden Perspectiven zweier Quadratseiten sind und sich deshalb mit diesen, dem früher (§. 47) über Parallelität Gesagten gemäß, erst in unendlicher Entfernung schneiden, woselbst also auch die Perspective der vierten Quadratseite, und demzufolge auch die Perspective des davon tangirten Kreispunktes S liegen muß;

2) hinsichtlich der Perspective des sechsten Kreises findet man, daß hier die Perspectiven der Diagonalen des einschließenden Quadrates mit den durch die Punkte 1 und 5 liegenden Perspectiven zweier Quadratseiten nach der Richtung, in welcher man die vierte Quadratseite vermuthen möchte, nicht allein nicht convergiren, oder etwa mit ihnen parallel sind, sondern nach der bezeichneten Richtung sogar divergiren, und daß daher die Perspective der vierten Quadratseite und des von ihr tangirten Kreispunktes (im andern Zweige der Hyperbel, welchen die Perspective des sechsten Kreises bildet) in der Richtung der Convergenz der genannten Stücke, also oberhalb des Horizontes auftreten würde, an einer Stelle, wo sie nur einer mathematischen Auffassung genügen würde.

§. 236. Aus dem im Vorhergehenden Gesagten ist aber auch das Verfahren abzuleiten, welches man einzuschlagen hat, wenn man die Perspectiven des fünften und sechsten Kreises nach Anleitung des §. 227 construiren will. Jenem Paragraphen nach hat man, um die Perspective des fünften Kreises und davon zunächst die seines Quadranten I. III A zu finden, das Stück t III (Fig. 54, Taf. 8) in beliebig viele, etwa 8, geometrisch gleiche Theile zu theilen und diese Theilung durch Linien, nach einem gewissen Punkte (φ) gezogen, auf das Stück t I zu übertragen, wonach Linien, durch die entsprechenden Punkte der beiden Stücke t III und t I gezogen, die Quadranten-Perspective ergeben. Jener Punkt φ würde aber zu finden sein im Schnittpunkte der diagonalen Linie III. I mit der dem Stücke t III gegenüberliegenden Quadratseite. Da diese jedoch dem vorigen Paragrapheu nach in unendlicher Entfernung liegt, so muß auch Punkt φ daselbst liegen und die nach ihm gezogenen, die Theilung des Stückes t I verrichtenden Linien, wie $\beta\gamma$ eine ist, müssen untereinander und mit III. I geometrisch parallel sein und deshalb auch das Stück t I in geometrisch gleich entfernten Punkten schneiden. Man kommt hiernach kürzer zum Zwecke, wenn man das Stück t I vorweg ebenfalls in 8 geometrisch gleiche Theile theilt. In Bezug auf den Quadranten III. V A ist natürlich ebenso zu verfahren.

Um die in Fig. 54 nicht wiederholte Perspective des sechsten Kreises,

Digitized by Google

und davon zunächst etwa die seines Quadranten 3. 5 A ebenfalls nach Anleitung des §. 227 zu construiren, hätte man das Stück 3 w in Fig. 54 gleichfalls in beliebig viele geometrisch gleiche Theile zu theilen und diese Theilung auf das Stück w 5 durch Linien zu übertragen, welche nach einem gewissen Punkte ε, dem Schnittpunkte der über Punkt 5 verlängerten diagonalen Linie 3. 5 mit der dem Stücke 3 w gegenüberliegenden Quadratseite gezogen werden. Punkt ε würde in letzterer perspectivisch so weit rechts von der verlängerten Seite w 5 entfernt liegen müssen, wie 3 w lang ist. Er wäre demnach dadurch zu construiren, daß man auf der über 5 verlängerten Grundlinie das Maß a 5 (welches perspectivisch gleich 3 w ist) rechts von 5 noch einmal in 5 η auftrüge und dann, von P durch η ziehend, die Linie 3. 5 schnitte. Dieser Schnitt fände jedoch, wie die Figur zeigt, nicht in der vermutheten Richtung — nach welcher die Linien P η und 3 ε vielmehr divergiren — sondern in der entgegengesetzten Richtung in einem ziemlich entfernt oberhalb des Horizontes liegenden Punkte λ statt, durch welchen hiernach also die Verlängerung der Perspective der vierten Quadratseite (Tangente an dem andern Zweige der Hyperbel, welchen die Perspective des sechsten Kreises bildet) läge und vermittelst dessen nun die Uebertragung der Theilung auf das Stück w 5 auszuführen wäre. — Wegen der großen Entfernung dieses Punktes ist es jedoch gerathen, hier für den sechsten Kreis auf die Anwendung der im §. 227 gezeigten Constructionsart zu verzichten, und seine Perspective so zu construiren, wie es im §. 233 geschehen ist.

Beispiel 18.

Aufgabe. Construction der Perspective der **Kugel.**

§. 237. Untersucht man, welche Figuren die Perspectiven von Kugeln möglicherweise bilden können, und erwägt dabei, daß die aus dem Auge nach der Kugel denkbaren Gesichtslinien einen Kegel bilden, dessen Spitze im Auge liegt und dessen Basis ein Kreis (*Berührungskreis* der Gesichtslinien) der Kugel ist, so ergiebt sich, daß die Perspective der Kugel im Allgemeinen ein *Kegelschnitt* sein muß. Sie ist demnach ein *Kreis*, wenn die Bildebene den Gesichtslinienkegel normal zu seiner Achse schneidet, d. h. wenn die Ebene jenes Berührungskreises parallel der Bildebene ist, und die Perspective des Mittelpunktes der Kugel in den Hauptpunkt fällt. Ist die Kugel so gelegen, daß *ein* Punkt des Berührungskreises der

Digitized by Google

Gesichtslinien in der Standebene liegt, so ist die Perspective eine Parabel. Ist die Kugel so gelegen, daß zwei Punkte jenes Kreises in der Standebene liegen, so ist die Perspective eine Hyperbel. Eine solche Figur bildet z. B. die Perspective des durch das Meer gebildeten Erdhorizontes, insofern dieser der Berührungskreis der Gesichtslinien an der Erdkugel ist und mit zwei Punkten in der durch das Auge denkbaren unendlichen Standebene liegt. Da die Krümmung dieser Hyperbel jedoch eine sehr geringe ist und die perspectivische Construction auch immer nur ein verhältnißmäßig kleines Gesichtsfeld umfaßt, so ist das Zusammenfallen jener mit dem geradlinigen Horizonte einer perspectivischen Construction gerechtfertigt.

In allen anderen, von den obigen abweichenden, Fällen ist das perspectivische Bild einer Kugel eine Ellipse.

In dem ersten der oben angeführten Fälle, daß die Perspective des Mittelpunktes der Kugel mit dem Hauptpunkte zusammenfällt und die Perspective der letztern einen Kreis bildet, ist daran zu denken, daß man den Durchmesser der Kugel selbst nicht sofort als den Durchmesser des Kreises, welchen ihre Perspective bildet, nehmen darf. Dieser ist vielmehr stets größer als jener. Ist z. B. in Fig. 55 (Taf. 4) dem Kreise um M der geometrische Aufriß einer Kugel, in O der des Gesichtspunktes gegeben, und man zieht aus O die berührenden Gesichtslinien an die Kugel, so ergiebt sich, daß der Berührungskreis derselben in K L liegt und daß, wenngleich der Durchmesser desselben an sich kleiner ist, als der des größten Kreises U E der Kugel, wegen seiner größeren Nähe zum Auge seine Perspective (1k) größer ausfallen muß, als die (e u) des größten Kugelkreises — die Bildebene mag nun in B J, oder in $B^1 J^1$, oder in $B^2 J^2$ stehen. §. 238.

Ist eine Reihe neben einander liegender gleich großen Kugeln perspectivisch darzustellen, so wachsen zum Theil aus demselben Grunde die Durchmesser der Perspectiven der Kugeln an Größe, je weiter diese seitlich entfernt liegen; sowohl, weil für diese die Berührungskreise von an sich immer größerem Durchmesser werden, als auch, weil die ihnen entsprechenden Gesichtslinienkegel von der Bildebene immer schiefer geschnitten werden. So würde z. B. für die Kugel A in Fig. 56 (Taf. 4) K L der Durchmesser des Berüh- §. 239.

Digitized by Google

rungskreises und k l der seiner Perspective sein; für die Kugel C würde F G der schon größere Berührungskreis und f g der noch größere Durchmesser seiner Perspective sein u. s. w.

Das Wachsen der scheinbaren Durchmesser der Objecte, je weiter diese seitlich entfernt liegen, und der Durchmesser ihrer Perspectiven ist selbstverständlich auch zu berücksichtigen, wenn Cylinder oder Kegel, etwa Säulenschafte, an Stelle der Kugeln gegeben sind.

§. 240. **Ausführung.** Ist P D^1 in Fig. 57 (Taf. 9) der Horizont, O der herabgeschlagene Gesichtspunkt, und es soll die Perspective einer auf einem Cylinder ruhenden Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Hauptpunkte zusammenfällt und deren Halbmesser P c ist, construirt werden, so kann durch Gesichtslinien, aus einem der Distanzpunkte berührend an den gegebenen Kugelkreis gezogen, sofort in K L der Durchmesser des Berührungskreises und in k l der seiner Perspective, und somit der Perspective der Kugel selbst festgestellt werden. Die Perspective der Kugel und die des ihr an Durchmesser geometrisch gleichen Cylinders zeigen hiernach auch perspectivisch gleiche Durchmesser.

§. 241. Ist eine Kugel in der Lage zum Gesichtspunkte gegeben, daß ihre Perspective ein anderer Kegelschnitt als ein Kreis, z. B. eine Ellipse werden muß, so construirt man diese am einfachsten unter Anwendung eines gewissen, sie einschließenden Vierecks folgendermaßen:

Ist P in Fig. 58 (Taf. 17) der Hauptpunkt, O der herabgeschlagene Gesichtspunkt, und es soll die Perspective einer Kugel von dem Durchmesser des um den Mittelpunkt k geometrisch gegebenen Kreises construirt werden, so zieht man von P durch k eine Linie und errichtet auf ihr in P eine Normale P D^2 von der Länge der gegebenen Distanz. Schneidet man hierauf die verlängerte P k durch von D^2 an den gegebenen Kreis gezogene Tangenten in den Punkten 1 und 3, so bezeichnen diese die Länge des erwähnten Vierecks, und durch sie parallel der P D^2 gezogene Linien sind zwei Seiten desselben. Zwei andere, von P aus gezogene, den Kreis in 2 und 4 berührende Linien v x und w u sind die beiden anderen Seiten des Vierecks; die Berührungspunkte 2 und 4 aber, so wie die schon vorhandenen Punkte 1 und 3 sind Punkte der

Digitized by Google

Kugelperspective. Vier andere Punkte derselben findet man, wenn man das Viereck x u w v wie die Perspective eines eine Ellipse einschließenden Rechtecks behandelt, zu dessen Ebene P D^2 die Grenzlinie, mit dem Hauptpunkte P, ist; wenn man demnach für den perspectivischen Durchmesser 2. 4 die entsprechenden Abscissenlängen y m und y g ermittelt und auf ihn aufträgt, und die Diagonalen v u und w x durch Linien, von P durch m und g gezogen, in den Punkten 8, 7, 5 und 6 schneidet. Linien, aus den Schnittpunkten a und b der verlängerten Diagonalen mit der Grenzlinie P D^2 durch die in den Diagonalen liegenden Punkte gezogen, können als Tangenten für diese benutzt werden. Sehr willkommene Punkte sind noch 9 und 10. Man findet sie, wenn man 3 (y) geometrisch gleich 1 y macht, 9. 10 parallel der Linie 4. 2 zieht, und (y) 9 und (y) 10 geometrisch gleich y m macht. Tangenten zu diesen Punkten sind aus dem Punkte (P) zu ziehen, welcher in der verlängerten P k so weit vom Punkte 3 entfernt liegt, wie P vom Punkte 1.

Dem Vorigen entsprechend ist auch zu verfahren, wenn die Perspective der Kugel eine Parabel oder Hyperbel ist.

Weiter unten in Beispiel 34, in dem die schiefen Ebenen behandelnden Abschnitte, ist die Kugelperspective ähnlich und zwar derart construirt, daß, nachdem die Neigung der schiefen Ebene des Berührungskreises geometrisch ermittelt worden, zu dieser Ebene die Grenzlinie nebst entsprechendem Hauptpunkte, und dann die Perspective des Berührungskreises vermittelst der Perspective des ihn einschließenden Quadrates construirt wurde.

Ein Vergleich beider Constructionsarten ergiebt, daß in der vorliegenden Fig. 58 das die elliptische Perspective einschließende Trapez v w u x als die Perspective eines in einer einfach-schiefen, zur Bildebene normalen Ebene liegenden Oblongums anzusehen ist.

In dem §. 357 ist Anleitung zur Construction der Kugelperspective vermittelst ihrer Brennpunkte gegeben.

Andere Constructionsarten wendet man noch an, wenn man §. 242.
zugleich andere Zwecke, wie z. B. die Construction des Schattens der Kugel, oder die von Meridianlinien im Auge hat, oder wenn etwa bei der vorhergehenden Constructionsart die Gren-

Digitized by Google

zen des Conſtructionsraumes vorausſichtlich weit überſchritten werden müßten.

Soll z. B. außer der Perſpective einer Kugel ſelbſt auch die ihrer Schattengrenze conſtruirt werden, ſo nimmt man am zweckmäßigſten in der Kugelfläche mehrere ſolche Kreiſe an, welche in lothrechten, durch den Lichtpunkt gehenden Ebenen liegen, conſtruirt ihre Perſpectiven, und zeichnet dann durch deren äußerſte Punkte die Perſpective der Kugel.

§. 243. Am einfachſten iſt dieſe Conſtruction, wenn die Sonne als in der verlängerten Bildebene ſtehend angenommen wird, weil dann jene lothrechten, durch den Lichtpunkt gehenden Ebenen, wegen der unendlichen Entfernung der Sonne, ſämmtlich der Bildebene parallel, und deshalb die Perſpectiven der in ihnen angenommenen Kugelkreiſe ſelbſt Kreiſe ſind.

Iſt z. B. P in Fig. 59 (Taf. 9) der Hauptpunkt, D^1 ein Diſtanzpunkt, und der um M geſchlagene Kreis von dem Durchmeſſer A B der der Bildebene parallele Durchſchnitt der Kugel, deren Perſpective conſtruirt werden ſoll, ſo hat man, um jene Kreisperſpectiven ſchlagen zu können, zunächſt die Perſpectiven ihrer Mittelpunkte und ihrer Halbmeſſer feſtzuſtellen. Zuvor ergeben eine von P durch M gezogene Linie die Perſpective des zur Bildebene normalen Durchmeſſers der Kugel, und die auf ihm durch Linien, von D^1 durch A und B gezogen, beſtimmten Punkte a und b die Perſpectiven der ihm entſprechenden Pole der Kugel. Als einer der Kreiſe der genannten Art ſei hier einer von dem geometriſchen Halbmeſſer F G angenommen. Ueberträgt man letztern geometriſch auf den lothrechten Kugeldurchmeſſer in M E, zieht von P durch E, macht durch eine von D^1 durch F gezogene Linie M m perſpectiviſch gleich M F, legt durch m eine Lothrechte m e, ſo iſt deren Länge m e der perſpectiviſche Halbmeſſer, und m der Mittelpunkt für den gewählten Kreis. Macht man auch $M m^1$ perſpectiviſch gleich M F, legt durch m^1 ebenfalls eine Lothrechte, ſo ergiebt ſich in m^1 der Mittelpunkt und in $m^1 e^1$ der perſpectiviſche Halbmeſſer für den gleichgroßen, auf der entgegengeſetzten Seite der Kugel annehmbaren Kreis. In der Figur ſind auf dieſe Weiſe die Mittelpunkte und Halbmeſſer von ſechs Kreiſen conſtruirt, die Peripherien der letzteren, ſo weit ſie gebraucht werden, geſchlagen, und iſt dann um ſie die elliptiſche Kugelperſpective, ſie alle berührend, aus freier Hand gezeichnet worden.

Digitized by Google

Ist die Sonne nicht in der Bildebene stehend, oder ist §. 244.
eine Kerzenflamme als Lichtquelle angenommen, so sind die durch sie und die Kugel lothrecht anzunehmenden Hülfskreise nicht parallel der Bildebene, und ihre Perspectiven sind Ellipsen, zu deren Construction man die verschiedenen Durchmesser wie in folgendem Beispiele findet:

In Fig. 60 (Taf. 9) sei P der Hauptpunkt, P D_2 die halbe Distanz §. 245.
— es soll die Perspective einer im Punkte C auf der Grundebene ruhenden Kugel, deren größter, der Bildebene paralleler Durchschnitt der Kreis um M ist, unter der Annahme construirt werden, daß hernach auch die Perspective der Schattengrenze an der Kugel zu construiren sei, welche der Flamme L einer im Punkte F auf der Grundebene stehenden Kerze F L entspricht. — Von den verschiedenen anzunehmenden Hülfskreisen, welche lothrechten Ebenen angehören, die durch den Lichtpunkt und die Kugel gehen, construirt man am zweckmäßigsten, vermittelst des einschließenden Quadrates, zuerst die Perspective h E g C des größten Kugelkreises, dessen Ebene, durch die Flamme und den lothrechten Kugeldurchmesser gehend, die Grundebene in der Linie F C schneidet. Verlängert man zu dem Zwecke C F bis in den Horizont, so ist der Schnittpunkt φ mit diesem der Hauptpunkt in der lothrechten Grenzlinie der eben bezeichneten Ebene, sein Abstand vom herabgeschlagenen Gesichtspunkte O die Distanz dazu. Wegen der Auswahl des Ortes der anderen beliebig anzunehmenden Hülfskreise ist es vortheilhaft, zuvörderst unter Anwendung des Hauptpunktes P die Perspective A k B i des horizontal liegenden größten Kugelkreises zu construiren, da die Mittelpunkte der Hülfskreise in den Radien dieses Kreises gefunden werden. Schneidet man danach, von M nach φ ziehend, die Kerze in F^1, so bezeichnen Linien, wie v (β) und m (τ), durch die letztconstruirte Kreisperspective und diesen Punkt F^1 gezogen, perspectivisch die Richtungen, welche die Ebenen der weiter anzunehmenden Hülfskreise haben sollen, und ihre Schnittpunkte β und τ mit dem Horizonte die Hauptpunkte in den lothrechten Grenzlinien dieser Ebenen. Um nun die Perspective etwa des Hülfskreises construiren zu können, dessen Ebene die des größten horizontalen Kugelkreises in der Linie m n schneidet, bedarf es der Ermittelung der Perspective seines Mittelpunktes und der seines lothrechten Halbmessers. Jene findet man, wenn man den Verschwindungspunkt ϱ für alle zu der m n rechtwinkligen horizontalen Linien sucht und dann von ϱ durch M den Radius M s zieht, im Schnittpunkte p desselben mit der m n. Stellt man aber unter Anwendung des Theil-

Digitized by Google

punktes t_ϱ (für den in ϱ verschwindenden Radius) in $M p^1$ die geometrische Länge des Stückes $M p$ dar und schneidet mit einer durch p^1 lothrechten Ordinate den gegebenen Kugelkreis in q^1, so ist $p^1 q^1$ die geometrische Länge des gesuchten Halbmessers, die nun durch eine von t_ϱ durch q^1 gezogene Linie perspectivisch in $p q$ übertragen wird. Die Perspective $m q n r$ des Hülfskreises kann hiernach vermittelst des einschließenden Quadrates construirt werden, dessen eines Seitenpaar im Hauptpunkte τ der durch τ lothrechten Grenzlinie verschwindet. — So auch ist der dem Hülfskreise $v t w u$ entsprechende Mittelpunkt z gefunden, indem $v w$ durch den zu ihr perspectivisch normalen Radius $M x$ in z geschnitten wurde; und der Halbmesser $z u$ wurde bestimmt, indem $A B$ durch eine Linie, vom Theilpunkte t_ε (für den Radius $M x$) durch z gezogen, im Punkte z^1 geschnitten, und dann die Länge einer durch z^1 lothrechten Ordinate $z^1 u^1$ vermittelst desselben Theilpunktes perspectivisch in $z u$ übertragen wurde.

Durch die äußersten Punkte der so construirten Hülfskreis-Perspectiven kann schließlich die elliptische Perspective der Kugel selbst gezeichnet werden und kann man außerdem durch Tangenten, aus dem Lichtpunkte an diese Kreise gezogen, in letzteren Punkte bestimmen, durch welche die Grenze des Schattens an der Kugel geht.

§. 246. Wäre hier nicht Kerzenlicht, sondern das der Sonne, wenn diese z. B. hinter der Bildebene stände, gegeben worden, so würde sich die Lösung sehr vereinfachen. Es würden dann nämlich die auf der Kugeloberfläche anzunehmenden lothrechten Hülfskreise wegen der unendlichen Entfernung der Sonne mit einander parallel sein. Stände die Sonne z. B. lothrecht über dem rechts im Horizonte liegenden Punkte φ, so würde dieser der Hauptpunkt der einen Grenzlinie für alle Hülfskreis-Ebenen sein; die Mittelpunkte der Hülfskreise lägen sämmtlich in dem zu $M\varphi$ perspectivisch normalen horizontalen Kugeldurchmesser, und ihre lothrechten Halbmesser wären als Ordinaten aus der Perspective eines lothrechten Kreises zu entnehmen, dessen Ebene normal zu $M\varphi$ ist.

§. 247. Fordert die Aufgabe außer der Construction der Kugel selbst auch die gewisser Meridianlinien auf der Oberfläche derselben, so construirt man entweder die Perspectiven der Kreise, denen die Meridianlinien angehören, mittels der sie einschließenden Quadrate nach Anleitung des §. 223, um dann durch die äußersten Punkte jener die elliptische Kugelperspective aus freier Hand zu zeichnen, oder man construirt, wenn die Hauptpunkte der Ebenen, welchen diese

Digitized by Google

Kreise angehören, zu entfernt fallen, die Perspectiven mehrerer beliebig angenommenen — wenn die Meridianlinien lothrechten Kugelkreisen angehören — horizontalen Kreise der Kugeloberfläche, wie dies Fig. 61 (Taf. 9) zeigt, zeichnet um diese die Perspective der Kugel, und construirt dann die Durchgangspunkte der Meridianlinien durch jene Kreise folgendermaßen:

§. 248. Sind in Fig. 62 (Taf. 9) der größte Kreis um M und die drei kleineren Kreise die Grundrißprojectionen der Kugel und der in Fig. 61 perspectivisch construirten sieben horizontalen Kugelkreise — wozu P in Fig. 57 der Haupt- und D^1 ein Distanzpunkt ist — und ist die gerade Linie M E in Fig. 62 die Grundrißprojection einer Meridianlinie, deren Perspective in Fig. 61 construirt werden soll, so zieht man im Grundrisse von den Schnittpunkten E, L, R u. s. w. der Meridianlinie mit den Kreisen Ordinaten gegen den Durchmesser A B und construirt die Perspectiven derselben, indem man die Maße M ε, M λ u. s. w. aus Fig. 62 in die entsprechenden Kreisdurchmesser der Fig. 61, in m ε, m λ u. s. w. überträgt und dann von P Linien durch die Punkte ε, λ u. s. w. zieht; es kann dann durch die Schnittpunkte r, l, e, l u. s. w. dieser perspectivischen Ordinaten mit den Kugelkreisen die Perspective der verlangten Meridianlinie gezeichnet werden.

§. 249. Ohne Anwendung der horizontalen Kreisperspectiven, die hier zugleich zur Zeichnung der Kugelperspective selbst dienen sollten, kann man die Punkte e, l u. s. w. auch erzielen, wenn man die Ordinatenlängen E ε, L λ u. s. w. aus Fig. 62 geometrisch auf die entsprechenden Durchmesser in Fig. 61 in $\varepsilon\,\varepsilon^1$, $\lambda\,\lambda^1$ u. s. w. überträgt und hier die perspectivischen Ordinaten durch Linien, aus D^1 durch ε^1, λ^1 u. s. w. gezogen, schneidet.

Beispiel 19.

§. 250. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 63 (Taf. 10) in den Punkten 1 A B C E R G H J K der halbe, der Bildebene parallele Verticaldurchschnitt eines **geschweiften Thurmdaches** gegeben — es sollen, außer der Perspective des letztern um seine perspectivisch vorliegende Achse 1 K, die Durchschnittsfiguren des Daches mit einigen solchen lothrechten Ebenen construirt werden, welche durch die Sonne gehen, deren Perspective lothrecht über einem rechts außerhalb der Figur im Horizonte gegebenen Punkte F (Sonnen-Fußpunkt) angenommen ist. P in Fig. 64 sei der Hauptpunkt und P $D/_2$ die halbe Distanz.

Digitized by Google

§. 251. **Ausführung.** Man nimmt in verschiedenen Höhen des Daches, an charakteristischen Stellen desselben, horizontal liegende Kreise an, wie z. B. diejenigen, welche den bei der Bezeichnung des Verticaldurchschnittes genannten Punkten entsprechen und deren Mittelpunkte durch die Ziffern 1 bis 9 bezeichnet sind, construirt deren Perspectiven und zeichnet durch die äußersten Punkte derselben die Perspective des Daches aus freier Hand — ein Verfahren, welches schon bei der Construction des Cylinders, des Kegels und der Kugel angewandt wurde und überhaupt bei der Construction der Perspectiven aller Umdrehungsflächen anwendbar ist.

§. 252. Um hiernach etwa diejenige Durchschnittsfigur zu construiren, welche das Dach mit einer durch seine Achse und den gegebenen Punkt f gehenden Ebene bildet, hat man nur von f aus Linien durch die Mittelpunkte 1, 2, 3 u. s. w. zu ziehen, wonach die Schnittpunkte derselben mit den entsprechenden Kreisperspectiven Punkte der gedachten Durchschnittsfigur sind. — Um eine andere, z. B. die in der Figur durch kurze Striche bezeichnete Durchschnittsfigur zu construiren, nimmt man in den der Bildebene parallelen Durchmessern der angenommenen Kreise eine Reihe lothrecht über einander liegender Punkte, wie z. B. die Punkte 11, 12, 13 u. s. w., an, schneidet, von f durch diese Punkte ziehend, wieder die entsprechenden Kreise und zeichnet dann durch die Schnittpunkte die Durchschnittsfigur. — Noch ein anderer Durchschnitt, wie z. B. der durch starke Punkte bezeichnete, ergiebt sich, wenn man abermals eine andere Reihe lothrecht über einander liegender Punkte 17, 18 u. s. w. in den Kreisdurchmessern annimmt, von f aus Linien durch diese Punkte zieht und die sich hierdurch in den Kreisperspectiven ergebenden Schnittpunkte durch eine Curve verbindet.

§. 253. Hätte die Aufgabe die Durchschnittsfiguren solcher lothrechten Ebenen mit dem gegebenen Objecte verlangt, welche sämmtlich durch einen nicht in unendlicher Entfernung, wie die Sonne und Punkt f, sondern in der Nähe befindlichen Punkt, z. B. die Flamme einer Kerze gehen, so wäre die Construction, wie das folgende Beispiel zeigt, der vorigen entsprechend.

Beispiel 20.

§. 254. **Aufgabe.** In Fig. 64 (Taf. 10) ist die Perspective eines auf der Grundebene stehenden normalen **Kegels** gegeben, wozu P der Hauptpunkt und PD_2 die halbe Distanz ist — es sollen dessen Durchschnittsfiguren mit einigen solchen lothrechten Ebenen construirt werden, die durch den Lichtpunkt L der in F auf der Grundebene stehenden lothrechten Kerze LF gehen.

Digitized by Google

Ausführung. Man construirt zunächst die Perspectiven mehrerer, §. 255.
am besten in gleichen Abständen über einander liegenden horizontalen Kreise des Kegels, wie dies in der Figur um die Mittelpunkte a, a^1, a^2 und a^3 geschehen ist, und bezeichnet dann in der Kerze die mit diesen Mittelpunkten je in perspectivisch gleicher Höhe liegenden Punkte F, F^1, F^2 und F^3, indem man etwa von P durch a den zur Bildebene normalen Durchmesser der Grundfläche zieht, denselben von F aus durch eine der Bildebene parallele Linie schneidet, im Schnittpunkte eine Lothrechte errichtet, dieselbe durch von P aus durch die anderen Kreismittelpunkte gezogene Durchmesser schneidet und die Abstände dieser letzteren Schnittpunkte vermittelst der Bildebene paralleler Linien in die Kerze in F^1, F^2 und F^3 überträgt. Die Schnittpunkte b, c, e, c^1 und b der letztgezogenen, der Bildebene parallelen Linien mit den Kreisperspectiven sind dann zunächst selbst Punkte der hyperbolischen Durchschnittsfigur derjenigen lothrechten Ebene, welche, durch den Lichtpunkt L und den Kegel gehend, parallel der Bildebene ist. — Von den Punkten F, F^1, F^2 und F^3 durch die entsprechenden Kreismittelpunkte gezogene Linien ergeben in ihren Schnittpunkten mit den Kreisperspectiven die dreieckige Durchschnittsfigur der durch die Kerze und die Kegelachse annehmbaren Ebene. — Um noch eine andere Durchschnittsfigur zu erzielen, zieht man von F eine beliebige Linie Fφ durch die Kegelgrundfläche und errichtet im Punkte φ, in welchem jene den verlängerten der Bildebene parallelen Grundflächen-Durchmesser schneidet, eine Lothrechte, welche auf den verlängerten Durchmessern der anderen Kreise die Punkte φ^1, φ^2 und φ^3 bezeichnet. Verbindet man darauf F^1 mit φ^1, F^2 mit φ^2 u. s. w. durch gerade Linien, so sind die Schnittpunkte g, g^1, h, h^1, i, i^1 u. s. w. derselben mit den Kreisperspectiven Punkte der hyperbolischen Durchschnittscurve einer durch die Kerze und die Punkte g und g^1 des Kegels angenommenen lothrechten Ebene u. s. w.

Das hier gezeigte, bei Construction lothrechter Durchschnittsfiguren in §. 256.
allen Umdrehungsflächen zutreffende Verfahren läßt sich für den Kegel insbesondere um Vieles vereinfachen, wenn man in der Kegelbasis mehrere beliebige Radien, wie etwa a q, und die ihnen entsprechenden Kegelseiten, wie q s, zieht. Schneidet man letztere dann durch lothrechte Linien, wie n m und r t, welche in den Schnittpunkten n und r der Radien mit den Schnittlinien F b^1 und F g^1 der angenommenen lothrechten Ebenen mit der Grundebene errichtet werden, so sind die Schnittpunkte m und t außer b und b^1 und g und g^1 Punkte der gesuchten Curven.

Digitized by Google

Beispiel 21.

§. 257. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 65 (Taf. 10) das Profil eines **Ringes um eine Treppenspindel** und das eines **Stufengesimses** gegeben, welches an den Ring stößt — es soll in Fig. 66, wozu P der Hauptpunkt, D ein Distanzpunkt, z einer der Verschwindungspunkte der horizontalen Stufenkanten und *dg* der Diagonalpunkt hierzu ist, die Perspective der Schnittfigur **(Gehrung)** des Ringes mit dem Stufengesimse und der **Gehrung** des letztern über der lothrechten Stufenkante construirt werden.

§. 258. **Ausführung.** Die Perspective des Ringes wird vermittelst horizontaler Kreise seiner Oberfläche construirt. In der Figur liegen die Perspectiven von fünf solchen in gleichen Abständen über einander angenommenen Kreisen vor, durch deren äußerste Punkte die Perspective des Ringes gezeichnet ist. — Um die Perspectiven der beiden Gehrungen des Stufengesimses zu erzielen, ist es vortheilhaft, zuvor den perspectivischen Hülfsgrundriß sowohl des Ringes und der in ihm angenommenen Kreise, als der Stufe mit den in Fig. 65 durch die Linien 4 H, 3 S und 2 V geschiedenen Stücken ihres Gesimsvorsprunges zu construiren. Nachdem man deshalb aus dem links außerhalb der Construction liegenden Verschwindungspunkte y durch den Achspunkt a° die perspectivische Grundrißprojection $a^\circ k^\circ$ der Setzstufe gezogen, werden auf dem der Bildebene parallelen Durchmesser des Ringes die einzelnen Stücke des Gesimsvorsprunges, wie sie in Fig. 65 im Zusammenhange mit den Ringkreisen vorgeführt sind, in 2, 3, 4 geometrisch aufgetragen und vermittelst des dem Verschwindungspunkte z entsprechenden Theilpunktes tz auf eine von z durch a° gezogene Linie perspectivisch übertragen, wonach Linien, von y durch die übertragenen Punkte gezogen, perspectivische Grundrißprojectionen der in dem Gesimsvorsprunge angenommenen Stücke Q H, H S, S V u. s. w. sind. Steht dann in k° die lothrechte Kante der Stufe auf der Grundebene, so ergiebt eine vom Diagonalpunkte *dg* durch k° gezogene Linie die Grundrißprojection der Gehrung des Stufengesimses über dieser Kante. Errichtet man hierauf in den Schnittpunkten g°, b°, c° u. s. w. der zuvor genannten Grundrißprojectionen (der in dem Gesimse angenommenen Stücke), mit den Grundrißprojectionen der Kreise lothrechte Linien, so schneiden diese die entsprechenden Kreise der Ringperspective selbst in solchen Punkten g, b, c u. s. w., durch welche die Perspective der Gehrung zwischen Ring und Stufengesims gezeichnet werden kann, während man die Perspective k v s h q der Gehrung

Digitized by Google

über der lothrechten Stufenkante findet, wenn man von y aus durch die ebengefundenen Punkte g, b, c u. s. w. Linien zieht, und diese durch lothrechte Linien aus den entsprechenden Punkten der Gehrung k° q° des Grundrisses schneidet.

Beispiel 22.

Construction der Perspectiven der Gurt- und Gratbogen in Kreuzgewölben.

Aufgabe. Es sind in Fig. 67 (Taf. 10) die Perspectiven a, b, c und d der zu einander wie die Eckpunkte eines Quadrates gelegenen vier Kämpferpunkte der Bogen, und in dem Halbkreise a i b die mit der Bildebene zusammenfallende Wölbungslinie eines aus zwei gleichen Cylindern bestehenden **Kreuzgewölbes** gegeben — es sollen die Perspectiven der die Kämpferpunkte verbindenden Gurt- und Gratbogen construirt werden. P ist der Hauptpunkt, D ein Distanzpunkt. §. 259.

Ausführung. Der Gewölberaum, in welchem sich die beiden Cylinder kreuzen, hat die Höhe a e, seine horizontale Ausdehnung ist, wie die Lage der vier Kämpferpunkte zu einander, quadratisch. Denkt man sich demnach horizontale Ebenen durch ihn gelegt, so schneiden dieselben seine Grenzen in Quadraten, in deren Seiten je einzelne Punkte der Gurtbogen, und in deren Diagonalen die entsprechenden Punkte der Gratbogen liegen müssen. Eine derartige durch den höchsten Punkt i der gegebenen Wölbungslinie angenommene Ebene begrenzt zunächst den Gewölberaum oberhalb in dem Quadrate e f g h. Zieht man nun die Diagonalen dieses Quadrates, so muß der Schnittpunkt m derselben die Perspective des Schnittpunktes der beiden Gratbogen, halbirt man aber die Seiten dieses Quadrates in i, k, n und l, so müssen diese Punkte die Perspectiven der höchsten Punkte der Gurtbogen sein. Nimmt man ferner durch einen beliebigen Punkt q der Wölbungslinie eine horizontale Ebene an, so schneidet diese die Grenzen des Gewölberaumes in einem Quadrate, dessen Perspective r s t u ist. Zieht man in diesem Quadrate wieder die Diagonalen und schneidet dieselben durch Linien, von q und q^1 nach P gezogen, so sind die Schnittpunkte v, w, z u. s. w. Punkte der Perspectiven der Gratbogen, während, wenn man durch diese Punkte horizontale, mit der Ebene der Wölbungslinie a i b parallele Linien legt, deren Schnittpunkte x, y u. s. w. mit den Quadratseiten wieder entsprechende Punkte der Perspectiven der Gurtbogen sind u. s. w. Die so entstandenen Hülfslinien i n, l k, q w, §. 260.

Digitized by Google

x z u. s. w. sind nichts anderes, als entsprechend liegende Cylinderseiten, in deren Schnittpunkten sich die Gratbogen ergeben.

§. 261. **Kann man sich des perspectivischen Hülfsgrundrisses bedienen, so vermeidet man die Fülle von Hülfslinien im Gewölberaume.**

Ist z. B. a° b° c° d° in Fig. 68 (Taf. 10) der perspectivische Grundriß des Gewölberaumes zweier sich kreuzenden, verschieden gekrümmten Gewölbecylinder, deren weiterer die mit der Bildebene zusammenfallende Wölbungslinie a i e b, und deren kleinerer, bei derselben Höhe, nur die Hälfte der Spannung von jenem hat, so bezeichnet man in der Wölbungslinie außer ihrem höchsten Punkte i mehrere beliebige andere Punkte, wie z. B. e, überträgt dieselben vermittelst lothrechter Linien in den Hülfsgrundriß in i° und e°, und zieht hier von ihnen Linien nach P, welche die Diagonalen des perspectivischen Rechtecks a° b° c° d° in den Punkten m°, l° und h°, und die Rechtecksseite c° d° in den Punkten n° und g° schneiden. Zieht man dann durch diese Schnittpunkte lothrechte Linien, so schneiden diese wieder von den Punkten i und e des Aufrisses nach P gezogene Linien 1) in m, welcher der Schnittpunkt der Gratbogen, 2) in l und h, welche Punkte der Gratbogen selbst, und 3) in n und g, welche Punkte des der gegebenen Wölbungslinie parallelen Gurtbogens n g c sind. — Punkte der Perspective des Gurtbogens über b c findet man, wenn man im Aufrisse i f, e w u. s. w. parallel a b, und so auch im Grundrisse h° r°, m° k° u. s. w. parallel a° b° zieht, dann von f und w Linien nach P zieht und dieselben durch lothrechte Linien, in den Punkten k°, r° u. s. w. errichtet, in den Punkten k, r u. s. w. schneidet. — So hätte man auch die Punkte h und m des Gratbogens finden können, wenn man zuvor den Verschwindungspunkt v der Diagonale b° d° festgestellt, nach ihm Linien von f und w des Aufrisses gezogen, und diese durch Lothe, in den Punkten h° und m° des Grundrisses errichtet, geschnitten hätte.

§. 262. **Die Genauigkeit der in den beiden vorhergehenden Paragraphen vorgeführten Constructionen ist noch zu steigern, wenn man zu den gewählten Punkten der Gurt- und Gratbogen auch ihre Tangenten construirt und sich dabei wie in folgendem Beispiele verhält:**

Soll z. B. über den in Fig. 69 (Taf. 10) perspectivisch gegebenen vier Kämpferpunkten M, μ, α und A, wozu P der Hauptpunkt und P D die Distanz ist, die Perspective eines Kreuzgewölbes construirt werden, dessen Wölbungslinie den in Fig. 70 besonders vorgeführten Spitzbogen M S A bildet, so ist als ein leicht construirbarer Punkt dieser Wölbungslinie außer

Digitized by Google

den Punkten M und S wohl zunächst der Punkt K ins Auge zu fassen, welcher in der Diagonale A E des den Spitzbogen einschließenden Rechtecks M E J A liegt und dessen Tangente T F ist. Zieht man außerdem A F, so schneidet man den Bogen in einem andern Punkte G, dessen Tangente L B ist. Für die Gurt- und Gratbogen sind nun wie K und G gelegene Punkte leicht vermittelst ihrer Tangenten zu construiren, wenn man für die beiderlei Bogen zuvor stets die sie einschließenden Rechtecke perspectivisch construirt. So findet man z. B. die Perspective M g k s, wenn man zuvor die Rechtecksperspective M E ε μ construirt, darin μ F und die Diagonalen zieht, die Punkte b und t unter Anhalt an den Punkten R und N ermittelt und dann die Linien t F und b L zieht, welche die Tangenten zu den Punkten k und g sind. So findet man ferner z. B. die Perspective μ γ $\varkappa$ ς einer Gratbogen-Hälfte, wenn man zuvor die Perspective μ ε J A des diagonal stehenden Gratbogen-Rechtecks construirt, darin A φ und die Diagonalen zieht, die Punkte τ und β ermittelt, und dann die Linien τ φ und β λ zieht, welche die Tangenten zu den Punkten $\varkappa$ und γ sind u. s. w. Der Punkt τ ist hierbei ein gemeinschaftlicher Punkt der Tangenten zu den vier Punkten der Gratbogen, welche dem Punkte K des Spitzbogens entsprechend gelegen sind.

§. 263. Sind die Wölbungslinien und die Höhen der sich kreuzenden Gewölbecylinder so verschieden, daß die Gratbogen nicht zwei quer gegenüberliegende, sondern zwei neben einander liegende Kämpferpunkte verbinden, so geschieht die Construction ebenfalls nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen.

Soll z. B. — wenn P in Fig. 71 (Taf. 11) der Haupt- und D ein Distanzpunkt ist, und das Stück Kreisbogen um den Mittelpunkt M die mit der Bildebene zusammenfallende Wölbungslinie des einen Cylinders, und die neben der Construction vorliegende krumme Linie A B C E die Hälfte der Wölbungslinie des andern Cylinders ist — die Perspective der den beiden Cylindern entsprechenden, die Kämpferpunkte a und n verbindenden Gratcurve construirt werden, so überträgt man die Abscissenlängen A H, A G und A F perspectivisch in a h, a g und a f; von da vermittelst lothrechter Linien in a^0 h^0, a^0 g^0 und a^0 f^0 des perspectivischen Hülfsgrundrisses und zieht hier durch h^0, g^0 und f^0 horizontale Linien; man trägt ferner die Ordinatenlängen H B, G C und F E geometrisch in a β, a γ und a ε des Aufrisses auf, zieht hier β β^1, γ γ^1, ε ε^1 horizontal, und überträgt dann die Punkte β^1, γ^1 und ε^1 durch lothrechte Linien in $\beta^{1\circ}$, $\gamma^{1\circ}$ und $\varepsilon^{1\circ}$ des Grundrisses. Zieht man darauf von letzteren Punkten Linien nach P, so

Digitized by Google

schneidet man damit die durch h°, g° und f° horizontalen Linien in den Punkten b°, c° und e° des Grundrisses der gesuchten Gratcurve, und legt man durch diese Punkte lothrechte Linien, so schneidet man von den Punkten β^1, γ^1 und ε^1 nach P noch zu ziehende Linien in den Punkten b^1, c^1 und e^1, durch welche die Perspective der Gratcurve nunmehr gezeichnet werden kann.

Auch kann man sogleich im Aufrisse durch die Punkte h, g und f lothrechte Linien ziehen und damit von β, γ und ε nach P gezogene Linien in den Punkten b, c und e schneiden. Horizontale Linien, durch letztere gelegt, schneiden dann ebenfalls die von β^1, γ^1 und ε^1 nach P gezogenen Linien in denselben Punkten der Gratcurve.

Oder endlich, man zieht eine Linie von M nach P, schneidet damit durch h, g und f horizontal gezogene Linien in M^1, M^2 und M^3, und schlägt um diese Punkte, weil die Wölbungslinie des großen Cylinders selbst ein Kreisstück ist und hier ihre Ebene mit der Bildebene zusammenfällt, Kreisbogen mit den Radien $M^1 h$, $M^2 g$ und $M^3 f$, wodurch man die von β^1, γ^1 und ε^1 nach P gezogenen Linien ebenfalls in den genannten Punkten b^1, c^1 und e^1 der Gratcurve schneidet.

§. 264. Eine den in der vorhergehenden Aufgabe behandelten Curven verwandte krumme Linie führt die nachfolgende Aufgabe in der Curve vor, welche dort der Schnitt des Kanals mit der Mauer des cylindrischen Ausbaues bildet.

Beispiel 23.

§. 265. **Aufgabe.** Neben der Fig. 72 (Taf. 13) sind in halbem Maßstabe der Auf- und Grundriß zu einem mit Zinnen versehenen **halbkreisförmigen Ausbau** an einer Schälungsmauer gegeben. Die Bildebene steht, um 19° von letzterer abweichend, durch die Achse A des Ausbaues, der Hauptpunkt liegt 2 Fuß links von A, die Distanz beträgt $18\frac{1}{2}$ Fuß — es soll im doppelten (d. h. in dem oberhalb der Construction gegebenen) Maßstabe des Grundrisses, bei einer Horizonthöhe von $12\frac{1}{3}$ Fuß über dem Wasserspiegel (Punkt a der Construction), die Perspective des Ausbaues nebst einer darin befindlichen Oeffnung eines cylindrischen **Kanals** construirt werden, dessen halbkreisförmige Wölbungslinie CFW in der Construction um den Mittelpunkt a^2 vorliegt.

Digitized by Google

Ausführung. Nachdem der Horizont gezogen, darin der Hauptpunkt P bestimmt, 2 Fuß rechts von diesem die lothrechte Perspective der Achse des Ausbaues gezogen und darin $12^1/_3$ Fuß unterhalb des Horizontes die Höhe der Grundebene (hier der Wasserspiegel) bezeichnet worden, werden vermittelst des herabgeschlagenen Gesichtspunktes O der Verschwindungspunkt z für die horizontalen Kanten der Schälungsmauer, und der Verschwindungspunkt y für die zu dieser normalen Linien, sowie die den beiden Verschwindungspunkten entsprechenden Theilpunkte tz und ty festgestellt. Hiernach werden die aus dem Aufrisse entnehmbaren Höhen der einzelnen Theile des Ausbaues auf der Achse vom Punkt a aufwärts in a^1, a^2, a^3 u. s. w. geometrisch aufgetragen und um diese Punkte die Perspectiven der Kreisstücke, welche die horizontalen Kanten der einzelnen Theile des Ausbaues bilden und wozu der Aufriß ebenfalls die Durchmesser geometrisch darbietet, construirt. Der Vorsprung der entsprechenden Theile der durch die Achse gehenden Schälungsmauer wird vermittelst eines ebenfalls an der Achse zu construirenden perspectivischen Profiles, dessen Ebene nach y gerichtet ist und durch dessen Eckpunkte nachher die Kanten der Schälungsmauer nach z gezogen werden, bestimmt. Die Schnittpunkte dieser Kanten mit den entsprechenden des Ausbaues ergeben die Gehrung zwischen letzterem und der Schälungsmauer. §. 266.

Um die Eintheilung der um den Punkt a^6 liegenden Kreisperspectiven in Zinnen und Zwischenräume perspectivisch auszuführen, wird, entsprechend dem in §. 193 bei der Construction der Perspective des zehnseitigen Vogelhauses eingeschlagenen Verfahren, zuvor auf einem Halbkreise B C E, der den Durchmesser des äußeren Kreises der Zinnenkrone hat und dessen Mittelpunkt F am zweckmäßigsten in der verlängerten Achse angenommen wird, diese Eintheilung geometrisch ausgeführt; es werden zu den hierdurch festgestellten Punkten, wie K^1, J^1, H^1 u. s. w., die Ordinaten, wie K^1 K, J^1 J, H^1 H u. s. w., gezogen und an dem mit der Ebene der Schälungsmauer zusammenfallenden Durchmesser b e die Perspectiven dieser Ordinaten construirt. Ihre Schnittpunkte mit der größeren Kreisperspective um a^6 müssen dann perspectivisch die Anordnung der Zinnen ergeben. Zu dem Zwecke werden die Abscissenlängen, wie F K, F J, F H u. s. w. auf dem durch a^6 und in der Bildebene liegenden Durchmesser geometrisch aufgetragen, es werden die dadurch bezeichneten Punkte mittels des Theilpunktes tz auf den nach z gerichteten Durchmesser b e in k, i, h u. s. w. perspectivisch übertragen, und nun durch letztere Punkte von y aus die Perspectiven k k^1, i i^1, h h^1 u. s. w. der Ordinaten gezogen. Durch die Schnittpunkte k^1, i^1, h^1 u. s. w. derselben sind nunmehr die lothrechten Zinnen- §. 267.

Digitized by Google

kanten lothrecht, die oberen horizontalen Kanten radial nach a^6 zu ziehen, u. s. w.

Die perspectivische Eintheilung der um Punkt a^4 liegenden Kreisperspective in Kragsteine und Zwischenräume geschieht auf dieselbe Weise, nachdem zuvor die Peripherie des Halbkreises B C E um F entsprechend geometrisch eingetheilt worden, durch Construction der Perspectiven $m\,m^1$, $l\,l^1$ u. s. w. der Ordinaten $M\,M^1$, $L\,L^1$ u. s. w. Die schiefen Kanten der Kragsteine, wie z. B. q r, welche in einer Kegelfläche liegen, sind, wie der Aufriß zeigt, nach einem $6^3/_4$ Fuß unter dem Wasserspiegel in der Achse liegenden Punkte N, der Spitze dieses Kegels, gerichtet, und ihre Perspectiven werden demnach auch sämmtlich von n aus gezogen.

§. 268. Um die Perspective der Kanalöffnung zu construiren, wird die halbkreisförmige Wölbungslinie C T W des Kanalcylinders geometrisch um den in der Achse des Ausbaues (also in der Bildebene) liegenden Punkt a^2 geschlagen, und darauf perspectivisch in die Ebene der Schälungsmauer gewendet. Um dies auszuführen, zieht man beliebige lothrechte Ordinaten $E\,E^1$, $S\,S^1$ u. s. w., überträgt die Abscissenlängen $a^2\,E^1$, $a^2\,S^1$ u. s. w. und $a^2\,C$ mittels des Theilpunktes tz perspectivisch auf eine von z durch a^2 gezogene Linie in $a^2\,e^1$, $a^2\,s^1$ u. s. w. und $a^2\,c^1$, errichtet in den Punkten e^1, s^1 u. s. w. lothrechte Ordinaten und schneidet dieselben ebenfalls durch Linien, von tz durch E, S u. s. w. gezogen, in e, s u. s. w., wonach eine durch c^1, e, s u. s. w. gezeichnete Curve die perspectivisch gewendete Wölbungslinie ist. Zieht man hiernach durch die Fußpunkte a^2, s^1, e^1 u. s. w. der Ordinaten und durch c^1 zu der Schälungsmauer perspectivisch normale, d. h. nach y gerichtete Linien, so schneiden diese die um a^2 construirte, dem Ausbaucylinder angehörige Kreisperspective in den Punkten a^7, s^2, e^2 u. s. w. Errichtet man endlich in diesen Punkten abermals lothrechte Linien (Ordinaten) und schneidet dieselben durch andere, von y aus durch die Punkte T, s, e u. s. w. gezogene Linien in den Punkten t^3, s^3, e^3 u. s. w., so sind diese nebst c^2 Punkte der gesuchten Perspective der Kanalöffnung.

§. 269. Das in diesem Beispiele gezeigte Verfahren, um auf der Perspective einer krummen Linie eine beliebige Theilung perspectivisch auszuführen, ist auch anzuwenden bei der Construction der Perspectiven von Zähnen an Maschinenrädern, von Fensteröffnungen und lothrechten Steinfugen an runden Thürmen, Cannelirungen an Säulen u. dgl. m. Doch ist in diesen Fällen wohl auch das Verfahren in Betracht zu ziehen, welches in dem weiter unten folgenden Beispiele 25 bei der Eintheilung des perspectivischen Hülfsgrundrisses

Digitized by Google

des Treppenwangen-Cylinders angewandt ist. Dort ist nämlich (s. §. 276 und Fig. 74 und 75 [Taf. 12]) zuvor im geometrischen Grundrisse dieses Cylinders der Ort der Traillen und auch die Anordnung der Stufen geometrisch festgestellt und sind durch die Traillen u. s. w. hindurch Radien bis zu den Schnittpunkten mit den Seiten des die Cylinderprojection einschließenden Quadrates gezogen worden; es sind darauf im perspectivischen Hülfsgrundrisse die Perspectiven dieser Schnittpunkte construirt und von ihnen Radien nach dem perspectivischen Mittelpunkte des Cylinders gezogen worden, und ergaben dann die Schnittpunkte der letzteren mit der Perspective der Cylinderperipherie die perspectivische Eintheilung dieser in Traillen u. s. w.

Beispiel 24.

Aufgabe. Es ist neben Fig. 73 (Taf. 11) in $^1/_4$-Maßstab Grund- und Aufriß der **Spitzbogen-Einfassung** um eine 5 Fuß breite Kirchenthür-Oeffnung und außerdem in $^1/_1$-Maßstab der verzierte Querdurchschnitt dieser Einfassung ausführlicher gegeben — es soll über der durch die Perspectiven a und a^1 der Kämpferpunkte gehenden, im Hauptpunkte P der Construction verschwindenden Linie die Perspective der Spitzbogen-Einfassung construirt werden. Der Horizont liegt um 2 Fuß $8^1/_2$ Zoll des beigefügten Maßstabes unterhalb des Punktes f der Construction, P liegt $9^1/_6$ Fuß links von der durch Punkt f lothrechten Linie, die sehr kurze Distanz beträgt 14 Fuß $1^1/_2$ Zoll, die Bildebene steht durch die durch Punkt f lothrechte Linie. §. 270.

Ausführung. Um der Mühe des Construirens jeder einzelnen Kante und Fuge der verzierten Einfassung zu entgehen, vereinfacht man das Profil derselben etwa in der Weise, wie dies in der Figur geschehen ist, zu einer aus geraden Linien bestehenden Figur A B ε C K J M L R ϱ, construirt die Perspective der Einfassung unter Annahme dieses vereinfachten Durchschnittes, und zeichnet darin schließlich die vollständige Verzierung aus freier Hand ein. §. 271.

Denkt man sich von allen Punkten der Kanten B, C, J, L, R und der Fugen K und M (A und ε liegen selbst an der Wand) dieser vereinfachten Einfassung normale Linien gegen die Kirchenwand gefällt, so bilden die Fußpunkte derselben an der Wand eine Gruppe von Spitzbogen, wie sie

Digitized by Google

der Aufriß in $^1/_4$-Maßstab giebt und deren Anordnung in den Punkten A, β, γ, ε, ι, $\varkappa$, λ, μ, ϱ des Profiles in $^1/_1$-Maßstab vorliegt. Construirt man die Perspectiven dieser Spitzbogen, und in beliebigen Punkten von ihnen die Perspectiven der gedachten Normalen, so müssen deren Endpunkte Punkte der Perspectiven jener Kanten und Fugen selbst ergeben. Die Construction der Spitzbogengruppe an der Wandfläche geschieht am zweckmäßigsten, wenn man im Aufrisse mehrere lothrechte Ordinaten, wie dort $Z^\circ Z^8$ eine ist, durch die Bogen zieht und dann in der Construction die Perspectiven dieser Ordinaten und aller der Punkte Z, Z^1, Z^2 u. s. w. sucht, in welchen sie im Aufrisse die Bogen schneiden. Die in die Linie ϱ P fallenden Kämpferpunkte der Spitzbogengruppe werden am sichersten durch geometrische Auftragung in (α), (β), (γ) u. s. w. auf die durch Punkt f horizontale Linie, und durch perspectivische Uebertragung von da vermittelst des Distanzpunktes D^1 auf die Linie ϱ P, festgestellt.

Hiernach findet sich nun zunächst die Perspective s t der Gehrung S T in der Spitze der Einfassung, wenn man durch alle Spitzpunkte der an der Wand construirten Spitzbogen zur Wand normale, d. h. hier geometrisch horizontale Linien zieht, und diesen die entsprechenden, aus dem vereinfachten Profile direct entnehmbaren Längen ϱ R, μ M, λ L u. s. w. geometrisch giebt. — Um darauf Punkte zu den Perspectiven der vorragenden Kanten selbst zu gewinnen, z. B. einen Punkt wie r^3, müßte man durch den Punkt ϱ^3 des entsprechenden größten Spitzbogens rechts an der Wand eine zu dieser normale Linie $\varrho^3 r^3$ ziehen, und derselben die im gegebenen Profile geometrisch vorliegende Länge ϱ R perspectivisch geben, ein Verfahren, dessen Umständlichkeit bei so zahlreichen Punkten, wie hier offenbar gebraucht werden, nur dadurch zu verringern ist, daß man sich für den Vorsprung aller Stücke der Einfassung gewissermaßen eine perspectivische Scala schafft. Zu dem Zwecke construirt man aus dem weiter unten ersichtlichen Grunde die Perspective g des Punktes G, in welchem der eine der beiden kleinsten Spitzbogen zum vollen Quadranten ausläuft, schneidet, von g nach P ziehend, die durch f lothrechte Linie in a^2 und construirt an letzterer oberhalb a^2 in der Figur $a^2 \ldots\ldots m^2 l^2 r^2 \varrho^2$ eine geometrische Wiederholung des gegebenen vereinfachten Profiles derart, daß r^2 dem Punkte R, ϱ^2 dem Punkte ϱ, und a^2 dem Punkte A entspricht. In der Figur ist, um sie nicht zu verwirren, dieses Profil nur zum Theil vorgeführt. Zieht man dann von P aus Linien sowohl durch die zwischen a^2 und ϱ^2 neuerdings bestimmten Punkte, als auch durch r^2, l^2, m^2 u. s. w., so bilden diese Linien die gedachte Scala. Dieselbe ist nun folgendermaßen zu benutzen: Will man zu einem Punkte, wie z. B. ϱ^3, die perspectivische Länge der Normale $\varrho^3 r^3$ haben, so lothet man von ihm bis zu dem entsprechenden Punkte ϱ^4 der

Digitized by Google

Scala in die Höhe, zieht dort $\varrho^4 r^4$ normal zur Wandfläche, und macht dann $\varrho^3 r^3$ geometrisch gleich $\varrho^4 r^4$. Statt nun jedoch die perspectivischen Längen der Normalen zu beliebigen einzelnen Punkten auf diese Art zu ermitteln, ist es zweckmäßiger, systematisch gelegene Punkte hierzu auszuersehen, und zwar solche wie ϱ^3, μ^3, λ^3, $\varkappa^3$, ι^3, u. s. w., nämlich in einer Linie radial zu dem gegenüberliegenden Kämpferpunkte a^1 gelegene ins Auge zu fassen und daran sogleich ein ganzes radial gelegenes perspectivisches Profil zu construiren. Nachdem man deshalb zuvor $\varrho^3 \varrho^4$ lothrecht, $\varrho^4 \alpha^4$ radial nach a^1, und dann $\varrho^4 r^4$, $\mu\, m^4$, $\lambda^4 l^4$, $\varkappa^4 k^4$ u. s. w. horizontal gezogen, ist in der Scala ein Vorsprungsprofil $r^4 l^4 m^4 \ldots b^4 a^4$ erzielt worden, durch dessen Eckpunkte man nur lothrechte Linien zu ziehen hat, um damit auf den durch die Punkte ϱ^3, μ^3, λ^3 u. s. w. gezogenen Horizontalen die perspectivischen Profilpunkte r^3, l^3, m^3 u. s. w. abzuschneiden. In der Figur liegen mehrere so construirten perspectivischen Profile, durch deren Eckpunkte nachher die Perspectiven der eigentlichen Spitzbogen gezeichnet sind, vor, unter anderen auch die in der Höhe der Kämpferpunkte gelegenen Profile, wie $a r \varrho$.

Es leuchtet nunmehr ein, daß die Scala in der Höhe des Punktes g angefangen werden mußte, damit die in ihr zu construirenden Hülfsprofile auch richtig radial zu den gegenüberliegenden Kämpferpunkten, wie die Hauptprofile in der Spitzbogen-Verzierung selbst, lagen.

Beispiel 25.

Aufgabe. Es sind in Fig. 74 (Taf. 12) als zu einer umfassenderen Construction gehörig gegeben der Horizont durch den Hauptpunkt P, 5 Fuß 6 Zoll darunter die Grundlinie $z z^1$, darin in den Punkten (0), (1′), (2′) u. s. w. der Fußmaßstab, und in 13 Fuß 2 Zoll Distanz der herabgeschlagene Gesichtspunkt O. Construirt vorhanden ist die Perspective der **Ecke eines Saales**, oben an der Decke bezeichnet durch den Winkel $x^2 w^1 x^3$, auf dem Fußboden durch den Winkel $x w x^1$, und durch die lothrechte Ecklinie $w w^1$, welche mit der Verticale der Construction zusammenfällt. Als bekannt vorausgesetzt und übrigens aus der Figur erkennbar sind die Maße einer in derselben Saalecke angebrachten, in die obere Etage führenden **Wendeltreppe**, deren Achse A = 1 Fuß 5 Zoll links von der Verticale und 3 Fuß 10 Zoll vor der Grundlinie auf dem Fußboden (der Grundebene) steht — es soll die Perspective der Wendeltreppe construirt werden. §. 272.

Digitized by Google

§. 273. Es kann diese Aufgabe als ein Beispiel zu dem in §. 14 Gesagten dienen, daß man wegen gewisser Vortheile beim Construiren bei einer und derselben Darstellung für nähere oder entferntere Objecte eine nähere oder entferntere Hülfs-Bildebene neben der gegebenen annehmen könne. Da nämlich wegen der Gestalt des hier gegebenen Objectes, der schraubenartigen Treppe, die perspectivische Construction derselben offenbar am besten von ihrer lothrechten Achse (s. §. 170) ausgeht, auf welcher, nach dem ihrem perspectivischen Orte entsprechenden Maßstabe gemessen, alle Höhenmaße aufgetragen werden können, so ist es hier gerathen, durch die Achse eine besondere Hülfs-Bildebene anzunehmen und dieselbe folgendermaßen perspectivisch zu orientiren:

§. 274. **Ausführung.** Nachdem, der in der Aufgabe gegebenen Beschreibung gemäß, die Perspective a des Fußpunktes der Achse construirt worden, wird durch a eine dem Horizonte parallele Linie yy^1 gezogen, die Grundlinie der angenommenen Hülfs-Bildebene. Auf ihr wird, vermittelst von P durch die Punkte (0), (1′), (2′) u. s. w. des gegebenen Fußmaßstabes zu ziehender Linien, der ihr entsprechende perspectivisch vergrößerte Fußmaßstab in den Punkten 0, 1′, 2′ u. s. w. hergestellt. Da die gegebene Augenhöhe von 5 Fuß 6 Zoll selbstverständlich dieselbe bleiben muß und in der That auch der gegebene Horizont und der Hauptpunkt ebensowohl nach dem neuen Maßstabe 5 Fuß 6 Zoll über der neuen Grundlinie yy^1, wie nach dem gegebenen Maßstabe über der gegebenen Grundlinie zz^1 liegen, so bleiben diese auch für die Hülfs-Bildebene dieselben. Ebenso bleibt der herabgeschlagene Gesichtspunkt O derselbe; denn da seine Distanz vom Hauptpunkte 13 Fuß 2 Zoll des alten Maßstabes beträgt, muß dieselbe nach geschehener Näherrückung der Bildebene um 3 Fuß 10 Zoll nunmehr 9 Fuß 4 Zoll des neuen Maßstabes ausmachen.

Man sieht, daß die Annahme einer Hülfs-Bildebene neben der gegebenen im Grunde nur auf eine perspectivisch angemessene Aenderung der Größe des Maßstabes hinausläuft.

§. 275. In Fig. 75 (Taf. 12) liegt der dem neuen Maßstabe entsprechende geometrische Grundriß der Saalecke XWX^1, der Wendeltreppe um ihren Achspunkt A, und die geometrische Orientirung der beiden Bildebenen vor. Von den fünf Kreisen darin bedeutet der kleinste erste den Spindelcylinder der Treppe, der nächstgrößere zweite die ringartig um die Spindel

Digitized by Google

fortgesetzten Gesimse der Stufen, der dritte die innere Fläche des Wangencylinders, der vierte die äußere Fläche desselben, der fünfte den Vorsprung der Stufengesimse außerhalb des äußern Wangencylinders, und mögen hiernach diese Kreise auch fernerhin der erste, zweite u. s. f. genannt bleiben. Von den je drei die Stufen darstellenden Linien bedeutet die eine stets die Rückfläche der Setzstufe, die zweite radial zur Spindelachse stehende die Vorderfläche der Setzstufe, die dritte den Vorsprung des Stufengesimses, und mögen diese Linien nach dieser Reihenfolge auch fernerhin kurz als erste, zweite und dritte Stufenlinie bezeichnet werden.

§. 276. Zur Construction der Treppe selbst übergehend, wird zunächst um einen innerhalb der verlängerten Achse etwa 3 Fuß unterhalb a anzunehmenden Punkt a° ein perspectivischer Hülfsgrundriß der Treppe, nämlich die Perspective des eben erläuterten geometrischen Grundrisses construirt. Von den hierbei zu verwendenden, die Kreise einschließenden Quadraten ist in der Figur nur das des vierten Kreises vorgeführt. Die perspectivischen Richtungen der je drei Stufenlinien und die perspectivischen Orte der Traillen werden dadurch gefunden, daß man zunächst von jenen stets die zweite im geometrischen Grundrisse bis zu ihren Schnittpunkten mit den Seiten des Quadrates des vierten Kreises verlängert, durch die Traillen aber Radien vom Achspunkte A bis in die Seiten desselben Quadrates zieht, und dann in der Perspective dieses Quadrates die Perspectiven jener Schnittpunkte vermittelst des Distanz- und des Hauptpunktes construirt. Zieht man dann Linien von diesen perspectivischen Schnittpunkten radial nach a°, so sind die einen die Perspectiven der zweiten Stufenlinien, die anderen ergeben die perspectivischen Orte der Traillen zwischen dem dritten und vierten Kreise. Für die letzteren bedarf es, da sie sich diametral gegenüberstehen, überhaupt nur sechs Schnittpunkte. Verlängert man die eben construirten zweiten Stufenlinien bis in den Horizont, so schneiden sie diesen in den Verschwindungspunkten der Längenkanten der Setzstufen, nach welchen nunmehr auch die Perspectiven der ersten und dritten Stufenlinien, hernach aber auch die Perspectiven der entsprechenden Stufenkanten des perspectivischen Aufrisses gezogen werden. In der Figur haben diese Verschwindungspunkte die Bezeichnung v nebst den Ziffern der Stufen, deren Längenkanten in ihnen verschwinden; so ist z. B. $v^{1.\ 7.\ 13.\ 19.}$ der Verschwindungspunkt der Längenkanten der ersten, siebenten, dreizehnten und neunzehnten Stufe. Die ersten und dritten Linien derjenigen Stufen, deren Verschwindungspunkte zu weit außerhalb des Constructionsraumes fallen, wie etwa die der zweiten, dritten, achten und neunten Stufe, werden einzeln vermittelst der Perspectiven der Schnittpunkte ihrer Verlängerungen mit den

Digitized by Google

Seiten der den vierten und den zweiten Kreis im geometrischen Grundrisse einschließenden Quadrate construirt.

§. 277. Für den perspectivischen Aufriß der Treppe wird zunächst von dem Punkte a der Achse aufwärts die Stufenhöhe von $7\frac{1}{3}$ Zoll des neuen Maßstabes 20 mal aufgetragen und werden diese Höhen, um Verwirrung zu vermeiden, über a anfangend, einzeln mit 1^a, 2^a, 3^a u. s. f. numerirt, wobei 9^a in den Horizont fallen muß. Unterhalb jedes einzelnen dieser Punkte wird sogleich die $1\frac{1}{2}$ Zoll betragende Dicke der Stufenauftritte bezeichnet, wie z. B. in 7^c und 8^c. Hiernach werden nun zuvörderst die Perspective der cylindrischen, 5 Zoll dicken Spindel, und nach Anleitung des §. 258, Beispiel 21, die Perspectiven der 8 Zoll Durchmesser habenden Ringe, in welchen die Stufengesimse sich um die Spindel fortsetzen, construirt, wobei zu erinnern ist, daß in der vorliegenden Figur das Stufengesims-Profil nicht, wie in Beispiel 21, ein Karnies, sondern ein Viertelstab ist, und daß hier der erste Spindelring unterhalb bis zum Fußboden als 8 Zoll dicker Cylinder fortgesetzt ist.

Bei der nun folgenden Construction der Stufen, wobei dieselben zunächst immer ohne Gesims darzustellen sind, ergeben sich deren horizontale Längenkanten, z. B. die der ersten Stufe (des Antrittes) dadurch, daß man von dem entsprechenden Verschwindungspunkte, hier $v^{1.\,7.\,13.\,19.}$, durch a und 1^a Linien zieht. Die lothrechte Höhenkante ee^1 (welche wegen Abrundung der Stufe an dieser Stelle überflüssig wird) derselben Stufe ergiebt eine Lothrechte aus dem entsprechenden Punkte e° des perspectivischen Grundrisses. Die höchsten Punkte der Gehrungen über den lothrechten Höhenkanten werden gefunden, wie an der ersten Stufe der Punkt h, indem man zuvörderst die Perspective der nächst höheren, hier der zweiten Stufe, im Aufrisse construirt, im Grundrisse von h° durch e° bis ε° zieht, letzteren Punkt vermittelst einer Lothrechten in ε des Aufrisses überträgt, und hier von ε durch e^1 bis h zieht. Die Perspectiven der unteren Grenzen der Stufengesimse ergeben sich in Linien, aus den entsprechenden Verschwindungspunkten durch die die Dicke der Stufenauftritte bezeichnenden, ... ^{c} genannten Punkte gezogen.

Nach diesem Verfahren können construirt werden die Perspectiven der 4. 5. 7. 10. 11. 12. 13. 16. 17. 19. und die 6. und 18. Stufe; hinsichtlich der beiden letzteren ist bei den aus dem Grundrisse zu ziehenden Lothrechten darauf zu achten, daß hier die Rückflächen der Stufen sichtbar werden.

Da aber die Verschwindungspunkte der 2. 3. 8. 9. 14. und 15. Stufe zu weit außerhalb des Constructionsraumes fallen, ist es erforderlich,

Digitized by Google

sie — z. B. für die zweite, vorläufig wieder ohne Gesims gedachte Stufe — dadurch entbehrlich zu machen, daß man zu den in der Spindelachse schon vorhandenen einen Punkten 1^a und 2^a der Längenkanten dieser Stufe noch zweite Punkte, wie k und k^1, construirt, um dann $1^a k$ und $2^a k^1$ ziehen zu können. Zu dem Zwecke construirt man entweder, wie es in der Figur für Punkt k^1 geschehen ist, mit dem Radius des äußeren Wangencylinders, in dem die beiden gesuchten Punkte liegen, die Perspectiven von Stücken der um 1^a und 2^a denkbaren horizontalen Kreise und schneidet dieselben durch eine Lothrechte aus Punkt k° in k und k^1; oder man verlängert ee^1 nach oben, trägt auf ihr das Maß ee^1 funfzehnmal — da es oben zugleich zur Construction der 14. und 15. Stufe verwendbar ist — numerirt auf, man zieht im Grundrisse von e° durch k° bis u im Horizonte, darauf von u nach e^1, nach 2, nach 13 und 14, und schneidet diese letztgezogenen Linien durch eine Lothrechte aus Punkt k°, wodurch sich oben die lothrechte Höhenkante der 14. Stufe, und in kk^1 die der 2. Stufe ergiebt, so daß nunmehr $1^a k$ und $2^a k^1$ gezogen werden können. Auf gleiche Art, indem man von c° des Grundrisses durch 1° bis t im Horizonte zieht und, von hier nach den Punkten 2 und 3 ziehend, die im Punkte 1° stehende Lothrechte schneidet, erzielt man die lothrechte Höhenkante der 3. Stufe; ebenso die der 15. Stufe u. s. w. Wollte man, um ebenso bei der Construction der lothrechten vordern (unsichtbaren) Höhenkante der 8. Stufe zu verfahren, eine Linie von e° des Grundrisses durch m° bis in den Horizont ziehen, so würde sie diesen in einem sehr entfernten Punkte treffen. Man errichtet deshalb wohl besser eine, der in e stehenden Lothrechten entsprechende, andere Lothrechte in einem anderen Punkte n (siehe auch n° des Grundrisses) und trägt auf dieser die diesem Orte durch Linien, von v 6. 12. 18. durch a, 1^a, 2^a u. s. w. gezogen, perspectivisch zuzumessende Stufenhöhe 19 mal numerirt auf, zieht dann von n° durch m° bis s im Horizonte, von da Linien nach den Punkten 7 und 8 für die 8., und nach Punkt 19 für den Auftritt der 19. Stufe, und schneidet damit auf der in m° zu errichtenden Lothrechten: in mm^1 die lothrechte vordere Höhenkante für die 8., und oben in m^2 einen zweiten Punkt für die Längenkante $19^a m^2$ der 19. Stufe ab. Nachdem man dann $7^a m$, und hierzu durch Punkt i, in welchem (siehe auch i° des Grundrisses) die hintere Längenkante an die Spindel stößt, eine perspectivische Parallele gezogen und dieselbe in c durch eine Lothrechte aus c° geschnitten, ist die Rückenansicht der 8. Stufe construirt. Doch möchte wohl für die Construction der zweiten Punkte zu den hinteren Längenkanten der 8. wie der 9. Stufe das bei Construction der 2. Stufe erstangeführte Verfahren das zweckmäßigere sein.

Digitized by Google

Die Theile der Stufengesimse, welche außerhalb am Wangencylinder herumlaufen, bilden Kreisstücke, und werden durch die Perspectiven von Kreisen, die, wie z. B. für die 10. Stufe horizontal um die Achspunkte 10^a und 10^c construirt werden, dargestellt. Die radial zur Achse stehenden Endflächen dieser Gesimse liegen in den Ebenen der Rückenflächen der nächstoberen Setzstufen und werden, wie o und p durch Lothrechte aus den entsprechenden Punkten o° und p° des Grundrisses abgeschnitten.

Für die Construction der Perspectiven der schraubenartigen Curven, in welchen der innere und äußere Wangencylinder unterhalb der Stufen abgeschnitten sind, werden diejenigen ihrer Punkte ausersehen, welche lothrecht unter den Enden der Vorderflächen der Stufen, und zwar je $5\frac{1}{2}$ Zoll darunter liegen. Es sind dies im Grundrisse die Schnittpunkte der 2. Stufenlinien mit dem 3. und 4. Kreise. Um sie zu construiren, bezeichnet man im Aufrisse je $5\frac{1}{2}$ Zoll unterhalb der in der Achse vorhandenen Punkte ..... 6^a, 7^a u. s. w. an dem Buchstaben d erkennbare Punkte 6^d, 7^d u. s. w., zieht durch diese Punkte mit den Längenkanten der Stufen perspectivisch parallele Linien, und schneidet in denselben durch Lothrechte aus den entsprechenden Punkten des Grundrisses die gesuchten Punkte ab.

Die Perspective der ebenfalls schraubenartigen Curve, welche das Geländer bildet, ist am besten vermittelst der höchsten Punkte der Traillen zu construiren. Die perspectivischen Höhen der letzteren selbst ergeben sich, wenn man in irgendeinem Punkte q der durch a° des Grundrisses liegenden Horizontalen eine Lothrechte q r von der gegebenen Traillenhöhe errichtet, und von P durch r und durch q Linien zieht. Zieht man darauf von dem Mittelpunkte jeder Traille im Grundrisse eine Horizontale gegen P q und errichtet im Schnittpunkte eine Lothrechte, so schneidet P r auf jeder derselben die der entsprechenden Traille zukommende perspectivische Höhe ab.

Oben mündet die Treppe durch einen Cylinder, den das Loch in der Decke bildet und dessen Durchmesser dem des äußeren Wangencylinders gleich ist, in die obere Etage. Der Mittelpunkt der in der Saaldecke liegenden Grundfläche dieses Cylinders ist Punkt 17^a der Treppenachse, der Mittelpunkt der in dem Fußboden der obern Etage liegenden Grundfläche ist 19^a.

Digitized by Google

B. Construction der Perspectiven von schiefen Objecten.

Zehntes Kapitel.

Perspectiven schiefer Linien und Ebenen.

§. 278. Linien, welche weder horizontal noch lothrecht sind, werden schiefe Linien genannt. Ihre Richtung wird durch die Größe ihres Neigungswinkels zu der Grund-, der Bild- oder der Verticalebene bezeichnet. Sie können dreierlei Richtungen haben, nämlich

a) parallel der Bildebene und schief zur Grundebene, oder
b) parallel der Verticalebene und schief zur Grundebene, oder
c) schief zur Vertical- und zur Grundebene

sein.

§. 279. Jede schiefe Linie wird als irgendeiner Ebene angehörig angesehen und ihre Perspective demgemäß construirt. Die Perspective ihres Verschwindungspunktes, d. i. der Schnittpunkt des ihr entsprechenden Parallelstrahles mit der Bildebene, ist stets ein Punkt der Grenzlinien-Perspective der Ebene, welcher die Linie angehört.

§. 280. Ebenen, welche weder der Grundebene, noch der Verticalebene, noch der Bildebene parallel sind, werden schiefe Ebenen genannt.

Für die perspectivische Construction wird die Lage einer schiefen Ebene beschrieben durch die Richtung ihrer Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene und durch die Größe des Winkels, welchen sie an dieser Schnittlinie mit der Grundebene bildet, wobei dieser Winkel selbstverständlich als in einer lothrechten, zur Schnittlinie normalen Ebene liegend anzusehen ist.

Digitized by Google

§. 281. Der schiefen Ebenen giebt es viererlei, nämlich

a) solche, deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene schief zur Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene ein rechter ist;

b) solche, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter ist;

c) solche, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Bildebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter ist;

d) solche, deren Schnittlinie mit der Grundebene schief zur Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter ist.

Die drei ersten Arten von Ebenen nennt man einfach-schief, die ersten insbesondere lothrecht-schief, die unter d) angeführten doppelt-schief.

§. 282. Eine unbegrenzte schiefe Ebene wird dargestellt durch die Perspective ihrer Grenzlinie, welche zugleich die aller der Ebene parallelen anderen Ebenen ist, durch ihre Schnittlinie mit der Bildebene (d. i. ihre Grundlinie) und durch die Perspective ihrer Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene.

§. 283. Die **Perspective der Grenzlinie** einer schiefen Ebene wird in der Regel construirt durch die beiden in ihr liegenden **Perspectiven der Verschwindungspunkte der Schnittlinie** der schiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene **und des Winkelschenkels**, welcher die Neigung der schiefen Ebene zur Grundebene bezeichnet. Die Schnittlinie ist hierbei selbstverständlich als mit diesem Winkelschenkel sowohl, wie mit der Ebene des Neigungswinkels einen rechten Winkel bildend zu behandeln.

§. 284. Doch kann die Perspective der Grenzlinie einer schiefen Ebene auch durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte zweier beliebigen anderen Linien construirt werden, wenn diese als der schiefen Ebene angehörig bekannt sind.

Digitized by Google

a) Lothrecht-schiefe Ebenen.

In §. 75 ist schon die Construction der Grenzlinien-Perspective (D² D³ in der Textfigur 21) und der Grundlinie (f b) einer (dort um 40° von der Verticalebene abweichenden) lothrecht-schiefen Ebene, des Hauptpunktes (H), der Distanzpunkte (D² und D³) und des herabgeschlagenen Gesichtspunktes (O¹ oder O²) dazu gezeigt worden. Es bleibt hier noch übrig, den Inhalt jenes Paragraphen folgendermaßen zu vervollständigen: §. 285.

Der in jener Figur zuerst construirte Schnittpunkt H des Horizontes mit der Grenzlinien-Perspective ist die im vorhergehenden §. 283 erwähnte Perspective des Verschwindungspunktes der horizontalen Schnittlinie der lothrecht-schiefen Ebene mit der Grundebene. Die Perspective des Verschwindungspunktes des (an sich lothrechten) Winkelschenkels, welcher die Neigung der lothrecht-schiefen Ebene zur Grundebene bezeichnet, wird durch einen durch den Gesichtspunkt im Raume denkbaren (lothrechten) Parallelstrahl angedeutet. Da dieser der Bildebene parallel ist, so schneidet er sie in einem Punkte in unendlicher Entfernung, nach welchem eine durch H selbst gezogene lothrechte Linie ebenfalls gerichtet sein muß. Es entspricht demnach die durch H lothrecht gezogene Grenzlinie den Erfordernissen des §. 283.

Da D² und D³ (Fig. 76, Taf. 11) Distanzpunkte sind, so sind §. 286.
sie Theilpunkte für alle im Hauptpunkte H verschwindenden, an sich horizontalen Linien, wie cH oder gH; und zwar sind sie die in §. 102, Textfigur 25, behandelten beiden Theilpunkte; nur daß sie dort t^2 und t^3 genannt sind und in der Grenzlinien-Perspective $t^2 t^3$ einer lothrecht-schiefen Ebene liegen, deren Abweichungswinkel von der Verticalebene P O v ist.

Soll durch die Perspective g eines der lothrecht-schiefen Ebene §. 287.
D² H c f angehörigen Punktes G die Perspective einer in derselben Ebene liegenden Linie construirt werden, welche nicht horizontal ist wie gH, sondern von dieser um einen beliebigen, etwa 30° großen Winkel abweicht, so wird, da auch ihr Parallelstrahl von dem zur lothrechten Ebene gehörigen Parallelstrahle für horizontale Linien

Digitized by Google

um denſelben Winkel abweichen muß, ihr Abweichungswinkel an O^1H in O^1, oder an O^2H in O^2 angetragen und die Grenzlinien-Perſpective dadurch in der Perſpective z des Verſchwindungspunktes der gegebenen Linie geſchnitten, deren Perſpective alsdann eine von g nach z gezogene Linie iſt.

§. 288. Soll auf gz ein gegebenes Maß, z. B. $\gamma\varepsilon$, perſpectiviſch in ge übertragen werden, ſo wird, wie bei den Conſtructionen horizontaler Linien, die Länge des Parallelſtrahles zO^1 oder zO^2 um z nach oben und unten in die Grenzlinien-Perſpective übertragen, und werden dadurch zwei Theilpunkte t_z und t_z^1 für die Linie beſtimmt. Daß hierbei das zu übertragende Maß $\gamma\varepsilon$ zuvor auf die Grundlinie bf der lothrecht-ſchiefen Ebene, oder auf eine mit jener parallele, alſo lothrechte Maßlinie (in dieſem Falle in der Länge $g\eta$) aufzutragen iſt, verſteht ſich von ſelbſt.

Daß die Perſpective des Verſchwindungspunktes für Linien, welche normal zu der lothrechten Ebene, alſo horizontal ſind, der Punkt H^1 des Horizontes iſt, daß eine durch dieſen Punkt lothrechte Linie die Grenzlinien-Perſpective für ſolche lothrecht-ſchiefen Ebenen iſt, welche normal zu der gegebenen lothrecht-ſchiefen Ebene ſind, iſt ſchon in §. 77 geſagt worden.

§. 289. Als ein hierher gehöriges Beiſpiel kann die Conſtruction der im Beiſpiele 10, §. 181, vorkommenden Frontonkanten dienen. Dieſelben ſind als Linien anzuſehen, welche in parallelen lothrechten Ebenen liegen, die ſämmtlich wie die Hauptfaçade des Gebäudes um 60° von der Verticalebene abweichen. In Fig. 77 (Taf. 11) ſind beiſpielsweiſe nur zwei jener Linien, a^1e^1 und e^1c^1, in Betracht genommen. Zieht man hier durch die Perſpective y des Verſchwindungspunktes der der Hauptfaçade parallelen horizontalen Linien eine lothrechte Linie, ſo iſt dieſe die Grenzlinien-Perſpective jener lothrechten Ebenen. y ſelbſt iſt der Hauptpunkt darin; der in jenem Beiſpiele t_y genannte Theilpunkt, deſſen Abſtand von y gleich der Länge des Parallelſtrahles Oy (Diſtanz) iſt, iſt dazu der herabgeſchlagene Geſichtspunkt und der Horizont die (gedrehte) Verticale. Trägt man daher, um die Perſpective x des Verſchwindungspunktes zu den wie a^1c^1 gerichteten, alſo um 17° über die horizontalen Frontonkanten ſteigenden Kanten zu finden,

Digitized by Google

an den Horizont oberhalb desſelben in t_y den Winkel $P\,t_y\,\hat{x}$ von 17° an, ſo ſchneidet man die lothrechte Grenzlinien-Perſpective in x. So wird auch die Perſpective u des Verſchwindungspunktes der wie $e^1 c^1$ gerichteten, d. h. um 17° fallenden Frontonkanten dadurch gefunden, daß man denſelben Winkel an den Horizont unterhalb desſelben in t_y anträgt und mit ſeinem angetragenen Schenkel die Grenzlinien-Perſpective ſchneidet. — Will man die perſpectiviſchen Längen der Kanten $a^1 e^1$ und $e^1 c^1$ nachmeſſen, ſo findet man die Theilpunkte dazu, z. B. für $a^1 e^1$, wie für horizontale Linien, indem man nämlich die entſprechende Parallelſtrahllänge $x\,t_y$ um x in die lothrechte Grenzlinien-Perſpective überträgt; und ſo für $e^1 c^1$, indem man die Länge $u\,t_y$ um u ebendahin überträgt. Die Grundlinie der mit der Hauptfaçade zuſammenfallenden lothrecht-ſchiefen Ebene, der die Kanten $a^1 e^1$ und $e^1 c^1$ angehören, iſt die lothrechte Linie $a^1 h$ (Hauptkante) durch den Punkt h, in welchem die Hauptfaçade die horizontale Grundlinie, alſo die Bildebene ſchneidet.

b) Andere einfach-ſchiefen Ebenen.

§. 290.

Iſt, um die Perſpective der Grenzlinie einer der in §. 281 unter b) angeführten Ebenen zu conſtruiren, in Fig. 78 (Taf. 13) hinter der Bildebene bild die begrenzt veranſchaulichte ſchiefe Ebene ARCE gegeben, deren Schnittlinie AE mit der horizontalen Grundebene parallel der Verticalebene iſt und deren Winkel RAG mit der Grundebene durch die 50° betragende Neigung des Winkelſchenkels AR zu dem in der Grundebene liegenden andern Schenkel AG bezeichnet iſt, ſo ſind nach §. 283 die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte der beiden Linien AE und AR zu conſtruiren, um durch ſie die Grenzlinien-Perſpective ziehen zu können.

Die Perſpective des Verſchwindungspunktes der an ſich horizontalen, zur Bildebene normalen Linie AE iſt der Hauptpunkt P. Der Schnittpunkt ϱ aber des Parallelſtrahles $O^\circ(\varrho)$ (der mit der Bildebene parallelen Linie AR) mit der Bildebene liegt in unendlicher Entfernung; nach ihm iſt unter anderen der mit AR und der mit $O^\circ(\varrho)$ geometriſch parallelen Linien $M(\varrho)$ und $N(\varrho)$ jedenfalls auch $\measuredangle(\varrho)$ gerichtet und muß dieſe, da ſie zugleich durch

Digitized by Google

P und durch ϱ geht und somit den Erfordernissen des §. 283 entspricht, die Perspective der Grenzlinie der Ebene ARCE und aller mit dieser parallelen Ebenen sein.

Die Schnittlinie derselben schiefen Ebene mit der Bildebene, d. i. ihre Grundlinie, findet man hier, wenn man ihre Schnittlinie AE mit der Grundebene bis zu U in der horizontalen Grundlinie der Bildebene verlängert und UW durch U parallel der Grenzlinie zieht. Auf der Constructionsfläche jedoch findet man U, wenn man zuvor die Perspective x eines beliebigen Punktes X der Schnittlinie AE construirt, und von P durch x bis zur horizontalen Grundlinie eine Linie PU zieht, welche die unendlich lange Perspective der Schnittlinie AE ist. Der für die horizontale Grundlinie geltende Maßstab gilt auch für die schiefe Grundlinie, da diese, wie jene, in der Bildebene liegt.

Da P der Fußpunkt einer aus dem Gesichtspunkte O° auf die Grenzlinie gefällten Normale ist, so ist er auch der Hauptpunkt in der schiefen Grenzlinie, und eine zu dieser durch ihn gezogene Normale ist die (gedrehte) Verticale zur schiefen Ebene, d. i. die Perspective der Grenzlinie für alle zu der gegebenen schiefen Ebene und zugleich zur Bildebene normalen Ebenen. Da der Abstand (die Distanz) des Gesichtspunktes O° vom Hauptpunkte P in der schiefen Grenzlinie derselbe geblieben ist, wie sein Abstand von demselben Punkte im Horizonte, so fällt der herabgeschlagene Gesichtspunkt in O^1 oder (O^1) und die Distanzpunkte fallen in Δ und Δ^1.

Da die Perspective des Verschwindungspunktes für Linien, welche, wie AQ, normal zu der gegebenen schiefen Ebene gerichtet sind, der Schnittpunkt q des Parallelstrahles O(q) mit der Bildebene ist, letzterer aber parallel der Bildebene und insbesondere der gedrehten Verticale ist, so liegt jene Perspective in unendlicher Entfernung in der gedrehten Verticale, und sind daher die Perspectiven der gedachten Linien geometrisch parallel mit dieser zu ziehen.

Die Perspective der Grenzlinie für Ebenen, welche zu der gegebenen schiefen Ebene normal sind und deren Schnittlinien mit der horizontalen Grundebene parallel AE sind, ist dem Vorhergehenden nach die gedrehte Verticale, und Δ oder Δ^1

Digitized by Google

dazu der herabgeschlagene Gesichtspunkt. Die Grundlinie der zu A R C E normalen und insbesondere durch die Schnittlinie A E gehenden Ebene wäre eine durch U parallel der gedrehten Verticale gezogene Linie U W^1.

§. 291. Faßt man hiernach die auf der Bildebene b i l d in Fig. 78 vorliegende Anordnung der Grenzlinie $\Delta(\varrho)$ der schiefen Grundlinie, des herabgeschlagenen Gesichtspunktes O^1 u. s. w. zu einander ins Auge, so findet man, daß mit diesen Stücken nur eine 50° betragende Drehung um den Hauptpunkt aus der gewohnten Lage stattgefunden hat, eine Drehung, die, um 40° fortgesetzt, durch P eine lothrechte Grenzlinie, durch U eine lothrechte Grundlinie u. s. w., als einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene entsprechend, ergeben würde.

§. 292. Außerdem ist zu bemerken, daß die Perspective der Grenzlinie einer Ebene gewissermaßen als in der Schnittlinie der Bildebene mit einer durch den Gesichtspunkt O° denkbaren P a r a l l e l e b e n e — analog der Construction der Perspective des Verschwindungspunktes einer Linie vermittelst des P a r a l l e l s t r a h l e s — gefunden angesehen werden kann.

§. 293. Ist nun auf der Constructionsfläche in Fig. 79 (Taf. 13) die Horizontale durch P der Horizont, die durch p die horizontale Grundlinie, P O die Distanz, so ist die durch P gezogene, um 50° von dem Horizonte abweichende Linie y Δ^1 die Perspective der Grenzlinie der in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen schiefen Ebene; u w ist die Grundlinie dazu, wenn die in der Figur nicht gezogene Linie P u die Perspective der Schnittlinie der schiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene ist; P O^1 (geometrisch gleich P O, gleich P Δ, gleich P Δ^1) in der gedrehten Verticale ist die Distanz, O^1 der herabgeschlagene Gesichtspunkt; Δ und Δ^1 in der Grenzlinie sind die Distanzpunkte; der auf der horizontalen Grundlinie in den Punkten 0, 1, 2, 3, 4 vorliegende Fußmaßstab gilt auch für die schiefe Grundlinie durch p^1.

§. 294. Nach dieser Vorbereitung werden nun alle zu der schiefen Ebene in Beziehung stehenden Objecte unter Anwendung der schiefen Grenzlinie, der gedrehten Verticale u. s. w. nach denselben Regeln con-

Digitized by Google

ſtruirt, welche für die Conſtructionen auf der horizontalen Grundebene gelten. Soll z. B. die Perſpective f k l n eines in der vorliegenden ſchiefen Ebene liegenden Quadrates von 3 Fuß Seitenlänge conſtruirt werden, deſſen vordere Ecke k = 2 Fuß hinter der Bildebene und 1 Fuß rechts von der Verticalebene liegt, und deſſen Seite k f um 55° links, Seite k l aber um 35° rechts von der Verticalebene abweicht, ſo findet man zunächſt die Perſpectiven y und z der Verſchwindungspunkte der genannten Quadratſeiten, wenn man ihre Abweichungswinkel von 55° und 35° an die gedrehte Verticale in O^1 anträgt, und mit den Parallelſtrahlen $O^1 y$ und $O^1 z$ die ſchiefe Grenzlinie ſchneidet; t_y und t_z ſind die Theilpunkte dazu. — Der perſpectiviſche Ort k wird gefunden, wenn man $\varkappa^1$ auf der ſchiefen Grundlinie 1 Fuß rechts von p^1, und $\varkappa^2 = 2$ Fuß links von $\varkappa^1$ bezeichnet und eine von $\varkappa^1$ nach P gezogene Linie durch eine andere, von $\varkappa^2$ nach Δ^1 gezogene, in k ſchneidet. — Die perſpectiviſche Länge von k f und k l findet man, wenn man durch k eine der ſchiefen Grundlinie parallele Maßlinie $\varphi\lambda$ zieht, das geometriſche Maß $\varkappa^1\varkappa^3$ von 3 Fuß durch Linien, von $\varkappa^1$ und $\varkappa^3$ nach P gezogen, in k φ perſpectiviſch überträgt, k λ geometriſch gleich k φ macht, und nun die perſpectiviſchen Längen k f und k l durch Linien, von φ nach t_y, und von λ nach t_z gezogen, abſchneidet u. ſ. w.

§. 295. Soll hiernach über dem Quadrate f k l n die Perſpective des Würfels conſtruirt werden, ſo iſt die Perſpective des Verſchwindungspunktes für die aufgerichteten Kanten deſſelben, da dieſe ſelbſt parallel zugleich der Bildebene und der Verticalebene ſind, in der Schnittlinie beider, d. i. in der Verticale in unendlicher Entfernung gelegen; d. h., daß die Perſpectiven der Kanten geometriſch parallel der gedrehten Verticale zu ziehen ſind. Die Länge der in k ſtehenden Kante iſt dem Orte k angemeſſen geometriſch gleich $\varkappa\varphi$.

§. 296. Die um den Punkt c mit dem Radius c r in der gegebenen ſchiefen Ebene conſtruirte Kreisperſpective zeigt, wie auch krumme Linien auf ſchiefen Ebenen ebenſo, wie auf horizontalen und lothrechten Ebenen conſtruirt werden.

§. 297. Soll, was die Conſtruction der in §. 281 unter c) angeführten Ebenen betrifft, die Perſpective der Grenzlinie einer ſolchen, in

Digitized by Google

Fig. 80 (Taf. 13) hinter der Bildebene bild begrenzt veranschaulichten Ebene ARCE construirt werden, deren Schnittlinie AE mit der horizontalen Grundebene parallel der Bildebene ist, und deren Winkel RAG mit der Grundebene durch die 32° betragende Neigung des Winkelschenkels AR zu dem in der Grundebene liegenden andern Schenkel AG bezeichnet ist, so kann diese Perspective nach §. 283 durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte der beiden Linien AE und AR gezogen werden. AR ist offenbar eine schiefe, um 32° steigende Linie in einer lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene, deren Grenzlinien-Perspective nach §. 73 die Verticale selbst ist und deren herabgeschlagener Gesichtspunkt in D oder D^1 des Horizontes fällt. Trägt man deshalb an diesen in D oder D^1 den 32° großen Abweichungswinkel der Linie AR von der horizontalen Linie AG an und schneidet die Verticale in H^1, so ist dieser Punkt die Perspective des Verschwindungspunktes der Linie AR. Der dem Horizonte parallele Parallelstrahl O (ε) zu AE schneidet die Bildebene in unendlicher Entfernung in ε im Horizonte, so daß nach ε gerichtete Linien dem Horizonte geometrisch parallel zu ziehen sind; es muß deshalb eine dem Horizonte parallele, durch H^1 gezogene Linie, da sie zugleich durch ε geht, die Perspective der Grenzlinie der gegebenen und aller mit ihr parallelen Ebenen sein. Fällt man vom Gesichtspunkte O° auf sie eine Normale, so ergiebt deren Fußpunkt H^1 den Hauptpunkt, wonach $H^1O°$ (gleich H^1D^1) die Distanz ist und $\measuredangle$ und $\measuredangle^1$ Distanzpunkte sind. Die Verticale ist, da sie durch H^1 geht und normal zur Perspective der Grenzlinie ist, auch zu dieser die Verticale und O^1 darin (H^1O^1 gleich $H^1O°$, gleich H^1D^1) der herabgeschlagene Gesichtspunkt. Die Grundlinie U^1W^1 der schiefen Ebene findet sich in dieser Figur leicht, wenn man den Winkelschenkel RA bis zu U^1 in der mit ihm in Einer lothrechten Ebene liegenden Linie il verlängert und U^1W^1 geometrisch parallel der Perspective der Grenzlinie zieht. Für die Construction jedoch wird sie ermittelt, wenn man die Perspective a eines beliebigen Punktes A der Schnittlinie AE construirt, durch a die unendlich langen Perspectiven Pa und H^1a der an A liegenden Winkelschenkel zieht, Pa bis α in der horizontalen

Digitized by Google

Grundlinie verlängert, und den ebenfalls verlängerten Schenkel $H^1 a$ durch eine durch α der Verticale parallel gezogene Linie αU^1 in U^1 schneidet, worauf $U^1 W^1$ geometrisch parallel der Perspective der Grenzlinie gezogen wird. a e aber ist die Perspective der Schnittlinie der schiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene.

Die Perspective des Verschwindungspunktes für Linien, welche, wie A Q, normal zu der gegebenen schiefen Ebene sind, ist, weil solche Linien an sich geometrisch parallel der Verticalebene sind, der in der Verticale liegende Schnittpunkt H^2 des zu dem Parallelstrahl $O^\circ H^1$ normalen Parallelstrahles $O^\circ H^2$ mit der Bildebene. Zu demselben Punkte gelangt man, wenn man D^1 als herabgeschlagenen Gesichtspunkt für die Verticale ansieht, an $H^1 D^1$ in D^1 den rechten Winkel anträgt und dadurch die Verticale in H^2 schneidet.

Die Perspective der Grenzlinie für Ebenen, welche zu der gegebenen schiefen Ebene normal und deren Schnittlinien mit der Grundebene parallel der Schnittlinie A E sind, muß nach dem Constructionsverfahren, welches zu der Grenzlinie $\Delta\Delta^1$ führte, eine mit dieser parallele, durch H^2 gezogene Linie $\delta\,\delta^1$ sein. H^2 ist darin der Hauptpunkt, $H^2 H^1$ dazu die Verticale, $H^2 O^\circ$ (gleich $H^2 D^1$) ist die Distanz, δ und δ^1 sind die Distanzpunkte, O^2 der herabgeschlagene Gesichtspunkt. Die Grundlinie zu der zu A R C E normalen Ebene, die insbesondere durch die Schnittlinie A E geht, ist die Linie $U^2 W^2$, und wird diese wie die Grundlinie $U^1 W^1$ gefunden.

In Beziehung auf das in §. 292 Gesagte sind in der Figur die dort erwähnten Parallelebenen bildlich veranschaulicht.

§. 298. Ist nun auf der Constructionsfläche in Fig. 81 (Taf. 14) $D D^1$ der Horizont, P O die Distanz, die Horizontale durch p die horizontale Grundlinie, so findet man die Perspective der Grenzlinie der im vorhergehenden Paragraphen behandelten, sich um 32° über die Grundebene erhebenden, hier aber unbegrenzt gedachten schiefen Ebene, wenn man an den Horizont in D den Winkel von 32° anträgt, die Verticale in H^1 schneidet und durch diesen Punkt eine dem Horizonte parallele Linie zieht. Der Hauptpunkt ist dann H^1, die Distanz $H^1 D$, der herabgeschlagene Gesichtspunkt O^1, die Distanzpunkte sind

Digitized by Google

Δ und Δ^1, und $u^1 w^1$ ist, wenn a die Perspective eines Punktes A der Schnittlinie der schiefen Ebene mit der Grundebene ist, die Grundlinie, a e aber die Perspective der Schnittlinie der schiefen Ebene mit der Grundebene.

Schneidet man die Verticale durch den Schenkel D H^2 eines an H^1 D in D angetragenen rechten Winkels in H^2, so ist dies die Perspective des Verschwindungspunktes für die zu der schiefen Ebene normalen Linien, und zugleich der Hauptpunkt in der Perspective δ $\delta/_2$ der Grenzlinie für die Ebenen, welche normal zu der gegebenen schiefen Ebene und dabei parallel der Schnittlinie derselben mit der horizontalen Grundebene sind. H^2 D ist die Distanz dazu, O^2 der herabgeschlagene Gesichtspunkt, δ ein Distanzpunkt, $\delta/_2$ ein Punkt der halben Distanz; $u^2 w^2$ ist die Grundlinie derjenigen Ebene, welche normal zu der gegebenen ist und dabei die horizontale Grundebene ebenfalls in A E schneidet.

§. 299. Da die Anwendung der so ermittelten Hülfslinien und -Punkte dieselbe wie bei den Constructionen horizontaler Ebenen ist, so würde, wenn die Perspective eines auf der, in den vorhergehenden Paragraphen behandelten, schiefen Ebene liegenden Würfels von 4 Fuß (des auf der horizontalen Grundlinie vorliegenden Maßstabes) Kantenlänge construirt werden soll, dessen Eckpunkt K = 1 Fuß links der Verticalebene und 3 Fuß hinter der Bildebene liegt, und von dessen Kanten K L und K F die erstere um 40°, die andere um 50° von der Verticalebene abweicht — die Perspective k zunächst dadurch gefunden, daß man $p^1 \varkappa^1$ gleich 1 Fuß des gegebenen Maßstabes, $\varkappa^1 \varkappa^2$ gleich 3 Fuß macht, und dann eine von $\varkappa^1$ nach H^1 gezogene Linie durch eine andere, von $\varkappa^2$ nach dem Distanzpunkte Δ^1 gezogen, in k schneidet. — Die Perspectiven z und y der Verschwindungspunkte für k l und k f und für die mit diesen parallelen anderen Kanten ergeben sich durch die, unter den oben gegebenen Winkeln von der Verticale abweichenden Parallelstrahlen O^1 z und O^1 y. Die perspectivischen Längen von k l und k f werden bestimmt, wenn man k φ durch Linien, nach H^1 gezogen, perspectivisch gleich $\varkappa^1 \varkappa^3$, dann k λ geometrisch gleich k φ macht, und darauf diese Längen vermittelst der entsprechenden Theilpunkte t_z und t_y in k l und k f perspectivisch überträgt. — Die zu der

Digitized by Google

gegebenen schiefen Ebene normalen Würfelkanten sind nach H^2 gerichtet; ihre perspectivische Länge wird, wie z. B. die von k v, durch eine Linie, vom Distanzpunkte δ durch φ bis v gezogen, bestimmt u. s. w.

§. 300. Aus der in §. 283 enthaltenen Regel, daß die Grenzlinien-Perspective einer schiefen Ebene durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte zweier ihr angehörigen, zu einander rechtwinkligen Linien construirt wird, von denen die eine die Schnittlinie der schiefen Ebene mit der Grundebene, die andere der Winkelschenkel ist, dessen Neigung zur Grundebene die Neigung der schiefen Ebene bezeichnet, kann gefolgert werden, daß eine Linie, durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte zweier zu einander rechtwinkligen Linien gezogen, die Grenzlinien-Perspective der Ebene ist, in welcher die beiden Linien liegen, und ist hieraus ferner zu folgern, welche drei Linien in der eben ausgeführten Construction die Grenzlinien-Perspectiven zu den drei Paaren ebener Flächen des Würfels sind:

Von der Fläche m v i s und der ihr parallelen andern Fläche verschwinden je zwei Seiten in y, die je zwei anderen, zu jenen rechtwinkligen, in z, während eine Linie durch y und z, der Construction gemäß, die Grenzlinien-Perspective zu jenen Flächen ist. — Von der Fläche k v i l und der ihr parallelen andern Fläche verschwinden zwei Seiten in z, die zwei anderen, zu jenen normalen, in H^2; es muß deshalb die Linie H^2 z die Grenzlinien-Perspective zu diesem Flächenpaare, und aus demselben Grunde eine Linie, durch H^2 und y gezogen, die Grenzlinien-Perspective zu dem dritten Flächenpaare sein. — Die Grenzlinien-Perspective $\delta\,\delta_{/2}$ kann als solche für den Würfel nicht in Betracht kommen, da keine von dessen Kanten parallel der Schnittlinie A E der gegebenen schiefen Ebene mit der Grundebene ist; doch sind ihre Distanzpunkte zur Bestimmung der perspectivischen Längen der in H^2 verschwindenden Kanten brauchbar. — Dem Obigen nach ist auch in Fig. 79 eine durch z, der gedrehten Verticale parallel gezogene Linie die Grenzlinien-Perspective zu der Würfelfläche k v i l, während eine ähnliche Linie durch y diese Beziehung zu der Würfelfläche k v m f hat.

Wie, um etwa Kreisperspectiven innerhalb der doppelt-schiefen

Digitized by Google

Flächen des Würfels construiren zu können, die Hauptpunkte, die Distanzpunkte u. s. w. zu Grenzlinien wie $H^2 z$ und $H^2 y$ gefunden werden, ist aus §. 307 zu ersehen.

c) Doppelt-schiefe Ebenen.

§. 301. Soll die Perspective der Grenzlinie einer der in §. 281 unter d) angeführten Ebenen, z. B. der in Fig. 82 (Taf. 14) begrenzt veranschaulichten Ebene A R C E construirt werden — deren Lage beschrieben wird durch die Richtung ihrer um den 40° großen Winkel E A S von der Verticalebene abweichenden, an sich horizontalen Schnittlinie A E mit der Grundebene, und durch die 46° betragende Neigung des Winkelschenkels A R zu dem in der horizontalen Grundebene liegenden Winkelschenkel A G, der selbst um einen rechten Winkel von A E und deshalb um 50° von der Verticalebene abweicht — so ist wieder die Grenzlinien-Perspective dieser schiefen Ebene durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte der beiden Linien A E und A R zu ziehen. Es fällt davon zunächst die durch den Parallelstrahl O°ε bestimmbare Perspective ε des Verschwindungspunktes der Linie A E in den Horizont. Die Linie A R kann als eine der in den §§. 287 und 289 behandelten und zwar als eine solche angesehen werden, welche einer zur Schnittlinie A E normalen lothrecht-schiefen Ebene (der Ebene des Winkels R A G) angehört und sich über die derselben Ebene angehörigen horizontalen Linien, deren eine A G ist, um den Winkel von 46° erhebt. Trägt man deshalb an P O° in O° den 50° großen Abweichungswinkel dieser lothrecht-schiefen Ebene von der Verticalebene, so schneidet man den Horizont in γ; zieht man durch γ eine lothrechte Linie, so ist diese die Grenzlinien-Perspective der Ebene des Winkels R A G, und trägt man darauf an γO° in O° den Winkel von 46°, so schneidet man jene in ϱ, der Perspective des Verschwindungspunktes der Linie A R. Auf der Bildfläche (s. auch Fig. 83) selbst wird dies nach den §§. 75 und 287 dadurch ausgeführt, daß man an P O in O den Winkel P Oγ von 50° anträgt, durch den Schnittpunkt γ eine lothrechte Linie zieht, γO um γ in den Horizont in $\gamma\omega$ überträgt, an $\gamma\omega$ in ω den Winkel von 46° anträgt, und dadurch jene Loth-

Digitized by Google

rechte in ϱ schneidet. — Eine Linie, durch ϱ und ε gezogen, ist hiernach die Grenzlinien-Perspective der gegebenen schiefen Ebene. Die zur Bestimmung des Hauptpunktes in ihr aus dem Gesichtspunkte O° auf sie zu fällende Normale muß offenbar in einer zur Bildebene und zu ϱ ε normalen und zugleich durch O° und P gehenden Ebene, der schiefen Verticalebene, liegen. Zieht man deshalb durch P eine normale Linie (die schiefe Verticale) zu ϱ ε, wodurch diese in Π^1 geschnitten wird, und darauf $H^1 O°$, so ist diese die vorerwähnte Normale, ihr Fußpunkt H^1 ist der Hauptpunkt, und $H^1 O°$ bezeichnet die Distanz. Um aber die geometrische Länge der letztern festzustellen, stellt man sie geometrisch in $H^1 o$ dadurch dar, daß man das Dreieck $H^1 P O°$ um $H^1 P$ aus dem Raum in die Bildebene, in $H^1 P o$ herabschlägt, und zu dem Zwecke hier, weil Winkel $H^1 P O°$ unzweifelhaft ein rechter ist, an $H^1 P$ in P den rechten Winkel $H^1 P o$ anträgt, P o geometrisch gleich $P O°$ macht und die Linie $H^1 o$ zieht. Macht man in der schiefen Verticale darauf $H^1 O^1$ gleich $H^1 o$, so ist O^1 der herabgeschlagene Gesichtspunkt, und macht man $H^1 \Delta$ in der Grenzlinien-Perspective gleich $H^1 o$, so ist Δ ein Distanzpunkt.

§. 302. Will man den Neigungswinkel der schiefen Ebene zur Bildebene ermitteln, so ist zu berücksichtigen, daß derselbe offenbar in einer zur Schnittlinie beider Ebenen (zur schiefen Grundlinie) normalen Ebene liegt. Eine derartige Ebene ist die schiefe Verticalebene; und nimmt man durch O° innerhalb ihrer eine der Bildebene parallele, also eine mit $H^1 P$ parallele Linie an, so bildet diese bei O° mit der der schiefen Ebene parallelen und auch innerhalb der Verticalebene liegenden Linie $O° H^1$ den fraglichen Winkel. Da aber dieser wie ein Wechselwinkel zu Winkel $O° H^1 P$ liegt und demselben deshalb gleich ist, und letzterer wieder, der vorangegangenen Construction gemäß, in dem Winkel $P H^1 o$ des gleichnamigen Dreiecks geometrisch dargestellt ist, so liegt in $P H^1 o$ der gesuchte Neigungswinkel der schiefen Ebene zur Bildebene schon vor. Einer ähnlichen Ueberlegung zufolge ist Winkel $H^1 o P$ als der innerhalb der schiefen Verticalebene liegende Neigungswinkel der schiefen Ebene zur horizontalen Grundebene anzusehen.

Digitized by Google

In Fig. 82 ergiebt der Schnittpunkt U der verlängerten Schnittlinie E A mit der Bildebene einen Punkt der, übrigens der Grenzlinien-Perspective parallel zu ziehenden, Grundlinie $p^1 w^1$. Auf der Constructionsfläche, Fig. 83 (Taf. 14), findet man, wenn x die Perspective eines beliebigen Punktes X der Schnittlinie A E ist, den Punkt u ebenfalls, wenn man von ε durch x die Perspective der unendlich lang aufgefaßten Schnittlinie A E bis zur horizontalen Grundlinie zieht; oder einen andern Punkt w^1 der schiefen Grundlinie dadurch, daß man von P durch x bis w in der horizontalen Grundlinie zieht, und eine darauf von H^1 durch x gezogene Linie durch eine andere, durch w parallel der schiefen Verticale gezogene in w^1 schneidet. §. 303.

Die Perspective H^2 des Verschwindungspunktes von Linien, welche normal zu der gegebenen schiefen Ebene sind, kann man auf zweierlei Art bestimmen:

1) sind diese Linien offenbar parallel der lothrechten Ebene des Winkels R A G in Fig. 82, dabei unter einem rechten Winkel zu dem schiefen Schenkel A R, und unter 44° zu dem horizontalen Schenkel A G geneigt. Zieht man deshalb in Fig. 83 durch ϱ oder γ die lothrechte Grenzlinien-Perspective für jene lothrechte Winkelebene, worin γ der Hauptpunkt und wozu ω der herabgeschlagene Gesichtspunkt ist, und trägt dann an ω ϱ (den Parallelstrahl zu A R) in ω einen rechten Winkel, oder an ω γ (den Parallelstrahl zu A G) in ω einen 44° großen Winkel, so schneidet man die lothrechte Grenzlinien-Perspective in H^2, der Perspective des Verschwindungspunktes der gedachten Linien;

2) sind diese Linien parallel der schiefen Verticalebene und rechtwinklig zu dem der schiefen Ebene parallelen Strahl $O° H^1$ in Fig. 82. Es muß deshalb ihr durch O° rechtwinklig zu $O° H^1$ zu ziehender Parallelstrahl die Bildebene in der schiefen Verticale schneiden. Sieht man demnach in Fig. 83 die schiefe Verticale als Grenzlinien-Perspective an, worin P der Hauptpunkt und wozu o der herabgeschlagene Gesichtspunkt ist, und trägt an $H^1 o$ (gleich $O° H^1$ in Fig. 82) in o den rechten Winkel an, so schneidet man die schiefe Verticale ebenfalls in H^2.

Digitized by Google

Zieht man durch H^2 eine der $\varrho\,\measuredangle$ parallele Linie $H^2\,\delta$, so ist diese die Grenzlinien-Perspective von Ebenen, welche normal zu der gegebenen schiefen Ebene und zugleich normal zu der schiefen Verticalebene (d. i. parallel der schiefen Grundlinie) sind. H^2 ist darin der Hauptpunkt, $H^2\,o$ (gleich H^2O^2, gleich $H^2\delta$) dazu die Distanz, O^2 der herabgeschlagene Gesichtspunkt, δ ein Distanzpunkt, und $p^2\,w^2$ die schiefe Grundlinie derjenigen von diesen Ebenen, welche zugleich durch den vorgedachten Punkt X der Schnittlinie AE geht. Selbstverständlich kann auch $p^1\,w^1$ die Grundlinie einer dieser Ebenen sein; und zwar ist sie es für diejenige zu ARCE normale Ebene, welche in $p^1\,w^1$ die Bildebene schneidet. —

§. 304. Die Constructionen der Perspectiven von doppelt-schiefen Objecten, oder solchen, die in Beziehung zu doppelt-schiefen Ebenen gegeben sind, werden ebenfalls nach den Regeln ausgeführt, welche für die Constructionen von Objecten gelten, die in Beziehung zu horizontalen Ebenen gegeben sind.

In Fig. 84 (Taf. 15) liegen die Perspectiven zweier Würfel vor, die auf der in dem vorhergehenden Paragraphen behandelten doppelt-schiefen Ebene — deren Grenzlinien-Perspective $\varrho\,\varepsilon$, deren Grundlinie 1. 4, und deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene $u\,\varepsilon$ ist — liegend gegeben sind, und deren Kantenlängen den auf der schiefen Grundlinie geometrisch gegebenen Maßen 1. 2 und 3. 4 gleich sind. Von den Seiten der in der schiefen Ebene selbst liegenden Fläche des einen Würfels sind zwei, a f und b c, der Bildebene, d. i. der schiefen Grundlinie parallel; die beiden anderen, a b und f c, verschwinden deshalb in H^1. Die perspectivische Länge jener wird durch Linien, von 1 und 2 nach H^1 gezogen, die perspectivische Länge von f c durch eine von a nach dem Distanzpunkte $\measuredangle$ gezogene Linie bestimmt. Da die aufgerichteten Kanten normal zur schiefen Ebene sind, so verschwinden ihre Perspectiven in H^2; ihre perspectivische Länge, z. B. die von f l wird, wenn man den Punkt $\delta/_2$ der halben Distanz anwenden will, dadurch bestimmt, daß man auch f a in λ halbirt, und f l durch eine von $\delta/_2$ durch λ gezogene Linie in l abschneidet u. s. w.

Digitized by Google

Von den Seiten der in der schiefen Ebene selbst liegenden §. 305.
Fläche des andern Würfels, welcher zum Theil unter der horizontalen Grundebene liegt, sind zwei, h w und v i, der Schnittlinie u ε parallel und verschwinden in ε; die beiden anderen Seiten v h und i w verschwinden deshalb in ϱ. Ihre perspectivischen Längen werden durch die Theilpunkte, für letztere Seiten durch tε, für jene durch tϱ bestimmt, nachdem für einen der Eckpunkte des Würfels, etwa für h, die seinem perspectivischen Ort entsprechende Kantenlänge in hφ dadurch ermittelt worden, daß man entweder eine durch h gezogene, der schiefen Grundlinie parallele Linie hφ durch Linien, von 3 und 4 nach ε — für Linien, welche der Grundlinie parallel sind, kann jeder Punkt der Grenzlinien-Perspective als Theilpunkt benutzt werden, analog §. 91 — gezogen, perspectivisch gleich 3. 4 macht; oder φh bis in die Fläche des andern Würfels verlängert und das dadurch hierin abgetheilte Maß 5. 6 geometrisch in hφ überträgt. Ist übrigens erst die perspectivische Länge h v festgestellt, so kann man w in hε durch eine Linie, von v nach dem Diagonalpunkte *dg* gezogen, abschneiden. Die aufgerichteten Kanten verschwinden ebenfalls in H^2. Ihre perspectivische Länge kann wieder durch den Punkt $\delta/_2$ der halben Distanz abgetheilt werden. Nachdem man, um z. B. die Länge von h g zu bestimmen, hφ in β halbirt hat, zieht man von $\delta/_2$ durch β bis g u. s. w.

Faßt man nun die Richtungen der Seiten sämmtlicher Würfel- §. 306.
flächen ins Auge, so ergiebt sich, daß aus dem schon in §. 300 angeführten Grunde

für die Flächen f a b c, h v i w und die ihnen parallelen anderen Flächen: ϱε die Grenzlinien-Perspective ist, ferner

für f l d c und die ihr parallele Fläche: $H^1 H^2$,

für f a k l und die ihr parallele Fläche: $H^2 \delta/_2$,

für h v m g und die ihr parallele Fläche: ϱH^2, endlich

für h g n w und die ihr parallele Fläche: εH^2

die Grenzlinien-Perspective ist.

Soll in irgendeiner dieser Grenzlinien-Perspectiven, z. B. in §. 307.
εH^2, der Hauptpunkt, dazu die Distanz, der herabgeschlagene Gesichtspunkt und die Grundlinie bestimmt werden, so wird ver-

Digitized by Google

fahren, wie dies in Bezug auf die Ebene, zu welcher $\varrho\,\varepsilon$ die Grenzlinien-Perspective ist, geschah. Eine von P auf εH^2 gefällte Normale, welche selbst die entsprechende schiefe Verticale ist, ergiebt nämlich in H^3 den Hauptpunkt; zieht man $P\,o^3$ parallel εH^2 und macht sie geometrisch gleich P O (der ursprünglichen Distanz), und zieht dann $H^3\,o^3$, so ist diese die Distanz, die, in die schiefe Verticale $H^3\,O^3$ übertragen, hier in O^3 den herabgeschlagenen Gesichtspunkt ergiebt. $H^3\,O^3$ verlängert geht durch den Punkt ϱ, der Perspective des Verschwindungspunktes für die Linien, welche normal zu den Ebenen, wie h g n w, die εH^2 als Grenzlinien-Perspective haben, sind. Die Grundlinie aber der doppelt-schiefen Ebene, wovon h g n w ein Stück ist, ist die durch Punkt 3 parallel εH^2 gezogene Linie 3. 8; denn in dem Punkte 3 stößt die verlängerte Schnittlinie w h der Würfelfläche mit der gegebenen schiefen Ebene, in der Grundlinie der letztern, an die Bildebene. Ermittelt man, zur Probe, nach den bekannten Regeln, im Punkte τ der Grenzlinien-Perspective εH^2 den Theilpunkt für die in ε verschwindende Linie h w, und zieht von τ Linien durch h und w, so schneiden diese auf der neuen Grundlinie in den Punkten 7 und 8 ein den Maßen 1. 2 und 3. 4 geometrisch gleiches Maß ab.

Da ϱ die Perspective des Verschwindungspunktes für Linien, wie m g und h v, ist, die zu der schiefen Fläche h g n w normal sind, so könnte man ihn als einen Hauptpunkt auffassen, durch ihn eine der Linie εH^2 parallele Grenzlinien-Perspective ziehen, in dieser einen Distanzpunkt bestimmen und damit die Richtigkeit der perspectivischen Längen m g und v h nachmessen u. s. w. Ja, man hätte die ganze Perspective des Würfels, wenn man diesen als mit seiner Fläche h g n w an der doppelt-schiefen Ebene, deren Grenzlinien-Perspective εH^2 und deren Grundlinie 3. 8 ist, haftend ansieht, von der letztgenannten Grundlinie ausgehend construiren können.

§. 308. Es ist zu beachten, wie die letztconstruirte schiefe Verticale $H^3\,\varrho$ zu dem Punkte ϱ zurückgeführt hat, vermittelst dessen die erste Grenzlinien-Perspective $\varrho\,\varepsilon$ construirt worden, und wie hier für die dreierlei zu einander normalen ebenen Würfelflächen h v i w, h g m v und h g n w die Seiten eines Dreiecks $\varrho\,H^2\,\varepsilon$ als Grenzlinien-

Digitized by Google

Perspectiven dienen. Normale Linien, aus den Eckpunkten dieses Dreiecks je auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt, ergeben hier die Hauptpunkte und sind selbst, stets durch den ursprünglichen Hauptpunkt P gehend, die schiefen Verticalen.

Faßt man schließlich die verschiedenen Würfelflächen, die ihnen §. 309.
entsprechenden Grenzlinien-Perspectiven, die Richtungen der Perspectiven der Würfelkanten, die doch immer die Schnittlinien zweier verschiedenen ebenen Flächen sind, und die Linien $u\varepsilon$ und 3ε selbst ins Auge, so wird man die Richtigkeit der für weiter unten folgende Constructionen hier nothwendig hervorzuhebenden Regel zugeben, daß die Perspective der Schnittlinie zweier verschiedenen ebenen Flächen nach dem Schnittpunkte der den beiden Flächen entsprechenden Grenzlinien-Perspectiven gerichtet ist.

Nachdem schon in §. 296 die Construction der Perspective §. 310.
eines in einer schiefen Ebene liegenden Kreises gezeigt worden, bedarf es hier kaum eines wiederholten Hinweises auf das in §. 219 empfohlene Verfahren, die Perspective eines Kreises vermittelst der Perspective desjenigen der ihn einschließenden Quadrate zu construiren, dessen eines Seitenpaar parallel der Bildebene (d. i. der Grundlinie) ist und dessen anderes Seitenpaar im Hauptpunkte, natürlich der Grenzlinien-Perspective derjenigen Ebene verschwindet, welcher der Kreis angehört. Daß man nach Umständen auch andere einschließenden Quadrate benutzen kann, zeigt das Beispiel 27, §. 318.

Nachdem hiermit die wesentlichsten Erläuterungen für die Be- §. 311.
handlung der schiefen Ebenen gegeben worden, darf bei der nunmehrigen Wiederaufnahme der Abkürzung der Ausdrücke: „Perspective der Grenzlinie“ und „Perspective des Verschwindungspunktes“ in: „Grenzlinie“ und „Verschwindungspunkt“ ein Mißverstehen nicht mehr gefürchtet werden.

Digitized by Google

Elftes Kapitel.

Beispiele.

Beispiel 26.

§. 312. **Aufgabe.** Es sollen die Verschwindungspunkte der drei Systeme von schiefen Linien, welche die Kanten des im Beispiele 15, §. 196, behandelten **umgestürzten Doppelkreuzes** bilden, und durch sie die Grenzlinien der dreierlei Arten von ebenen Flächen construirt werden, welche das Kreuz begrenzen.

§. 313. **Ausführung.** Die zunächst wie R B (s. Fig. 38, Taf. 5) gerichteten Kanten des Kreuzes sind, wie alle anderen Kanten desselben, der Construction der Grund- und Aufrißprojection nach, Linien, welche sich über die horizontale Grundebene um $35\frac{1}{4}°$ (genau 35° 15′ 52″) erheben und dabei lothrecht-schiefen Ebenen angehören, die dem Grundrisse nach von der Verticalebene um 60° abweichen. Zieht man deshalb in Fig. 39 (Taf. 5) durch den rechts außerhalb der Construction liegenden Verschwindungspunkt z für horizontale, um 60° von der Verticalebene abweichende Linien eine lothrechte Linie, überträgt z O um z in den Horizont in z tz, trägt an den Horizont oberhalb in tz den Winkel von $35\frac{1}{4}°$ und schneidet dadurch die durch z Lothrechte im Punkte z^1, so ist dieser der Verschwindungspunkt für die Linie R B und alle ihr parallelen Linien. — Ganz wie R B, nur nach der andern Seite der Verticalebene ist die Kante U V gerichtet und wird der Verschwindungspunkt y^1 für sie und alle ihr parallelen Kanten wie der Punkt z^1 gefunden. — Die Kante J H neigt sich, wie die ihr parallelen Kanten, innerhalb einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene um $35\frac{1}{4}°$ unter die horizontale Grundebene. Trägt man deshalb an den Horizont in D^1 nach unten den Winkel von $35\frac{1}{4}°$ und schneidet dadurch die Verticale im Punkte x, so ist dieser der Verschwindungspunkt für J H und alle ihr parallelen Kanten. — Verbindet man hiernach die Verschwindungspunkte x, z^1 und y^1 unter einander durch gerade Linien, so sind diese, dem Inhalte des §. 300 nach, die Grenzlinien zu den dreierlei Arten von ebenen Flächen des Kreuzes.

§. 314. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, inwiefern die in §. 197 ausgeführte Construction der Perspective des Kreuzes durch Benutzung der Verschwindungspunkte für die Kanten sich vereinfacht, und ihre Genauigkeit zu sichern ist. Wollte man nun aber die Perspective des Kreuzes ganz nach der für die Behandlung schiefer Ebenen gegebenen Anleitung con-

Digitized by Google

struiren, so müßte man für die dreierlei Arten von Flächen die entsprechenden Grundlinien, und für die Kanten die Theilpunkte ermitteln und verfahren, wie dies in Fig. 39 für die ebene Fläche r q c i k d f b 7. 8 h a r gezeigt ist. Für letztere ist x z^1 die Grenzlinie, H der Hauptpunkt, H (O^1) die schiefe Verticale, O/$_2$^{1} die halbe herabgeschlagene Distanz, tz^1 der Theilpunkt für die in z^1, t$_x$ der Theilpunkt für die in x verschwindenden Linien. Da die genannte Fläche in r an die horizontale Grundlinie stößt, so ist eine durch r parallel der Grenzlinie x z^1 gezogene Linie r 4 die Schnittlinie der Bildebene mit der Fläche, also deren (schiefe) Grundlinie. Trägt man auf dieser in r 1, r 2 und r 4 die aus der Construction der Grundrißprojection entnehmbaren geometrischen Längen der Kantentheile R A, R 7 und R B auf und zieht von den Punkten 1, 2 und 4 nach dem Theilpunkte tz^1 Linien, so schneiden diese auf der in z^1 verschwindenden Kante r b die Punkte a, 7 und b ab, während andererseits eine vom Theilpunkte t$_x$ durch Punkt 1 gezogene Linie die in x verschwindende Kante r q in q abschneidet. Für die der vorigen parallele Kreuzesfläche p^1 s t u wäre eine durch u parallel der Grenzlinie gezogene Linie die Grundlinie, während die Theilpunkte t$_x$ und tz^1 auch für die Seiten dieser Fläche gelten würden, u. s. w. — Die Grundlinie für eine der dritten Art schiefer Flächen des Kreuzes, etwa für die einfach-schiefe, sich um 54^3/$_4$° über die Grundebene erhebende Fläche n q f e, ist eine durch g gezogene, der oben außerhalb des Constructionsraumes liegenden Grenzlinie y^1 z^1 parallele Linie; denn g ist ein Punkt der genannten Fläche, aber auch der Bildebene, da er lothrecht über dem der horizontalen Grundlinie angehörigen Punkte r liegt. Er ist darum ein Punkt der Schnittlinie beider Ebenen, d. h. der Grundlinie der schiefen Fläche n q f e.

Beispiel 27.

Aufgabe. Es ist in Fig. 85 (Taf. 14) in ϱ z^1 die Grenzlinie und in φ n° die Grundlinie einer doppelt-schiefen Ebene von der Richtung, wie sie in §. 301 behandelt worden, gegeben — es soll zunächst die Perspective I eines auf der Ebene liegenden normalen **Cylinders** construirt werden, dessen eine Grundfläche in q die Grundlinie berührt und dessen Achse und Seiten im Punkte y^1 der Grenzlinie verschwinden. Der Durchmesser der Grundflächen sei gleich q n° der Grundlinie, der Halbmesser also gleich q m°, die Länge des Cylinders gleich 2 Grundflächen-Durchmessern, d. i. gleich q φ. Hernach ist die Construction der Perspectiven II und III von **Cylindern** §. 315.

Digitized by Google

zu zeigen, welche auf Ebenen liegen, die der hier gegebenen parallel sind.

§. 316. **Ausführung.** Schneidet man zunächst eine Linie, von q nach y^1 gezogen, durch eine andere, vom Theilpunkte ty^1 nach φ gezogen, in q^1, so ist $q\,q^1$ die Perspective der Seite, in welcher der Cylinder die schiefe Ebene berührt, und zieht man von H^2 Linien durch q und q^1 und schneidet $H^2\,q$ durch Linien, vom Distanzpunkte δ^2 durch n° und m° gezogen, in n und m, so ist $q\,n$ die Perspective des zur schiefen Ebene normalen Durchmessers der vordern Grundfläche, und m darin die des Mittelpunktes. Linien, von n und m nach y^1 gezogen, ergeben auf der Linie $H^2\,q^1$ in $q^1\,n^1$ die entsprechende perspectivische Durchmesserlänge der andern Grundfläche und in m^1 deren Mittelpunkt. — Wenn Achse und Seiten des Cylinders in y^1 verschwinden, so muß für die zur Achse normalen Grundflächen eine Linie $z^1\,H^2$ die Grenzlinie sein, welche durch den Punkt H^2 und durch den dem Punkte y^1 correspondirenden Punkt z^1 geht. In dieser Grenzlinie ist H^3 der Hauptpunkt, δ^3 und δ^3 sind Distanzpunkte; eine Linie $k\,k^1$, parallel der Grenzlinie gezogen, ist Grundlinie für die vordere Cylinder-Grundfläche, weil sie durch Punkt q geht; eine ebensolche Linie, durch q^1 gezogen, ist Grundlinie für die andere Grundfläche. — Um die Perspective der vordern Grundfläche zu construiren, kann nun die Perspective desjenigen der sie einschließenden Quadrate benutzt werden, dessen eines Seitenpaar in H^3 verschwindet und dessen anderes parallel der Grenzlinie $z^1\,H^2$ ist. Um dazu das für den perspectivischen Ort m geltende Durchmessermaß $f\,g$ zu ermitteln, zieht man von H^3 nach m, schneidet dadurch die Grundlinie $k\,k^1$ in i, macht $i\,k$ und $i\,k^1$ beide geometrisch gleich $q\,m^\circ$, und schneidet dann eine durch m parallel der Grenzlinie $H^2\,z^1$ gezogene Linie durch andere, von H^3 durch k und k^1 gezogen, in f und g. Schneidet man die letztgezogenen Linien noch durch andere, von δ^3 und δ^3 durch m gezogen, so kann durch die Schnittpunkte nunmehr die Perspective des in Rede stehenden Quadrates gezogen werden. Die Seiten des perspectivischen Quadrates sind zunächst selbst die Tangenten an 4 Punkten der Perspective der Grundfläche; die in den Diagonalen liegenden anderen 4 Punkte derselben werden, wie in allen bisherigen Constructionen, durch die dem Halbmesser $m\,f$ oder $m\,g$ entsprechende Abscissenlänge ermittelt; ein 9. und ein 10. Punkt sind die schon vorhandenen Punkte q und n selbst, zu denen Linien, von z^1 durch sie gezogen, die Tangenten sind. — Die Perspective der andern Grundfläche ist in der Figur durch die Perspective eines solchen einschließenden Quadrates construirt, dessen eines Seitenpaar in z^1, und dessen anderes Seitenpaar in H^2 verschwindet. Es ist dort zunächst auf einer

Digitized by Google

durch q^1 der Grundlinie $\varphi\, n^\circ$ parallelen Linie das Maß $q^1\,\mu$ durch Linien, von q und m° nach y^1 gezogen, bestimmt, und dieses Maß nebst der ihm entsprechenden Abscissenlänge durch Linien, nach tz^1, dem Theilpunkte für die in z^1 verschwindenden Linien, gezogen, perspectivisch in die Linie $q^1 h$ übertragen. Eine Linie, von h durch m^1 gezogen, schneidet auf der von z^1 durch n^1 gezogenen Linie einen Punkt ab, durch dessen Benutzung die Perspective des einschließenden Quadrates vollendet werden kann.

§. 317. Der Figur sind die Perspectiven zweier anderen Cylinder II und III beigefügt, deren ersterer, von beliebigem Durchmesser, auf einer der schiefen Ebene, worauf Cylinder I liegt, parallelen Ebene liegend angenommen ist. Da seine Achse und Seiten wie die Würfelkanten l d und a b in Fig. 84 nach H^1 gerichtet sind, so sind seine Grundflächen Ebenen wie dort die Würfelfläche l k a f, und haben deshalb H^2 (δ^2) als Grenzlinie. Nachdem die beliebig angenommene Durchmesserlänge der Grundflächen auf einer der Grenzlinie H^2 (δ^2) parallelen Linie in v w aufgetragen und die in H^2 verschwindenden Seiten des einschließenden Quadrates, sowie der Durchmesser a b, gezogen worden, werden die letzteren durch eine vom Distanzpunkte δ^2 durch den Mittelpunkt gezogene Diagonale geschnitten und kann die Perspective des einschließenden Quadrates hiernach leicht vollendet werden. Die in den Diagonalen desselben liegenden Punkte der Grundflächen-Perspective werden durch die dem Halbmesser entsprechenden Abscissenlängen construirt. — Die Perspective der andern Grundfläche wird auf gleiche Weise construirt.

§. 318. Der Cylinder III, von dem beliebigen Durchmesser c e, ist ebenfalls als auf einer, der schiefen Ebene, worauf Cylinder I liegt, parallelen Ebene liegend angenommen. Da seine Achse und Seiten parallel der Bildebene (d. i. parallel der Grund- und der Grenzlinie der Ebene, worauf er liegt) sind, wie die Würfelkanten k l und a f in Fig. 84, so haben seine Grundflächen, wie in jener Figur die Würfelfläche f l d c, die schiefe Verticale $H^1 H^2$ als Grenzlinie, in welcher P der Hauptpunkt ist und d^1 und d^2 Distanzpunkte sind. Da der Durchmesser der Grundfläche rechts auf einer der Grund- und der Grenzlinie parallelen Linie in c e vorliegt, so ergiebt sich die Perspective desjenigen einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in P verschwindet, durch Linien, welche aus P durch c und e und durch den Mittelpunkt gezogen, und durch andere, aus d^1 und d^2 durch den Mittelpunkt gezogen, geschnitten werden. — Als ein Beispiel dazu, daß bei der Construction einer Kreisperspective die Wahl unter den einschließenden Quadraten immerhin eine beliebige ist, §. 222, ist hier für die Grundfläche $c^1 e^1$ ein solches gewählt, dessen eines Seitenpaar, wie in der

Digitized by Google

Würfelfläche f l d c in Fig. 84, in H^1, und dessen anderes in dem dazu correspondirenden Punkte H^2 verschwindet. Der Grundflächen-Durchmesser dazu und die dem Halbmesser entsprechenden Abscissenlängen sind auf der zur Grenzlinie $H^1 H^2$ normalen Achse geometrisch auf-, und von da auf den in H^1 verschwindenden Durchmesser perspectivisch übertragen, indem dabei als Theilpunkt einer der in den §§. 102 und 286 erwähnten dritten und vierten Theilpunkte, nämlich Δ, angewandt ist. Wollte man bei der perspectivischen Uebertragung den in der Grenzlinie $H^1 H^2$ liegenden, dem Punkte H^1 entsprechenden Theilpunkt benutzen, so müßte das Durchmessermaß vorher auf eine der Grenzlinie $H^1 H^2$ parallele Linie aufgetragen werden. Linien, von H^2 aus durch die perspectivisch übertragenen Punkte gezogen, ergeben das eine Seitenpaar des einschließenden Quadrates und die ihm parallelen Ordinaten; eine Diagonale, aus dem Diagonalpunkte *dg* der Grenzlinie durch den Mittelpunkt gezogen, ergiebt Punkte, um das andere nach H^1 gerichtete Seitenpaar ziehen zu können u. s. w.

d) Ebenen, welche schief zu schiefen Ebenen sind.

Beispiel 28.

§. 319. **Aufgabe.** In Fig. 86 (Taf. 15) ist (ϱ)z die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeschlagener Gesichtspunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) einer doppelt-schiefen Ebene, deren Grundlinie 1n ist — es soll construirt werden die Perspective einer mit ihrer Seitenfläche S A C an der gegebenen schiefen Ebene haftenden, mit der Spitze S abwärts gerichteten **Pyramide**, deren Seitenflächen (geometrisch von der Länge f n) mit der quadratischen Grundfläche A C G B den Winkel von 60° bilden, wonach der Höhendurchschnitt S E F der Pyramide also ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Halbirungspunkt F der in z verschwindenden Grundflächenkante A C liegt im Punkte f der Grundlinie 1n.

Zu derselben Grenzlinie (ϱ)z ist ferner die Grundlinie u r einer andern, der vorigen parallelen Ebene gegeben — es soll construirt werden die Perspective eines an dieser Ebene mit einer Seite $S^1 F^1$ haftenden, mit der Spitze S^1 aufwärts gerichteten **Kegels**, dessen Seiten (geometrisch von der Länge $f^1 u$) zur kreisförmigen Grundfläche ebenfalls um 60° geneigt sind, wonach der Höhendurchschnitt $S^1 E^1 F^1$ des Kegels gleichfalls ein gleichseitiges Dreieck bildet. Die Kegel-

Digitized by Google

seite S^1F^1 verschwindet im Punkte y, der Punkt F^1 liegt im Punkte f^1 der Grundlinie ur, f^1r (d. i. die Hälfte von f^1u) ist geometrisch der Halbmesser der Grundfläche.

Ausführung. Da die von der Spitze S der Pyramide auf die Grundflächenkante AC gefällte Normale SF mit letzterer einen rechten Winkel bildet und mit ihr in derselben schiefen Ebene liegt, so muß, wenn die Perspective ac in z verschwindet, die Perspective sf in y der gegebenen Grenzlinie verschwinden. — Um die Grenzlinie für die Grundfläche zu finden, ist zu bedenken, daß, wenn der Höhendurchschnitt SEF der Pyramide bei F einen rechten Winkel hätte, ef als eine zur gegebenen schiefen Ebene normale Linie in H^2 verschwinden würde und demnach, da sf in y verschwindet, eine Linie, durch H^2 und y gezogen, die Grenzlinie der Ebene des Höhendurchschnittes sein muß. Um in ihr den Verschwindungspunkt für die der Aufgabe gemäß von sf nur um den Winkel von 60° abweichende Linie ef zu finden, ist, da O^4 der herabgeschlagene Gesichtspunkt zur Grenzlinie yH^2 ist, an den Parallelstrahl O^4y in O^4 der Winkel $yO^4\alpha$ von 60° anzutragen und die Grenzlinie yH^2 dadurch in α, dem Verschwindungspunkte für ef und die ihr parallelen Grundflächenkanten ba und gc, zu schneiden. Ist nun aber α der Verschwindungspunkt für letztere, z der für die zu diesen normal gerichteten Grundflächenkanten bg und ac, so muß eine Linie $z\alpha$ die Grenzlinie (H^5 Hauptpunkt, O^5 herabgeschlagener Gesichtspunkt, $t\alpha$ Theilpunkt für die in α verschwindenden Linien, fd Grundlinie) für die Grundfläche der Pyramide sein. — Die Länge der Perspective fs wird durch eine vom Theilpunkte ty durch n bis s gezogene Linie bestimmt; die der fs perspectivisch gleiche Länge ac wird dadurch bestimmt, daß man auf der Grundlinie ln links und rechts von f die Hälfte von fn geometrisch auf- und durch Linien, nach dem Theilpunkte tz gezogen, in fa und fc perspectivisch überträgt. Die perspectivische Länge von fe findet man, wenn man die Grundlinie fd geometrisch gleich fn macht und vom Theilpunkte $t\alpha$ in der Grenzlinie αz durch d bis e zieht. Für die Vollendung der Perspective der Pyramide bedarf es hiernach keiner weitern Anleitung. §. 320.

Die Grenzlinie für die Grundfläche des Kegels findet man, wenn man diesen wie eine Pyramide behandelt, deren Grundfläche durch das die Kegelbasis einschließende Quadrat $a^1b^1g^1c^1$ gebildet wird. Auch bei der ferneren Construction wird dann wie bei der Pyramide vorher verfahren. Es muß wieder, wenn die Kegelseite f^1s^1 in y verschwindet, die zu ihr rechtwinklige und mit ihr in derselben Ebene liegende Quadratseite a^1c^1 in z verschwinden. Hätte nun der Höhendurchschnitt $S^1E^1F^1$ des Kegels §. 321.

Digitized by Google

bei F einen rechten Winkel, so würde $e^1 f^1$ als eine zur gegebenen schiefen Ebene normale Linie in H^2 verschwinden; es ist danach, da $f^1 s^1$ in y verschwindet, eine durch y und H^2 gezogene Linie die Grenzlinie für die Ebene jenes Höhendurchschnittes. Um in ihr den Verschwindungspunkt v für die der Aufgabe gemäß von $s^1 f^1$ nur um den Winkel von 60° abweichende Linie $e^1 f^1$ zu finden, ist, da O^4 der herabgeschlagene Gesichtspunkt zur Grenzlinie $y H^2$ ist, an den Parallelstrahl $O^4 y$ in O^4 rechts der Winkel $y O^4 \varepsilon^1$ von 60° anzutragen und die Grenzlinie $y H^2$ durch die Rückwärtsverlängerung des angetragenen Schenkels im Punkte v zu schneiden. Und wenn nun v der Verschwindungspunkt für $e^1 f^1$ und die hiermit parallelen Quadratseiten $b^1 a^1$ und $g^1 c^1$ ist, die anderen Quadratseiten $a^1 c^1$ und $b^1 g^1$ und der Durchmesser $h^1 i^1$ aber in z verschwinden, so ist eine Linie, durch v und z gezogen, die Grenzlinie (H^6 Hauptpunkt, O^6 herabgeschlagener Gesichtspunkt, *tv* Theilpunkt für die in v verschwindenden Linien, H^7 Verschwindungspunkt für die zu der Kegelgrundfläche normalen Linien, wie z. B. die Kegelachse; $f^1 d^1$ Grundlinie) für die Kegelgrundfläche. — Die perspectivische Länge $f^1 s^1$ der Kegelseite $F^1 S^1$ wird durch eine vom Theilpunkte *ty* nach u gezogene Linie bestimmt; die perspectivische Länge der halben Quadratseite $f^1 c^1$ (nebst der ihr entsprechenden Abscissenlänge) wird durch eine Linie, vom Theilpunkte *tz* nach r gezogen, festgestellt; ebenso die Länge $f^1 a^1$. Die perspectivische Länge des in v verschwindenden Durchmessers $f^1 c^1$ wird durch eine vom Theilpunkte *tv* durch d^1 gezogene Linie bestimmt, nachdem die Grundlinie $f^1 d^1$ geometrisch gleich $f^1 u$ gemacht worden. Zieht man hiernach noch $b^1 g^1$ durch e^1 nach z, $b^1 a^1$ und $g^1 c^1$ durch a^1 und c^1 nach v, so ist $a^1 b^1 g^1 c^1$ die Perspective eines zur Construction der Kegelbasis geeignet gelegenen, die letztere einschließenden Quadrates. Nachdem hierin die Diagonalen gezogen, dadurch der Mittelpunkt m^1 bestimmt und durch ihn der Durchmesser $h^1 i^1$ gezogen worden, kann unter Benutzung der durch die Abscissenlängen bestimmbaren Punkte die Perspective der kreisförmigen Kegelbasis eingezeichnet werden. Tangenten, aus der Spitze s^1 an diese Kreisperspective gezogen, ergeben die Perspectiven der als Umrisse auftretenden Kegelseiten. Zieht man schließlich, zur Probe der Richtigkeit der Construction, eine Linie vom Mittelpunkte m^1 durch die Kegelspitze s^1, d. h. die Perspective der Achse, so muß dieselbe in H^7 verschwinden.

e) Schnittlinien schiefer Ebenen.

§. 322. **Die Richtigkeit der in §. 309 gegebenen Regel, daß die Perspective der Schnittlinie zweier verschiede-**

nen ebenen Flächen nach dem Schnittpunkte der Grenzlinien-Perspectiven beider Flächen gerichtet ist,

erweist sich außer aus den in demselben Paragraphen hervorgehobenen Beispielen schon aus den ersten Regeln für die Construction horizontaler Linien. Wie schon aus den §§. 69 und 70 hervorgeht, kann jede der horizontalen Grundebene angehörige, also horizontale Linie, welche der Verticalebene parallel ist, als zugleich einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene angehörig angesehen werden, und zwar als Schnittlinie dieser mit der horizontalen Grundebene. P ist der Verschwindungspunkt der Perspective einer solchen Linie; als Schnittpunkt aber der Grenzlinie für horizontale Ebenen (des Horizontes) mit der lothrechten Grenzlinie für alle der Verticalebene parallelen Ebenen (der Verticale) der Verschwindungspunkt für die diesen Ebenen gemeinsamen Linien, ihre Schnittlinien.

Da hiernach für die Construction einer Schnittlinie zwischen §. 323.
zwei ebenen Flächen stets einer ihrer Punkte, nämlich ihr unendlich entfernter Verschwindungspunkt, in dem Schnittpunkte der Grenzlinien beider Flächen vorliegt, so bedarf es, um die Perspective einer solchen Linie ziehen zu können, nur noch je eines zweiten ihrer Punkte. Wie ein solcher überall leicht gefunden wird, werden die nächstfolgenden Beispiele zeigen.

Der Einfachheit wegen sind in diesen Beispielen die Schnittfiguren von unbegrenzten Ebenen mit Prismen vorgeführt. Faßt man die dort vorkommenden lothrecht stehenden Prismen etwa als Bauwerke, Häuser u. dgl., und die schiefen Ebenen etwa als Dammböschungen auf, die Schnittfiguren aber der horizontalen Grundebene mit den auf schiefen Ebenen stehenden Prismen als Schnittfiguren von Wasserebenen mit schief stehenden oder umgestürzten Objecten u. s. w., so ist die praktische Anwendbarkeit des in diesen Beispielen Vorgeführten einleuchtend.

Beispiel 29.

Aufgabe. In Fig. 87 (Taf. 17) sind die Perspectiven I und §. 324.
II zweier auf der horizontalen Grundebene stehenden **Prismen**, und die Perspectiven III und IV zweier anderen **Prismen** gegeben, welche auf einer einfach-schiefen Ebene stehen.

Digitized by Google

Die Schnittlinie MP dieſer Ebene mit der horizontalen Grundebene iſt parallel der Verticalebene, der Neigungswinkel zur Grundebene beträgt 30°, ihre Grenzlinie iſt demnach $y^1 z^1$ (P Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt) — es ſollen die Perſpectiven der Durchſchnittsfiguren conſtruirt werden, welche die ſchiefe Ebene mit den erſteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den ſchief ſtehenden Prismen bildet.

§. 325. **Ausführung.** Denkt man ſich an dem Prisma I die Fläche $a b b^1 a^1$ unbegrenzt groß, ſo ſchneidet ſie die ſchiefe Ebene in einer unendlich langen Linie, von welcher nach §. 323 ein Punkt der Schnittpunkt der Grenzlinie der gegebenen ſchiefen Ebene mit der Grenzlinie der Prismafläche iſt. Da nun von der Perſpective der erſtern in $y^1 z^1$ ein Stück vorliegt, die Perſpective der Grenzlinie der lothrechten, der Bildebene parallelen Prismafläche aber nach §. 79 in unendlicher Entfernung links, rechts, ober- oder unterhalb von P anzunehmen iſt, ſo muß der Schnittpunkt beider Grenzlinien ebenfalls in unendlicher Entfernung liegen, und eine geometriſch parallel der Grenzlinie $y^1 z^1$ gezogene Linie jedenfalls nach ihm gerichtet ſein. Ein anderer Punkt jener unendlich langen (Schnitt-) Linie muß offenbar der leicht conſtruirbare Punkt α, in welchem die verlängert gedachte Prismafläche die Schnittlinie MP ſchneidet, ſein, weil dieſer Punkt der Prismafläche und der ſchiefen Ebene zugleich angehört. Zieht man deshalb durch α eine Linie parallel der Grenzlinie $y^1 z^1$, ſo iſt dieſe die Perſpective jener unendlich langen (Schnitt-) Linie, und das Stück $a^\circ b^\circ$ von ihr das der begrenzt vorliegenden Fläche $a b b^1 a^1$ angehörige. — Die Grenzlinie der Prismafläche $e a a^1 e^1$ iſt die Verticale, der Schnittpunkt dieſer mit $y^1 z^1$ iſt P; da Punkt a° der Prismafläche $e a a^1 e^1$ und zugleich der ſchiefen Ebene angehört, ſo iſt eine von a° nach P gezogene Linie $a^\circ e^\circ$ die Schnittlinie an der Prismafläche $e a a^1 e^1$. — Zieht man noch $e^\circ g^\circ$ und $b^\circ g^\circ$ perſpectiviſch parallel $a^\circ b^\circ$ und $a^\circ e^\circ$, ſo liegt in $a^\circ e^\circ g^\circ b^\circ$ die Durchſchnittsfigur der ſchiefen Ebene mit dem Prisma I vor.

§. 326. Für das Prisma II iſt für die Fläche über 1 m eine Lothrechte durch z die Grenzlinie und Punkt z^1 der Schnittpunkt derſelben mit der ſchiefen Grenzlinie. Die Verlängerung der Fläche trifft die Schnittlinie MP im Punkte λ; es iſt daher das Stück $1^\circ m^\circ$ einer von λ nach z^1 gezogenen Linie die Schnittlinie an dieſer Fläche. — Die der vorigen parallele Fläche über n k ſchneidet die Linie MP im Punkte d; es iſt daher das Stück $d k^\circ$ einer von d nach z^1 gezogenen Linie die Schnittlinie an dieſer Fläche. —

Digitized by Google

Für die Fläche über l u ist eine Lothrechte durch y die Grenzlinie, und Punkt y^1 der Schnittpunkt derselben mit $y^1 z^1$. Die Fläche schneidet die Linie M P im Punkte c; es ist deshalb die nach y^1 gerichtete Linie $1^\circ c$ die Schnittlinie an dieser Fläche. — Zieht man noch die mit ihrer Verlängerung durch $\varkappa$ und y^1 gehende Linie $m^\circ k^\circ$, so ist $1^\circ m^\circ k^\circ d c 1^\circ$ die Durchschnittsfigur der schiefen Ebene mit dem Prisma II.

Die Durchschnittsfiguren der beiden schief stehenden Prismen mit der horizontalen Grundebene werden dem Vorhergehenden entsprechend construirt: §. 327.

Das Prisma III betreffend, liegt für die der Bildebene parallele Fläche über q t, wie für die Fläche $a b b^1 a^1$ an dem Prisma I, die Grenzlinie in unendlicher Entfernung außerhalb des Constructionsraumes und ebendaselbst auch deren Schnittpunkt mit der horizontalen Grenzlinie (dem Horizonte). In τ trifft die Verlängerung der Fläche die Schnittlinie M P; es muß daher das Stück $t^\circ q^\circ$ einer dem Horizonte parallel durch τ gezogenen Linie die Schnittlinie an der Fläche über q t sein. — Für die Fläche über t u ist die gedrehte Verticale die Grenzlinie, und P deren Schnittpunkt mit dem Horizonte; eine von t° nach P gezogene Linie $t^\circ u^\circ$ ist deshalb die Schnittlinie an der Fläche.

Für die Flächen über f r und f s an dem Prisma IV sind $x x^1$ und $w w^1$ die Grenzlinien, und daher x^1 und w^1 die Verschwindungspunkte für die durch ϱ und φ zu ziehenden Schnittlinien. §. 328.

Beispiel 30.

Aufgabe. In Fig. 88 (Taf. 14) sind die Perspectiven I und II zweier auf der horizontalen Grundebene stehenden **Prismen**, und die Perspectiven III und IV zweier anderen **Prismen** gegeben, welche auf einer einfach-schiefen Ebene stehen. Die Schnittlinie N M dieser Ebene mit der horizontalen Grundebene, hier zufällig zugleich Grundlinie der schiefen Ebene, ist parallel der Bildebene; ihr Neigungswinkel zur Grundebene beträgt 40°, ihre Grenzlinie ist demnach w x (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) — es sollen die Perspectiven der Durchschnittsfiguren construirt werden, welche die schiefe Ebene mit den ersteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den schief stehenden Prismen bildet. §. 329.

Ausführung. Für die Fläche $a b b^1 a^1$ an dem Prisma I ist die Verticale die Grenzlinie und deren Schnittpunkt H^1 mit der Grenzlinie w x der gegebenen schiefen Ebene der Verschwindungspunkt der zu con- §. 330.

Digitized by Google

struirenden Schnittlinie $a^\circ b^\circ$, deren anderer Punkt α wieder in der Schnittlinie N M liegt. $a^\circ e^\circ$ ist der Grenzlinie w x geometrisch parallel zu ziehen, denn der Schnittpunkt der letztern mit der Grenzlinie der Fläche e a a^1 e^1 liegt, wie diese Grenzlinie selbst, in unendlicher Entfernung.

§. 331. Für die Flächen k l l^1 k^1 und m l l^1 m^1 an dem Prisma II sind y y^1 und z z^1 die Grenzlinien, und deshalb y^1 und z^1 die Verschwindungspunkte der durch λ^1 und λ zu ziehenden Schnittlinien $1^\circ k^\circ$ und $1^\circ m^\circ$.

§. 332. Für die Fläche über q t an dem Prisma III ist die Verticale die Grenzlinie, H^1 der Schnittpunkt dieser mit w x, weshalb eine Linie $t^\circ q^\circ$, von H^1 durch den Punkt τ in der N M gezogen, die Schnittlinie an der Fläche ist. — Für die Fläche q u u^1 q^1 ist h i die Grenzlinie, deren Schnittpunkt mit w x in unendlicher Entfernung liegt, weshalb $u^\circ q^\circ$ durch q° parallel der h i und der w x, d. h. horizontal zu ziehen ist.

§. 333. Das Prisma IV betreffend, sind w H^2 und x H^2 die Grenzlinien für die Flächen über s f und s r, und deren Schnittpunkte w^1 und x^1 mit dem Horizonte die Verschwindungspunkte für die durch φ und ϱ zu ziehenden Schnittlinien $s^\circ f^\circ$ und $s^\circ r^\circ$.

Beispiel 31.

§. 334. **Aufgabe.** In Fig. 89 (Taf. 15) sind die Perspectiven I und II zweier auf der horizontalen Grundebene stehenden **Prismen**, und die Perspectiven III und IV zweier anderen **Prismen** gegeben, welche auf einer doppelt-schiefen Ebene stehen. Die Schnittlinie M z dieser Ebene mit der Grundebene ist schief zur Verticalebene, der Neigungswinkel der Ebene zur Grundebene beträgt 45°, ihre Grenzlinie ist demnach y^1 z (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) — es sollen die Perspectiven der Durchschnittsfiguren construirt werden, welche die schiefe Ebene mit den ersteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den schief stehenden Prismen bildet.

§. 335. **Ausführung.** Für die Fläche über a e an dem Prisma I ist die Verticale die Grenzlinie, p deren Schnittpunkt mit der gegebenen schiefen Grenzlinie und deshalb der Verschwindungspunkt für die durch α^1 zu ziehende Schnittlinie $a^\circ e^\circ$ an der Fläche. — Für die Fläche über a b liegt die Perspective der Grenzlinie und deshalb auch deren Schnittpunkt mit y^1 x in unendlicher Entfernung, weshalb $a^\circ b^\circ$ geometrisch parallel y^1 x zu ziehen ist.

Digitized by Google

Für die Fläche über l m an dem Prisma II ist eine Lothrechte durch y die Grenzlinie, y^1 deren Schnittpunkt mit $y^1 z$ und deshalb der Verschwindungspunkt der durch λ zu ziehenden Schnittlinie $l^\circ m^\circ$. — Für die Fläche über l k ist eine Lothrechte durch z die Grenzlinie, z selbst deren Schnittpunkt mit $y^1 z$ und deshalb der Verschwindungspunkt für $l^\circ k^\circ$. §. 336.

Für die Fläche über q t an dem Prisma III ist H^2 (i) die Grenzlinie, der außerhalb der Figur liegende Punkt i deren Schnittpunkt mit dem Horizonte und der Verschwindungspunkt für die durch τ zu ziehende Schnittlinie $q^\circ t^\circ$. — Für die Fläche über q c und die andere ihr parallele Fläche ist die schiefe Verticale die Grenzlinie, P deren Schnittpunkt mit dem Horizonte, weshalb Linien, von P durch τ^1 und durch q° gezogen, die Schnittlinien an den bezeichneten Flächen sind. γc° ist mit $t^\circ q^\circ$ perspectivisch parallel; $q^\circ e^\circ \gamma \tau^1 t^\circ$ ist die Durchschnittsfigur an dem Prisma III. §. 337.

Für die Fläche über s f an dem Prisma IV ist w H^2 die Grenzlinie, w^1 deren Schnittpunkt mit dem Horizonte und deshalb der Verschwindungspunkt für die durch φ zu ziehende Schnittlinie an dieser Fläche. — Für die Fläche über s r ist x H^2 die Grenzlinie, x^1 deren Schnittpunkt mit dem Horizonte, weshalb eine Linie $r^\circ s^\circ$, von x^1 nach s° gezogen, die Schnittlinie an dieser Fläche ist. §. 338.

Handelt es sich nicht darum, an einer ebenen Fläche eines Körpers die Schnittlinie, sondern nur an einer seiner Kanten den Schnittpunkt mit der schneidenden Ebene zu bestimmen, so kann man — da eine einzelne Linie (Kante) als verschiedenen ebenen Flächen zugehörig angesehen werden kann, wie z. B. jede Prismakante an sich schon zwei Flächen zugleich angehört — eine Kante, wie etwa f f^1 an dem Prisma IV in Fig. 88, behandeln, wie die ihr parallele Kante q q^1 an dem Prisma III derselben Figur, und den Punkt f° ermitteln, wie dort den Punkt q°; indem man nämlich durch eine Linie von f nach H^1 die Schnittlinie N M in φ^1, und durch eine andere Linie von P durch φ^1 die Kante $f f^1$ in f° schneidet. — So kann man den Punkt s° in der Kante $s s^1$ des Prisma IV in Fig. 89 ermitteln, wie den Punkt q° der mit jener parallelen Kante $q q^1$ des Prisma III derselben Figur, indem man nämlich durch eine durch s der Grenzlinie $y^1 x$ parallel gezogene Linie die Schnittlinie M z in σ, und dann die Kante $s s^1$ durch eine von i durch σ gezogene Linie in s° schneidet. Doch findet man s° auch, wie den Punkt t° in der mit $s s^1$ parallelen Kante $t t^1$, wenn man die Schnittlinie M z durch eine Linie von s nach H^1 in σ^1, und darauf die Kante $s s^1$ durch eine Linie, von P durch σ^1 gezogen, schneidet. — So kann man an dem Prisma II (Fig. 89) den Punkt k° auch ermitteln, wenn man k $\varkappa$ parallel dem Horizonte bis $\varkappa$ §. 339.

Digitized by Google

in der Schnittlinie M z, und dann $\varkappa k^{\circ}$ parallel der Grenzlinie $y^1 z$ zieht u. s. w.

§. 340. Um an einem Körper, welcher von krummen Flächen begrenzt ist, die Curve zu construiren, in welcher er von einer schiefen Ebene geschnitten wird, stellt man an ihm zuvörderst mehrere solche Hülfsebenen-Durchschnitte dar, welche leicht zu construiren sind, ermittelt dann die Schnittlinien der hierbei angenommenen Hülfsebenen mit der gegebenen schiefen Ebene, und dadurch in den Grenzen jener Durchschnitte Punkte, durch welche die gesuchte Durchschnittscurve gezeichnet werden kann — entsprechend dem in den Beispielen 19 und 20, für die durch lothrechte Ebenen gebildeten Durchschnittsfiguren, gezeigten Verfahren.

Die Durchschnittscurve einer schiefen Ebene mit einer Kugel kann, wegen der Regelmäßigkeit der Kugelgestalt, auch ohne diesen Umweg construirt werden. S. Beispiel 33.

Beispiel 32.

§. 341. **Aufgabe.** In Fig. 90 (Taf. 15) sind die Perspectiven I und II eines **Cylinders** und eines **Kegels**, die beide auf der horizontalen Grundebene stehen, und die Perspectiven III und IV eines **Cylinders** und eines **Kegels** gegeben, die auf einer doppelt-schiefen Ebene liegen. Die Schnittlinie M ε dieser Ebene mit der horizontalen Grundebene bildet den Winkel von 50° mit der Verticalebene, der Neigungswinkel der schiefen Ebene zur Grundebene beträgt 45°; ihre Grenzlinie ist demnach $d^1 z^1$ (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeschlagener Gesichtspunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) — es sollen die Perspectiven der Durchschnittsfiguren construirt werden, welche die schiefe Ebene mit den Körpern I und II bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den Körpern III und IV bildet.

§. 342. **Ausführung.** Nimmt man, um dem §. 340 gemäß, an dem Cylinder I zunächst einige leicht construirbare Hülfsebenen-Durchschnitte zu construiren, etwa durch die Punkte g und f, welche schon zur Construction der Perspective der Grundfläche dienten, eine (lothrechte, der Bildebene parallele) Hülfsebene an, so schneidet diese die Cylinder-Grundfläche in der Linie g f und den Cylindermantel in den in g und f stehenden Seiten.

Digitized by Google

Von ihrer Schnittlinie aber mit der schiefen Ebene ist der durch ihre Verlängerung bis zur Schnittlinie M ε hierin zu bezeichnende Punkt φ der eine Punkt, und der andere der Schnittpunkt ihrer in unendlicher Entfernung liegenden Grenzlinie mit der Grenzlinie $d^1 z^1$, wonach eine durch φ parallel der $d^1 z^1$ gezogene Linie die Schnittlinie der Hülfsebene mit der schiefen Ebene ist. Deshalb sind aber auch f° und g° in dieser Linie Punkte, in welchen die schiefe Ebene die angenommene Hülfsebene und zugleich die in f und g stehenden Cylinderseiten schneidet. Nimmt man darauf eine andere, durch die zur Construction der Cylinder-Grundfläche gebrauchten Punkte f und d stehende, lothrechte Hülfsebene an, so schneidet diese den Cylinder in seinen in f und d stehenden Seiten; ihre Verlängerung trifft die Schnittlinie M ε im Punkte φ^1; der Schnittpunkt ihrer Grenzlinie D d^1 mit der Grenzlinie $d^1 z^1$ ist d^1; eine Linie, durch φ^1 und d^1 gezogen, ist demnach ihre Schnittlinie mit der schiefen Ebene, und die Punkte f° und d° darin sind Schnittpunkte der schiefen Ebene mit den in f und d stehenden Cylinderseiten. Durch öftere Wiederholung dieses Verfahrens kann man auf der Cylinder-Oberfläche hinreichend viele Punkte construiren, um schließlich durch diese die elliptische Durchschnittsfigur der schiefen Ebene mit dem Cylinder I zeichnen zu können.

Das Verfahren an dem Kegel II ist dasselbe. Eine durch die Con- §. 343.
structionspunkte h und e der Kegelgrundfläche angenommene lothrechte Hülfsebene trifft die Schnittlinie M ε im Punkte γ; eine durch γ parallel mit $d^1 z^1$ gezogene Linie ist ihre Schnittlinie mit der schiefen Ebene, und die in den entsprechenden Kegelseiten liegenden Punkte h° und e° dieser Schnittlinie sind Punkte der Durchschnittsfigur der schiefen Ebene mit dem Kegel, so wie die Punkte i° und c°, welche vermittelst einer durch die Punkte i und c der Kegelgrundfläche lothrecht angenommenen Hülfsebene gefunden sind.

In dem Cylinder III, welcher auf seiner im Punkte y^1 der schiefen §. 341.
Grenzlinie verschwindenden Seite $r^1 r$ liegt, wird die in dieser Seite normal zur schiefen Ebene stehende Ebene des größten Längendurchschnittes $r q q^1 r^1$ (deren Grenzlinie $y^1 H^2$ ist) als Hülfsebene angenommen; es wird dieselbe bis zum Punkte ϱ in der Schnittlinie M ε verlängert, und eine Linie vom Punkte k, in welchem die Grenzlinie $y^1 H^2$ den Horizont schneidet, durch ϱ bis zu den Punkten r° und q° des Längendurchschnittes gezogen, wonach dies Punkte der gesuchten Durchschnittsfigur am Cylinder III sind. Ebenso werden dem Durchschnitte $r q q^1 r^1$ parallele andere Längendurchschnitts-Ebenen und zwar durch solche Punkte angenommen, mittels deren die Grundflächen-Perspectiven construirt worden; z. B. eine durch die Punkte

Digitized by Google

$\mathfrak{H}$ und t. Es wird diese Ebene bis τ in der Schnittlinie M ε verlängert und darauf die durch t liegende Cylinderseite durch eine Linie, von k durch τ gezogen, in t° geschnitten, wonach dies ein neuer Punkt der Durchschnittsfigur ist, u. s. f. Um, wenn Punkt r° nicht schon vorhanden wäre, die Durchschnittslinie p p° an der Grundfläche zu finden, wird die Ebene der letztern bis π in der Schnittlinie M ε fortgesetzt und von π nach Punkt w, in welchem die Grenzlinie $H^2 z^1$ der Grundflächen-Ebene den Horizont schneidet, eine Linie gezogen, wovon alsdann das Stück p p° der Cylinder-Grundfläche angehört.

§. 345. An dem Kegel IV wird die Grundfläche bis M in der Schnittlinie M ε verlängert und von M nach Punkt x, in welchem die Grenzlinie z^1 x der Grundflächenebene den Horizont schneidet, eine Linie gezogen, wovon das Stück u u° die gesuchte Durchschnittslinie der Grundfläche mit der horizontalen Grundebene ist. Construirt man hiernach der Grundfläche parallele Durchschnitte durch den Kegel und verlängert deren Ebenen bis zur Schnittlinie M ε, z. B., wie es mit der Ebene des durch die Punkte n n° gehenden Durchschnittes geschehen ist, bis ν, zieht ν x, und schneidet dadurch den Durchschnitt in n und n°, so sind diese neben u und u° neue Punkte der Durchschnittsfigur der horizontalen Grundebene mit dem Kegel IV. Noch ein Punkt derselben ist s°, in welchem die Seite s^1 s, auf welcher der Kegel liegt, die Schnittlinie M ε schneidet.

Beispiel 33.

§. 346. **Aufgabe a.** In Fig. 91 (Taf. 16) ist die Perspective einer **Kugel** gegeben, deren mit der Bildebene zusammenfallender größter Höhendurchschnitt der Kreis um C ist und deren unterster Pol K um das Stück K p oberhalb der horizontalen Grundebene liegt. Die horizontale Linie durch Punkt S ist die Grundlinie einer **einfach-schiefen**, sich um 37° über die horizontale Grundebene erhebenden Ebene, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Bildebene ist — es soll die Perspective der Schnittfigur dieser Ebene mit der Kugel construirt werden.

§. 347. **Aufgabe b.** In Fig. 92 (Taf. 16) ist dieselbe **Kugel**-Perspective gegeben; die Linie u β ist die Grundlinie einer **doppeltschiefen**, sich um $46\frac{1}{2}^\circ$ über die horizontale Grundebene erhebenden Ebene, deren Schnittlinie mit der Grundebene q ε und deren Grenzlinie demnach $\varrho\,\varepsilon$ (H^1 Hauptpunkt, H^2 Ver-

Digitized by Google

schwindungspunkt für normale Linien) ist — es soll die Perspective der Schnittfigur dieser Ebene mit der Kugel construirt werden.

Ausführung der Aufgabe a. Da die Schnittfigur einer Ebene mit einer Kugel ein Kreis ist, so bedarf es, um hier ihre Perspective construiren zu können, nur der Ermittelung des perspectivischen Ortes ihres Mittelpunktes und der perspectivischen Länge ihres Halbmessers. Die geometrische Länge des letztern liegt in M B oder M A vor, wenn man durch Punkt S, in welchem die schiefe Ebene mit ihrer Grundlinie die in der Bildebene liegende lothrechte Kugelachse L K schneidet, eine Linie R W zieht, welche von der horizontalen Grundlinie um den 37° großen Neigungswinkel der schiefen Ebene abweicht. Ist nun $H^1 \measuredangle$ die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, $\measuredangle$ Distanzpunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) der schiefen Ebene, und man denkt sich den gegebenen Höhendurchschnitt der Kugel um die Achse L K und mit ihm die Linie R W gedreht, bis beide in der Ebene des Neigungswinkels der schiefen Ebene, d. h. hier parallel der Verticalebene sind, so ist eine von H^1 durch S gezogene Linie die unendlich lange Perspective der gedrehten Linie R W. Macht man in ihr S m perspectivisch gleich S M, indem man S M um S μ in die Grundlinie der schiefen Ebene geometrisch überträgt und dann S H^1 durch eine Linie, von μ nach $\measuredangle$ gezogen, im Punkte m schneidet, so ist dieser der perspectivische Ort des Mittelpunktes der Schnittfigur. Da übrigens dieser Punkt offenbar auch in einer zur schiefen Ebene normalen und durch den Kugel-Mittelpunkt C gehenden Linie liegen muß, so kann man ihn auch dadurch in der Linie S H^1 finden, daß man diese durch eine Linie, von C nach H^2 gezogen, in m schneidet. — Macht man nun noch $\mu\beta$ und $\mu\alpha$ geometrisch gleich M B und M A und zieht von β und α Linien nach $\measuredangle$, so schneiden diese auf einer durch m parallel der Grenzlinie gezogenen Linie die perspectivische Länge e f des der Bildebene parallelen Durchmessers der gesuchten Schnittfigur ab, die nun vermittelst der Perspective desjenigen der sie einschließenden Quadrate construirt werden kann, dessen eines Seitenpaar in H^1 verschwindet. Die elliptische Perspective der Schnittfigur muß dabei durch die Punkte g und h gehen, in welchen die Grundlinie der schiefen Ebene den Kreis um C schneidet. §. 348.

Eine nähere Betrachtung der Figur ergiebt, daß der Mittelpunkt m auch als Schnittpunkt einer von M nach dem Distanzpunkte D gezogenen Linie mit der Linie C H^2 zu ermitteln ist; daß man ferner die perspectivische Halbmesserlänge m e auch dadurch bestimmen kann, daß man eine durch m parallel A B gezogene Linie durch eine andere, von B nach D §. 349.

Digitized by Google

gezogen, in ε schneidet, und dann m ε geometrisch in m e überträgt. So auch sind die Punkte a und b der Linie $H^1 S$ in ihr durch Linien, von D durch A und B gezogen, zu bestimmen.

§. 350. **Ausführung der Aufgabe b.** Wie in der vorhergehenden Ausführung wird zunächst der Durchmesser des Kreises, welchen die Schnittfigur der schiefen Ebene mit der Kugel bildet, dadurch in A B geometrisch dargestellt, daß man durch den Punkt S, in welchem die schiefe Ebene mit ihrer Grundlinie die in der Bildebene liegende lothrechte Kugelachse L K schneidet, eine Linie B W zieht, welche mit der horizontalen Grundlinie u W den Winkel von $46\frac{1}{2}°$ bildet. Denkt man sich nun wieder den Kreis um C um die Kugelachse L K, und mit ihm die Linie B W gedreht, bis beide parallel der (lothrechten) Ebene des Neigungswinkels der schiefen Ebene sind, so ist eine von ϱ durch S gezogene Linie ϱ q die unendlich lange Perspective der gedrehten Linie B W; denn ϱH^2 ist die Grenzlinie der Neigungswinkel-Ebene, und die gedrehte Linie B W muß, da sie sowohl der gegebenen schiefen Ebene als der lothrechten Neigungswinkel-Ebene angehört, nach §. 322 nach dem Schnittpunkte ϱ der Grenzlinien beider gerichtet sein. — Macht man nun S m dadurch perspectivisch gleich S M, daß man S M um S in S μ, in die Grundlinie der schiefen Ebene, geometrisch überträgt und dann S ϱ durch eine Linie, von μ nach dem Theilpunkte t_ϱ gezogen, im Punkte m schneidet, so ist dieser der perspectivische Ort des Mittelpunktes der Schnittfigur. Jedoch kann derselbe auch hier in der S ϱ durch eine von C nach H^2 gezogene Linie abgeschnitten werden. Ueberträgt man nun noch M B und M A geometrisch in μ β und μ α und zieht von β und α Linien nach t_ϱ, so schneiden diese auf einer durch m parallel der schiefen Grenzlinie gezogenen Linie die perspectivische Länge i f des der Bildebene parallelen Durchmessers der gesuchten Schnittfigur ab, wonach dieselbe vermittelst der Perspective desjenigen der sie einschließenden Quadrate construirt werden kann, dessen eines Seitenpaar in H^1 verschwindet. g und h sind dabei wieder Punkte der gesuchten Perspective, so wie a und b, welche durch die von dem Theilpunkte t_ϱ durch α und β gezogenen Linien auf ϱ q abgeschnitten werden.

Beispiel 34.

Construction der Perspective der Kugel vermittelst der Perspective des Berührungskreises der Gesichtslinien. (S. §. 237.)

§. 351. **Aufgabe a.** In Fig. 93 (Taf. 17) ist in dem Kreise um den in der Verticale liegenden Punkt k der größte, mit der Bild-

Digitized by Google

ebene zusammenfallende Kreis einer im Grundpunkte p (P Hauptpunkt, O herabgeschlagener Gesichtspunkt) auf der Grundebene ruhenden **Kugel** gegeben — es soll die Perspective der Kugel construirt werden.

Aufgabe b. In Fig. 96 (Taf. 17) ist in dem Kreise um den §. 352.
links der Verticale liegenden Punkt k der größte, mit der Bildebene zusammenfallende Kreis einer im Punkte p^1 (P Hauptpunkt, O herabgeschlagener Gesichtspunkt) der Grundlinie auf der Grundebene ruhenden **Kugel** gegeben — es soll die Perspective der Kugel construirt werden.

Ausführung der Aufgabe a. Wie schon in §. 241 erwähnt, liegt §. 353.
der Berührungskreis des aus dem Auge nach einer Kugel denkbaren Gesichtslinien-Kegels, wenn die Perspective des Kugel-Mittelpunktes nicht mit dem Hauptpunkte zusammenfällt, in einer schiefen Ebene. Stellt man nun die Neigung dieser Ebene und dabei zugleich die perspectivische Länge des Durchmessers des Berührungskreises durch eine geometrische Construction fest, und construirt dann die Perspective des schief liegenden Berührungskreises, so ist diese die Perspective der Kugel selbst.

Die erwähnte geometrische Construction, welche auch in Fig. 93 selbst ausgeführt werden könnte, liegt in Fig. 94 gesondert vor. Hier bedeutet die Linie $t(H^1)$ die Aufrißprojection der Bildebene, Linie R p die der Grundebene, Punkt O die des Gesichtspunktes, der Kreis um K den in einer zur Bildebene normalen Ebene liegenden größten Kreis der Kugel. Zieht man aus dem Gesichtspunkte Tangenten an den Kreis, so berühren sie diesen in den Punkten Q und T, und ist demnach die Sehne Q T der geometrische Durchmesser des Berührungskreises; die Neigung aber der Ebene des letztern zur Grundebene liegt zugleich in dem 51° großen Winkel Q R p vor, dessen eigene Ebene normal zur Bildebene $t(H^1)$ steht, weshalb die Ebene des Berührungskreises eine der in §. 281 unter c) angeführten einfach-schiefen sein muß. Da letztere in Y die Bildebene schneidet, so muß in der Construction ihre Grundlinie durch y gehen. Der Mittelpunkt des Berührungskreises ist N, seine Perspective aber fällt, wie die Gesichtslinie O K ergiebt, mit dem in der Bildebene liegenden Kugel-Mittelpunkte K zusammen. Die perspectivische Länge des Durchmessers des Berührungskreises für den Ort K in der Bildebene müßte, wenn man statt der Profilprojection Q T den wirklichen Durchmesser in seiner eigentlichen, der Bildebene parallelen Richtung, d. h. hier also den zur Papierfläche normalen, durch N gehenden Durchmesser ins Auge faßt, eigentlich auf einer durch K

Digitized by Google

in der Bildebene ihm parallelen Linie ermittelt werden, indem man sich diese durch Gesichtslinien, vom Auge durch die Endpunkte des gedachten Durchmessers gehend, geschnitten denkt. Man kommt aber zu demselben Resultate, wenn man die ebengedachte, durch K in der Bildebene dem Durchmesser parallel gerichtete Linie in Fig. 94 parallel der Profilprojection Q T zieht und auf ihr die gesuchte Länge J L durch die durch Q und T gezogenen Gesichtslinien abschneidet.

In der Construction (Fig. 93) ist nun den vorhergehenden Ermittelungen gemäß (Δ) Δ^1 die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ^1 ein Distanzpunkt) der Ebene des Berührungskreises, die Horizontale durch y (k y gleich K Y) deren Grundlinie, der Kugel-Mittelpunkt k die Perspective des Kreis-Mittelpunktes N. Macht man den perspectivischen Durchmesser i l geometrisch gleich J L, so kann man um ihn die Perspective des Berührungskreises vermittelst der Perspective c f g b desjenigen der einschließenden Quadrate construiren, dessen eines Seitenpaar in H^1 verschwindet. Dabei muß die construirte Ellipse durch die Punkte q und t gehen, die nach Fig. 94 die Perspectiven der Berührungspunkte Q und T sind.

§. 351. Vergleicht man hiermit das in §. 241, Fig. 58 (Taf. 17), gezeigte Verfahren bei der Kugelconstruction, dessen Mitanwendung in der Fig. 93 das die Ellipse einschließende Viereck v w u x ergiebt, so zeigt die Richtung der Seiten v x und w u dieses Vierecks (nach P) und die Lage des Schnittpunktes y seiner Diagonalen, daß dasselbe die Perspective eines Rechtecks ist, welches einer durch Punkt Y (Fig. 94) gehenden, und daher mit der Ebene Q R des Berührungskreises dieselbe Grundlinie habenden horizontalen Ebene $Q^1 T^1$ angehört; eines Rechtecks, welches die Länge $Q^1 T^1$ und eine Breite hat, die gleich dem Durchmesser II. IV eines in der Kugel durch Y horizontal liegenden Kreises ist. Daß aber die von der Perspective dieses Rechtecks eingeschlossene Ellipse die von der vorher construirten Quadratperspective c f g b eingeschlossene perspectivisch decken muß, ist unzweifelhaft, da die Schnittfigur t q des der Kugel entsprechenden Gesichtslinien-Kegels Q O T (Fig. 94) mit der Bildebene t (H^1) immer dieselbe ist, der Kegel mag nun Q T oder $Q^1 T^1$ zur Basis haben.

Die gleichzeitige Anwendung beider Constructionsarten, wodurch die Zahl der zur Zeichnung der Ellipse verwendbaren Punkte erheblich vergrößert wird, ist dadurch erleichtert, daß man das in Fig. 94 gesondert Vorgeführte in Fig. 93 selbst, unter Weglassung der Linie Q R, ausführen kann. Zudem findet man hier die Neigung der Ebene des Berührungskreises und den Hauptpunkt H^1 schnell, wenn man D H^1 sofort normal zu D k zieht.

Digitized by Google

Wie man, um die Ellipse vermittelst ihrer Brennpunkte construiren oder berichtigen zu können, zu ihrer schon vorliegenden langen Achse q t die kurze Achse a z findet, ist aus §. 357 zu ersehen. In Fig. 95 liegt in A Z die geometrische Länge der kurzen Achse vor; a z in Fig. 93 ist die perspectivische Länge derselben.

Ausführung der Aufgabe b. Die Construction ist der vorher- §. 355.
gehenden ganz entsprechend. Die zur Ermittelung der Lage der Berührungs-kreis-Ebene dienende geometrische Construction, welche ebenfalls in Fig. 96 selbst ausgeführt werden kann, liegt wieder gesondert in Fig. 97 (Taf. 17) vor, wo K (P) zunächst die Grundrißprojection der Bildebene, (O) die des Gesichtspunktes, der Kreis um K die der Kugel — der Aufgabe gemäß geometrisch orientirt — bedeuten. Da die fragliche Ebene offenbar normal, wie K (E), zu einer aus dem Gesichtspunkte nach dem Mittelpunkte der Kugel gezogenen Gesichtslinie (O) K ist, so muß ihre Schnittlinie mit der Grundebene um den 53° großen Winkel K (E) (O) von der Verticalebene abweichen, und ist demnach ε in Fig. 96 ein Punkt der Grenzlinie der Ebene. Um nun noch den Winkel zu ermitteln, welchen die Ebene mit der Grundebene bildet, kann man Fig. 97 zur Construction einer, in der durch das Auge und den Kugel-Mittelpunkt denkbaren lothrechten Ebene liegenden, Aufrißprojection der vorhergenannten Stücke verwenden, und zwar durch (O) eine Tangente (O) p^1 an die Kugel ziehen, welche die Grundebene bedeutet, und normal zu dieser durch p^1 die Linie t ϱ als Bildebene. Macht man dann noch $p^1 s$ gleich K (O), und eine auf $p^1 s$ in s errichtete Normale s O gleich der gegebenen Höhe p P des Auges und verfährt nun wie vorher in Fig. 94, so ergeben die die Kugel tangirenden Gesichtslinien O Q und O T in der Sehne Q T die geometrische Länge des Durchmessers des Berührungskreises, und in der Linie J L seine perspectivische Länge; in Q R p^1 aber liegt der gesuchte Abweichungswinkel seiner Ebene von der Grundebene vor.

Nach dieser Ermittelung trägt man in Fig. 96 den zuletzt gefundenen Winkel an den Horizont in ω an und schneidet die durch γ Lothrechte in ϱ, wonach eine durch ϱ und ε gezogene Linie die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ ein Distanzpunkt) der Ebene des Berührungskreises ist. Die Perspective des letztern wird nun wieder construirt, indem man l i durch k parallel ϱ ε zieht und geometrisch gleich L J (Fig. 97) macht, dann Linien von H^1 durch l und i zieht, dieselben durch Linien, von den Distanzpunkten Δ und Δ^1 durch k gezogen, schneidet und danach die Perspective des einschließenden Quadrates vollendet. Die darin einzuzeichnende Ellipse, welche die gesuchte Kugelperspective ist, muß, nachdem man K q und K t aus

Digitized by Google

Fig. 97 in k q und k t in Fig. 96 übertragen, selbstverständlich durch die Punkte q und t gehen, deren Lage zu k, wie die aller anderen Punkte p^1, y, γ und ϱ der lothrechten Linie t ϱ, übereinstimmen muß mit der Lage der gleichnamigen Punkte der Linie t ϱ in Fig. 97, da letztere Figur eine Projection innerhalb der lothrechten Ebene des Neigungswinkels der Berührungskreis-Ebene ist.

§. 356. Vereinigt man mit dem eben gezeigten Verfahren das in §. 241 (Fig. 58) vorgeführte — wonach man zunächst die Grenzlinie P D^2 und darin den Distanzpunkt D^2 dadurch bestimmt, daß man k P zieht und auf ihr in P die der Distanz P O gleich lange Normale P D^2 errichtet, wonach man ferner durch Tangenten, aus D^2 an den Kugelkreis gezogen, die verlängerte k P in 1 und 3 schneidet, durch 1 und 3 zu k P normale Linien zieht, und endlich durch Tangenten, aus P an den Kreis gezogen, in v w u x die die Ellipse einschließende Rechtecks-Perspective construirt u. s. w. — so gewinnt man nicht allein eine erhebliche Anzahl Punkte mehr zur Zeichnung der Ellipse, sondern man kommt auch zu den aus Fig. 97 hervorgehenden Resultaten, ohne erst diese Figur construiren zu müssen. Da nämlich D^2 k in Fig. 96 gleich O K in Fig. 97 ist, so ist eine dort durch Tangenten aus D^2 festzustellende Sehne Q T ebenfalls der geometrische Durchmesser des Berührungskreises, L J dessen perspectivische Länge, und, wie überhaupt der Linie 3 H^1 die Eigenschaften der in Fig. 97 als Bildebene auftretenden Linie t ϱ beiwohnen, ergiebt der Schnittpunkt y^1 der Sehne Q T mit der 3 H^1 einen Punkt der Grundlinie, sowohl der doppelt-schiefen Ebene des Berührungskreises, als der einfach-schiefen Ebene, der die die Ellipse einschließende Rechtecks-Perspective v w u x angehört. Die Schnittpunkte 2 und 4 dieser Grundlinie mit der Peripherie des gegebenen Kugelkreises fallen dabei natürlich mit den Berührungspunkten der aus P an denselben Kreis gezogenen Tangenten P x und P u zusammen. Außerdem ist die an sich mit P D^2 parallele Grenzlinie $\varrho\,\varepsilon$ der doppelt-schiefen Berührungskreis-Ebene schnell zu finden, wenn man ohne Weiteres den Hauptpunkt H^1, und zwar dadurch feststellt, daß man die verlängerte k P durch eine Linie schneidet, welche in D^2 normal auf k D^2 steht, oder Q T parallel ist.

§. 357. Will man, um größere Genauigkeit zu erzielen, die Ellipse geometrisch vermittelst ihrer Brennpunkte construiren, so bedarf es, da in 1. 3 schon ihre lange Achse vorliegt und in m deren Halbirungspunkt leicht festzustellen ist, nur noch der Ermittelung der Länge ihrer durch m normal zu 1. 3 liegenden kurzen Achse a z, welche ihrem perspectivischen Orte nach die Geltung der Perspective einer dem Durchmesser 2. 4 parallelen Kreissehne A Z hat. Die geometrische Länge dieser Sehne findet man nun, wenn man zuvörderst

Digitized by Google

die Gesichtslinie m D^2 zieht und dadurch M in T Q bestimmt, dann, um die Figur nicht durch Hülfslinien zu sehr zu verwirren, in einer besonderen Construction, Fig. 98 (Taf. 17), einen Kreis von dem Durchmesser Q T schlägt und darin die vom Mittelpunkte N um das aus Fig. 96 zu entnehmende Stück N M entfernte Sehne A Z zieht. Ueberträgt man darauf deren Hälften M A und M Z auf die Grundlinie der Berührungskreis-Ebene in Fig. 96 in y^1 A und y^1 Z, und zieht Linien von H^1 durch A und Z, so schneiden diese auf der durch m parallel der schiefen Grundlinie, d. i. normal zu 1. 3 zu ziehenden Linie in den Punkten a und z die perspectivische Länge jener Sehne ab, die an dieser Stelle als geometrische kurze Achse der Ellipse zu verwenden ist. B und B^1, je um die Hälfte der langen Achse von a und z entfernt, sind hiernach die Brennpunkte der Ellipse.

Handelt es sich um die Construction der Perspective einer Kugel, deren Mittelpunkt nicht in der Bildebene liegt, so hat man für diese Kugel nur die perspectivische Länge eines der Bildebene parallelen Durchmessers festzustellen, um die Perspective des Mittelpunktes einen Kreis dieses Durchmessers zu schlagen und damit zu verfahren, wie in den Figuren 93 und 96 gezeigt ist. §. 358.

Zu der Construction der Perspective eines beliebigen Kugelpoles wird es einer besondern Anleitung nicht bedürfen, da ein solcher stets als Endpunkt der entsprechenden Kugeldurchmesser-Perspective leicht zu ermitteln ist. §. 359.

Beispiel 35.

Aufgabe. Es ist in Fig. 99 (Taf. 16) das Profil einer **Feldbefestigung**, einer sogenannten **Lünette**, nebst Maßstab, und daneben in $\frac{1}{6}$-Maßstab der geometrische Grundriß dazu gegeben; die Bildebene stehe durch die Wallkante A B, der Gesichtspunkt liege 80 Fuß davon entfernt in O; die Höhe des Auges über dem Bauhorizonte (18. 8 des Profiles), welcher als Grundebene anzunehmen ist, betrage 36 Fuß — es sollen die Perspective der Lünette construirt, die perspectivischen Größen von an verschiedenen Orten in derselben befindlichen Menschen, und danach die Höhen der Fußpunkte derselben über der horizontalen Grundebene bestimmt werden. §. 360.

Ausführung. Nachdem 80 Fuß unterhalb des Horizontes in der Verticale der herabgeschlagene Gesichtspunkt O bezeichnet, durch die 36 Fuß §. 361.

Digitized by Google

unterhalb P in der Verticale liegende Perspective 11^a des Punktes 11 (s. das Profil) die horizontale Grundlinie gezogen worden, werden die Verschwindungspunkte ε, ϱ und λ für die horizontalen Kanten der Seiten A E, E F und C F der Lünette, vermittelst der aus dem Grundrisse ersichtlichen Abweichungswinkel dieser Seiten von der Verticalebene, und die ihnen entsprechenden Theilpunkte festgestellt.

Da die Perspective der durch die Ecke A der Lünette gebildeten Gehrung Punkte für die horizontalen Kanten sowohl der Seite A E als der der Bildebene parallelen Flanke A B ergeben muß, so ist es zweckmäßig, mit der Construction dieser Gehrung zu beginnen. Die an sich lothrechte Ebene der Gehrung weicht dem Grundrisse nach um 27° rechts von der Verticalebene ab; es ist demnach eine lothrechte Linie, durch den um 27° rechts von P gelegenen Punkt α gezogen, die Grenzlinie (α Hauptpunkt, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) jener Ebene, und eine Linie $\alpha\,(18)$, von α durch Punkt 11^a gezogen, die Schnittlinie derselben Ebene mit der Grundebene. Um hiernach Punkte der Ecken der Gehrung zu finden, werden die im Profile mit 18, 19, 10, 12 und 13, 14, 15, 16, 17, 8 bezeichneten Punkte, je nach ihrer Lage im Bauhorizonte zu Punkt 11, links und rechts vom Grundpunkte 11^a auf der Grundlinie geometrisch aufgetragen, von hier zunächst auf eine durch 11^a perspectivisch rechtwinklig zu O ε gezogene horizontale, also im Punkte v (rechts außerhalb des Constructionsraumes) verschwindende Linie $11^a\,(v)$ mittels des dieser Linie entsprechenden Theilpunktes tv übertragen, und von da durch Linien, nach ε gezogen, weiter auf die Gehrungs-Schnittlinie $\alpha\,(18)$ übertragen. Zieht man durch die hier gewonnenen Punkte lothrechte Linien und bestimmt deren perspectivische Längen, wie z. B. 13. 3 dadurch, daß man die aus dem Profile einzeln entnehmbaren Höhen, wie z. B. 13. 3, zuvor geometrisch in der Verticale über 11^a, für die Punkte O und 2 aber unter 11^a, aufträgt und von hier durch Linien, nach α gezogen, auf die entsprechenden Lothrechten perspectivisch überträgt, so erzielt man die Perspectiven sämmtlicher Eckpunkte der Gehrung. Die Richtigkeit der diese Punkte verbindenden Linien, wie z. B. der Glacискante $18^a\,9$, oder der Brustwehrkante 1. 3, kann man nachträglich controliren, wenn man in der lothrechten Grenzlinie $\alpha\,\alpha^1$ die Verschwindungspunkte α^3 und α^2 jener Kanten construirt; an den Horizont nämlich in ω die aus dem Profile ersichtlichen Neigungswinkel von $5^1/_2{}^\circ$ und 8° des Glacis und der oberen Brustwehrfläche anträgt und dabei die Grenzlinie schneidet. Aus dieser Untersuchung ergiebt sich aber zugleich, daß, wenn α^3 und α^2 die Verschwindungspunkte für die ansteigenden Kanten des Glacis und der oberen Brustwehrfläche sind, ε aber

Digitized by Google

seiner Construction gemäß der Verschwindungspunkt für die horizontalen Kanten derselben Stücke an der Seite a e ist, Linien, durch α^3 und ε und durch α^2 und ε gezogen, die Grenzlinien der genannten schiefen Flächen [$(18^a)\,\varepsilon$ ist die Schnittlinie dieser Ebenen mit der horizontalen Grundebene, und mit den Grenzlinien parallele Linien, durch y gezogen, sind ihre Grundlinien] an der Seite a e sein müssen; und ferner, daß Linien, parallel dem Horizonte durch α^3 und α^2 gezogen, die Grenzlinien (H^3 und H^2 Hauptpunkte) derselben Flächen (deren Grundlinien eine Horizontale, durch q gezogen, und die Linie 1. 3 sind, und deren gemeinschaftliche Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene $18^a\,18^b$ ist) an der Flanke a b der Lünette sein müssen.

Die Punkte der in einer lothrechten, um $78^1/_2{}^\circ$ von der Verticalebene abweichenden Ebene liegenden Gehrung an der Ecke E werden, zumal die Grenzlinie (Hauptpunkt λ) dieser Ebene links weit außerhalb des Constructionsraumes liegt, am besten gefunden, wenn man zunächst in einer von 11^a nach ε zu ziehenden Linie mittels des ihr entsprechenden Theilpunktes den in dieser Ecke analog 11^a liegenden Punkt 11^e bestimmt; ferner in der Linie $\alpha\,(18^a)$ die Perspective m des Punktes M, in welchem sich dem Grundrisse nach die Gehrungsrichtungen schneiden, construirt und von m durch 11^e eine Linie zieht. Es ist dies die Schnittlinie der Gehrungsebene mit der Grundebene und deshalb sogleich zur Bestimmung des Punktes 18^e in der von 18^a nach ε zu ziehenden Linie zu benutzen. Ueberträgt man auf m 18^e die vorher in der Linie $\alpha\,18^a$ bestimmten Punkte vermittelst nach ε gezogener Linien, zieht durch die so übertragenen Punkte lothrechte Linien, und schneidet diese wieder durch Linien, von den Gehrungspunkten der Ecke a nach ε gezogen, so ergeben die Schnittpunkte die Perspective der Gehrung an der Ecke e. Die schiefen Kanten $9^e\,18^e$ und $3^e\,1^e$ müssen dabei wieder gerichtet sein nach den Schnittpunkten der Grenzlinie der Gehrungsebene mit den Grenzlinien $\alpha^3\,\varepsilon$ und $\alpha^2\,\varepsilon$; sie müssen, rückwärts verlängert, aber auch durch die Punkte m^3 und m^2 gehen, in welchen die verlängerten Kanten $18^a\,9$ und 1. 3 die allen Gehrungsebenen gemeinsame Lothrechte m m^2 schneiden.

Die Gehrung an der Ecke f hat die Richtung m τ, und ihre Perspective ergiebt sich leicht, wenn die im Punkte ϱ verschwindenden horizontalen Kanten der Seite e f gezogen sind. Von dieser Gehrung aus ist dann auch die Perspective der Flanke f e vermittelst ihrer vom Verschwindungspunkte φ aus zu ziehenden horizontalen Kanten zu construiren.

Für die Böschung an dem Ende b der Flanke a b, welche überall die halbe Höhe zur Anlage, demnach $63^1/_2{}^c$ Neigung hat, ist, da ihre Schnitt-

Digitized by Google

linie n 18^b mit der Grundebene, dem Grundrisse nach, parallel der Verticalebene ist, die durch P gehende, um $63\frac{1}{2}^\circ$ geneigte Linie P $\varkappa$ die Grenzlinie, und $\varkappa^3$ darin der Verschwindungspunkt für die Kante $18^b\,9^b$ am Glacis; $\varkappa^2$ der für die Brustwehrkante $1^b\,3^b$. Sucht man auf gleiche Art die Verschwindungspunkte für die schiefen Kanten der anderen Flächen der Flanke, so ist der schiefe Abschnitt der letztern leicht zu vollenden. —

§. 362. Um gewisse gegebene Höhen, z. B. die von menschlichen Figuren, auf beliebigen Punkten der schiefen Flächen schnell perspectivisch zu bestimmen, ohne von den Grundlinien der letzteren aus zu construiren, werden dieselben stets zuvor in der durch Punkt 11^a stehenden Lothrechten (Hauptkante) geometrisch aufgetragen. Von hier aus lassen sich diese Höhen vermittelst Linien, welche man nach einem entsprechend gelegenen Punkte der Grenzlinie der Fläche zieht, auf welcher die Figur steht, unmittelbar oder mittelbar nach dem gegebenen perspectivischen Orte perspectivisch weiter übertragen.

So wird die Höhe eines im Punkte $26\frac{1}{2}$ auf der oberen Brustwehrfläche der Seite a e befindlichen Menschen durch Linien, vom Fuß und Scheitel des im Punkte 1 stehenden Mannes nach h der Grenzlinie $\varepsilon\,\alpha^2$ gezogen, die Höhe des im Punkte 28 Stehenden durch Linien nach ε bestimmt. Für den im Punkte 26 auf der obersten Brustwehrkante Stehenden wird zuerst die Höhe eines im Punkte 3 Stehenden festgestellt, und von hier nach 26 übertragen. Die Höhe der in $32\frac{3}{4}$, 32 und $32\frac{1}{2}$ stehenden Männer wird zuerst über dem Punkte q geometrisch aufgetragen, dann durch Linien, von α^3 aus gezogen, für die Orte l, 9 und i perspectivisch bestimmt, und von hier nach den Orten $32\frac{3}{4}$, 32 und $32\frac{1}{2}$ perspectivisch weiter übertragen. Die perspectivische Höhe eines im Punkte 33 auf der Kante der Geschützbank Stehenden wird gefunden, nachdem die Höhe eines im Punkte 7 Stehenden festgestellt ist. Die Höhen der im Graben in s und $41\frac{1}{2}$ stehenden Männer werden gefunden, nachdem zuvor die Höhe eines im Punkte t Stehenden bestimmt ist. —

§. 363. Um aber die Höhe zu bestimmen, in welcher sich der Fußpunkt irgendeines der in der Darstellung vorhandenen Männer über der Grundebene befindet, ermittelt man zunächst die Tiefe des Fußpunktes unter der Horizontebene, indem man feststellt, wieviel mal die perspectivische Größe des Mannes in dem normalen Abstande seines Fußpunktes vom Horizonte enthalten ist, und darauf die menschliche Größe (angenommen 6 Fuß) mit der gefundenen Zahl multiplicirt (s. §. 202). Zieht man alsdann das Product von der Höhe des Auges ab, so ergiebt der Rest die Höhe des Fußpunktes über der Grundebene. Z. B.: Die perspectivische Größe des im

Digitized by Google

Punkte $32\frac{1}{2}$ ſtehenden Mannes iſt $5\frac{5}{12}$ mal im Abſtande ſeines Fußpunktes vom Horizonte enthalten; mit dieſer Zahl ſeine Größe, 6 Fuß, multiplicirt, ergiebt $32\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe ſeines Fußpunktes unter der Horizontebene, d. i., bei der hier gegebenen Höhe des Auges von 36 Fuß, gleich einer Höhe von $3\frac{1}{2}$ Fuß über der Grundebene. In gleicher Höhe läge der Fußpunkt eines im Punkte i Stehenden. So ſind ferner die perſpectiviſchen Größen der in den Punkten 1 und 28 ſtehenden Männer $4\frac{2}{3}$ mal in den, hiernach $4\frac{2}{3}$ mal 6 Fuß, alſo 28 Fuß betragenden Abſtänden ihrer Fußpunkte von dem Horizonte enthalten, was für letztere eine Höhe von 8 Fuß über der Grundebene ergiebt, u. ſ. w.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Constructionen auf der horizontalen ebenen Bildfläche.

Zwölftes Kapitel.

§. 364. Die Constructionen auf der horizontalen Bildebene unterliegen denselben Regeln, wie diejenigen auf der lothrechten Bildebene.

Da bei der in Rede stehenden Stellung der Bildebene sämmtliche horizontalen Linien ihr parallel sind, so müssen die Perspectiven unter sich paralleler horizontaler Linien geometrisch parallel sein, und da alle lothrechten Linien normal zu dieser Bildebene sind, so müssen ihre Perspectiven nach einem und demselben darstellbaren Verschwindungspunkte convergiren.

Die Orientirung bei der Construction zeigt am verständlichsten ein Beispiel.

Beispiel 36.

§. 365. **Aufgabe.** In Fig. 100 (Taf. 18) ist ein Theil ECLG der horizontalen Decke eines etwa 20 Fuß hohen Saales als Bildfläche angenommen und darauf die Perspective **eines auf vier Eckſäulen ruhenden Kreuzgewölbes** nach dem oberhalb der Figur vorliegenden Maßstabe so dargestellt, wie dasselbe, oberhalb der Saaldecke erbaut, einem darunter befindlichen Beschauer erscheinen würde. Der Standpunkt des Letztern ist dabei als lothrecht unter dem Punkte P, und als Distanz der ungefähre Abstand seines Auges von der Saaldecke, also die Länge von 15 Fuß angenommen.

Digitized by Google

Ausführung. Wenn man bei der Construction eng an das bei der §. 366.
lothrechten Bildebene übliche Verfahren anknüpft, so ist es hier gleichgültig, welche der vier perspectivisch darzustellenden Wände man als Grundebene und welche der vier Schnittlinien derselben mit der Bildebene man demnach als Grundlinie behandeln will. In der Figur ist die Wand über G L als Grundebene und G L selbst als ihre Grundlinie, s ω als Grenzlinie der Ebene dieser Wand (P Haupt- und Verschwindungspunkt aller der Grundebene parallelen und zur Bildebene normalen, d. h. lothrechten Linien; P p demnach die Verticale, p Grundpunkt; P O/2, gleich P D/2, halbe Distanz, d. i. 7½ Fuß; O, unten außerhalb der Construction liegend, der herabgeschlagene Gesichtspunkt) behandelt worden.

Nachdem innerhalb des Rechtecks E C L G ein kleineres Rechteck als Perspective des das Gewölbe vom Saale trennenden Hauptgesimses, und an dessen Ecken die unten im Saale selbst etwa durch Säulen- oder Pfeilerstellung zu rechtfertigenden Plinthenvorsprünge der Säulenbasen geometrisch dargestellt worden, sind die Perspectiven aller vier Säulen gleich der über der Ecke G stehenden construirt worden. Für diese wurde in der Bildebene der Fußpunkt A ihrer perspectivisch nach P gerichteten Achse festgestellt, es wurden auf einer durch A parallel der Grundlinie G L gezogenen Linie in A β, β ϰ, ϰ ϱ die Höhen (in der Figur sind halbe Maße, der halben Distanz P D/2 entsprechend, angewandt) der Basis, des Schaftes und des Capitäls der Säule geometrisch auf-, und von hier vermittelst nach D/2 gezogener Linien perspectivisch auf die Säulenachse in A b, b k und k r übertragen. Die perspectivischen Größen des oberen Säulendurchmessers und der Capitälbreite ergaben sich durch nach P gezogene Linien, nachdem die geometrischen Größen jener Stücke auf der durch A gehenden Linie in A i und A n aufgetragen worden. — Die Perspectiven der Gurtbogen wurden als Perspectiven halber Kreise innerhalb der Perspectiven sie einschließender halber Quadrate, wie auf der lothrechten Bildebene, unter Benutzung der in den Diagonalen liegenden Punkte construirt. Ebenso ergaben sich die Perspectiven von Punkten der Gratbogen in den Schnittpunkten der Linien, welche entsprechende Punkte der einander gerade gegenüberliegenden Gurtbogenpaare verbinden. — Auch die Perspectiven der lothrechten Kanten der in der Wand über G L befindlichen Fensteröffnung sind nach P gerichtet. Die Perspective des davon getragenen Bogens wurde innerhalb der Perspective des diesen einschließenden halben Quadrates construirt.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Constructionen auf der schiefen ebenen Bildfläche.

Dreizehntes Kapitel.

§. 367. Wie schon in §. 12 gesagt, ist die Darstellung aller, einer solchen Bildfläche nicht parallelen Objecte unter Anwendung der für die Construction der Perspectiven schiefer Objecte geltenden Regeln auszuführen. Da bei Aufgaben dieser capriciösen Art für die Wahl des Gesichtspunktes weniger die in den §§. 18—30 aufgestellten allgemeinen Regeln, als die Oertlichkeit maßgebend sind, kann es nicht auffallen, daß das perspectivische Bild ein sehr verzerrtes wird, vollends da auch hier, wie bei der horizontalen Bildebene, die lothrechten Linien selbst der Bildebene nicht parallel und ihre Perspectiven deshalb schief, nach einem darstellbaren Verschwindungspunkte gerichtet, sind. Von den horizontalen Linien sind nur die Perspectiven derjenigen parallel mit der Grundlinie der horizontalen Grundebene, welche selbst der schiefen Bildebene parallel sind.

Als Beispiel möge hier ein, dem von J. H. Lambert gewählten sehr ähnliches folgen.

Beispiel 37.

§. 368. **Aufgabe.** In Fig. 101 (Taf. 18) ist nach dem beigefügten Maßstabe die geometrische Aufrißprojection einer um 45° geneigten Treppe gegeben, auf deren 8 Fuß breiter Rücken-

Digitized by Google

fläche EJ die Perspective eines **Theiles einer Hausfaçade**, namentlich eine mit einem vorgebauten **Balkon** versehene **offene Thür**, welche Einblick in das **Innere eines Zimmers** gewährt, construirt werden soll. Der Fußboden des Zimmers liege in der Höhe des Punktes p, durch welchen zugleich die Hausfaçade stehe. Der Gesichtspunkt sei O, das Auge eines in K stehenden Beschauers.

Ausführung. Nachdem zuvörderst in Fig. 102 (Taf. 18) in dem Rechteck ee^1i^1i die 8 Fuß breite Bildebene aufgerichtet dargestellt worden, zieht man in der Aufrißfigur aus dem Auge O den Parallelstrahl OP für zur Bildebene normale Linien, den Parallelstrahl O1 für lothrechte, den Parallelstrahl Oh für horizontale Linien, und überträgt die Abstände der Punkte p, h, P und 1 von der unteren Grenze E der Bildebene geometrisch und unter gleichnamiger Bezeichnung in die Construction, Fig. 102, und zwar in die mitten durch die aufgerichtete Bildebene anzunehmende Verticale. Es ist dann P der Verschwindungspunkt für alle zur Bildebene normalen Linien und der Hauptpunkt in der durch ihn horizontal zu ziehenden Grenzlinie der Ebenen, welche zugleich normal zur Bild- und zur Verticalebene sind; PO ist die aus der Aufrißfigur entnehmbare, in die Grenzlinie herabgeschlagene Distanz. Trägt man nun, da, wie die Aufrißfigur zeigt, lothrechte Linien 45° über, horizontale Linien 45° unter OP geneigt sind, in der Construction an PO in O oberhalb und unterhalb den Winkel von 45° an, so schneidet man die Verticale abermals in den auf ihr schon bezeichneten Punkten 1 und h, wovon der erstere der Verschwindungspunkt für lothrechte, der letztere der für horizontale Linien ist. Eine durch 1 gezogene Horizontale ist dann die Grenzlinie für alle lothrechten, zur Verticalebene normalen Ebenen (1 Hauptpunkt; 1O, gleich 1d, die Distanz, d Distanzpunkt), eine durch h gezogene Horizontale ist die Grenzlinie für alle horizontalen Ebenen (h Hauptpunkt; ho, gleich hO, gleich hD, Distanz; o herabgeschlagener Gesichtspunkt, D Distanzpunkt). — p ist der Grundpunkt, und die durch ihn gezogene Horizontale $p\gamma$ die Grundlinie sowohl für die horizontale Fußboden-Ebene des Zimmers und des Balkons, als für die zur Verticalebene normale lothrechte Ebene der Hausfaçade. §. 369.

Um hiernach die Perspective der Thür zu construiren, deren Fuß in der Grundlinie steht, trägt man die ihr zu gebende Breite, etwa ar, gleich 4 Fuß, zur Hälfte links, zur Hälfte rechts von p auf und zieht von a und r, nach Punkt 1 gerichtet, die Perspectiven ihrer lothrechten Kanten. Die perspectivische Länge derselben, d. i. die etwa $7\frac{1}{4}$ Fuß be-

Digitized by Google

tragende Höhe der Thür, wird bestimmt, wenn man dieselbe zunächst geometrisch, etwa rechts von a, in a β auf der Grundlinie aufträgt, und dann a l durch eine von β nach dem Distanzpunkte d gezogene Linie in b abschneidet. — In gleicher Weise werden die perspectivischen Höhen der 6 Fuß oberhalb der Thür gelegenen und selbst 6 Fuß hohen Fenster bestimmt. Die Entfernungen der letzteren von einander und ihre Breiten werden gleichfalls zuvor auf der hier als Hauptkante dienenden Grundlinie p γ geometrisch auf- und durch nach l gezogene Linien perspectivisch in die Fensterhöhe übertragen. — Um die Tiefe a c des Zimmers, welche etwa 12 Fuß betrage, perspectivisch zu bestimmen, trägt man dieses Maß abermals auf der Grundlinie rechts von a in a γ geometrisch auf und schneidet eine von a nach h über den Fußboden gezogene Linie durch eine andere, von γ nach D gezogene, in c. — So auch wird der geometrisch a φ gleiche Vorsprung des Balkons perspectivisch in a f auf die über a verlängerte h a vermittelst einer von dem Distanzpunkte D^1 durch φ gezogenen Linie übertragen. — Die Breite des im Hintergrunde des Zimmers befindlichen Fensters wird ebenso von der Grundlinie aus perspectivisch auf die Hinterwand übertragen. Die Höhenkanten des Fensters sind, wie alle lothrechten Linien, nach l gerichtet, u. s. w.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Constructionen auf der gekrümmten Bildfläche.

Vierzehntes Kapitel.

Das Panorama.

§. 370. Der Zweck von Bildern auf gekrümmten Bildflächen ist im Allgemeinen, dem Beschauer die in einem sehr ausgedehnten Gesichtsfelde befindlichen Objecte, deren Darstellung nach den für die ebene Bildfläche geltenden Regeln mehrere ebene Bilder füllen müßte, übersichtlich in ihrer Nebeneinanderfolge in einem Bilde vorzuführen. Wegen der Unmöglichkeit, sie mit einem Male zu überschauen, kann ihr Inhalt nur stückweise und allmählich auf die Vorstellung des Beschauers wirken, und eignen sich deshalb in ästhetischer Beziehung wohl nur landschaftliche und architektonische Vorwürfe zu derartiger Darstellung.

Die häufig auf ebenen Bildflächen unter dem Namen von Panoramen vorkommenden Darstellungen ganzer Städte sind, als Ganzes genommen, in perspectivischer Beziehung unrichtige Bilder; und vermögen sie auch, stückweise betrachtet, zu befriedigen, so tritt ihre Mangelhaftigkeit doch sofort vor die Augen, wenn der Blick sich zu den seitlichen Bildgrenzen wendet und hier den Inhalt der einen als sich anschließend an den Inhalt der andern erkennen soll. Dabei können diese Bilder auch nicht als auf einer abgewickelten Cylinder-

Digitized by Google

fläche vorliegend angesehen werden, weil in ihnen die Perspectiven aller nicht lothrechten geraden Linien als gerade Linien vorgeführt sind, während diese, wie die unten folgenden Erläuterungen ergeben werden, mit einer einzigen Ausnahme Curven sein müssen.

§. 371. Unter den Bildern auf gekrümmten Bildflächen anzuführen sind die *Kuppelbilder*, auf der inneren Fläche eines Kugelstückes ausgeführt, und wegen ihres Ortes gewöhnlich allegorischen oder religiösen Inhaltes. Ist dieses Kugelstück so gelegen, daß sein geometrischer Mittelpunkt an dem Orte liegt, welchen das Auge des Beschauers von selbst einzunehmen strebt, so bietet es an sich die vollkommenste Bildfläche dar, da alsdann alle perspectivischen Verzerrungen (s. §. 21) ausgeschlossen sind. Da jenes jedoch selten der Fall ist, die Kugelstücke gewöhnlich bis zur Halbkugel ausgedehnt sind und in zu großer Höhe schweben, dabei nur schwer gleichmäßig zu erhellen sind, so leiden auch diese Bilder an großen Unvollkommenheiten.

Frei von den hervorgehobenen Mängeln sind allein die den Namen von *Panoramen* führenden *Bilder auf der innern Fläche eines Cylinders*. Sie sind in perspectivischer Beziehung vollkommen richtig, sind leicht so gleichmäßig zu erhellen wie ebene Bilder, und es ist dem Beschauer ihnen gegenüber nicht schwer, das Auge in den richtigen, gewöhnlich in der Achse des Cylinders liegenden Gesichtspunkt zu bringen.

§. 372. In Bezug auf das perspectivische Construiren auf Bildflächen der letzterwähnten Art ist zuvor zu bemerken, daß das hier zunächst gezeigte und besonders zu empfehlende Constructionsverfahren nach der Grundriß-Methode zwar die Möglichkeit nicht ausschließt, unmittelbar auf der gekrümmten Cylinderfläche zu construiren, daß jedoch wegen der freieren Handhabung des Zirkels und Lineals die Construction gewöhnlich auf der ganz oder theilweise *aus ihrer Krümmung zur Ebene abgewickelten Fläche* ausgeführt wird, wobei sich denn eigenthümlich verzerrte Bilder der Objecte ergeben. Bei der nach Vollendung der Construction stattfindenden *Wiederaufwickelung* der Bildfläche zum Cylinder verlieren die perspectivischen Bilder einem richtig situirten Auge gegenüber jene Verzerrung, indem sie alsdann die entsprechenden natürlichen Objecte decken.

Digitized by Google

In Fig. 103 (Taf. 18) ist in dem mit einer Grundfläche auf der Grundebene stehenden normalen Cylinder um die Achse CS die Panorama-Bildfläche in ihrer Krümmung vorgeführt. O in der Achse bedeutet den Gesichtspunkt; AV in der Grundebene und KV in der durch O anzunehmenden Horizontebene seien zwei parallele, in Einer lothrechten Ebene liegende horizontale Linien, hin und wieder durch lothrechte Linien wie KA, LB u. s. w. verbunden — es läßt sich daran Folgendes nachweisen: §. 373.

Da jede Gesichtslinie die krumme Bildfläche in zwei Punkten schneidet, so hat jedes Object eigentlich zwei Perspectiven; sei es ein Punkt wie R oder E, deren jeder zwei Punkte zu Perspectiven hat, nämlich r und r^1, und e und e^1, oder sei es eine Linie wie RE, deren Perspectiven re und r^1e^1 sind. Da hiervon jedoch die eine Perspective stets hinter den Beschauer fällt, so kommt für die Construction stets nur die Perspective in Betracht, welche, zwischen dem Auge und dem Objecte gelegen, letzteres deckt.

Die Perspective einer geraden Linie kann, je nach der Lage und Richtung derselben, verschiedene Cylinderschnitte bilden: §. 374.

sie ist ein Punkt wie z. B. e, wenn die gegebene Linie die Richtung einer Gesichtslinie hat wie eE;

sie ist eine lothrechte gerade Linie wie ka, wenn die gegebene Linie, wie KA, in einer durch den Gesichtspunkt gehenden lothrechten Ebene liegt; denn eine solche schneidet den Cylinder in einer seiner Seiten;

sie ist ferner ein Kreisbogen wie krt, wenn die gegebene Linie in der Horizontebene liegt, wie KT; denn die zur Cylinderachse normale Horizontebene schneidet den Cylinder in einem Kreise;

sie ist endlich ein elliptischer Bogen wie aeg, wenn die gegebene Linie, wie AG, weder in der Horizontebene, noch in einer durch den Gesichtspunkt gehenden lothrechten Ebene liegt, noch die Richtung einer Gesichtslinie hat; denn die durch die Gesichtslinien nach allen Punkten der verlängert aufgefaßten Linie AG gebildete Ebene ist schief zur Cylinderachse und schneidet deshalb den Cylinder in einer Ellipse.

Digitized by Google

§. 375. Dem Vorhergehenden nach sind die durch Gesichtslinien aus der Kreislinie v r x r¹ und aus dem Ellipsenumfang v e x e¹ abzuschneidenden Stücke k r t und a e g die Perspectiven der gegebenen parallelen horizontalen Linien K T und A G und deshalb perspectivisch parallel. Denkt man sich K T und A G unendlich lang, so sind, wie der durch O gezogene Parallelstrahl v x ergiebt, v und x die in den Horizont — d. i. die Kreislinie v r x r¹, in welcher die durch O gehende Horizontebene den Cylindermantel schneidet (jeder Punkt der Peripherie ist ein Hauptpunkt) — fallenden beiden Perspectiven des Verschwindungspunktes jener und aller mit ihnen parallelen Linien, wie denn überhaupt jede nicht lothrechte Linie zwei darstellbare Perspectiven ihres Verschwindungspunktes hat. Grundlinie ist die Peripherie des Kreises 1. 9. 17. 25.

§. 376. Denkt man sich den Cylindermantel in der Seite 25. H aufgeschnitten und nebst den im Vorhergehenden an ihm namhaft gemachten Stücken zur Ebene abgewickelt, wie diese in Fig. 104 (Taf. 18) in dem Rechtecke (h) (25) 25. h in halbem Maßstabe vorliegt, so stellen sich hier die früheren Kreislinien v r x r¹ (als Horizont und zugleich als Perspective der unendlich langen Linie (X¹) V) und 1. 9. 17. 25 (als Grundlinie) in den geraden Linien (r) r¹ und (25) 25 dar, der frühere Ellipsenumfang v e x e¹ aber als eine trigonometrische, der Sinuslinie ähnliche Linie (e¹) v e x e¹, in welcher v und x die beiden Perspectiven des Verschwindungspunktes der unendlich langen Linie V (X) sind, v e x die Perspective dieser Linie selbst, das Stück g e a davon die des Stückes G A, während die Stücke (e¹) v und e¹ x, als die zweite Perspective bedeutend, außer Betracht kommen.

§. 377. Das auf der abgewickelten Bildfläche in Fig. 104 fertig Vorliegende wird construirt unter Anwendung der in den Figuren 105 und 106 in halbem Maßstabe gegebenen geometrischen Projectionen: In dem Grundrisse, Fig. 105 (Taf. 18), bedeutet die Kreislinie um den Gesichtspunkt O den Cylindermantel, die Linie (V) (X) die Projection der beiden in Fig. 103 gegebenen horizontalen Linien. In dem Aufrisse, Fig. 106 (Taf. 18), ist O in entsprechender Höhe O S

Digitized by Google

über der Grundebene S A der Gesichtspunkt, O P die zu allen Cylinderseiten gleiche Distanz, J p demnach eine Cylinderseite (Bildebene) in Vertretung aller anderen Seiten. In Fig. 104 ist die Höhe (25) (h) des Rechtecks eine beliebige, die Länge (25) 25 aber ergiebt sich durch Berechnung, wenn man die Durchmessergröße des Cylinders in Fig. 105 mit der Zahl π, d. i. 3,14159, multiplicirt; oder durch geometrische Construction, wenn man jene Länge gleich 3 Durchmessern plus $\frac{1}{5}$ der Sehne des Quadranten macht. Der Horizont, welcher zugleich die Perspective der Linie K V enthält, wird in einer Höhe (25) (r^1) über der Grundlinie (25) 25 gezogen, welche gleich ist der Höhe S O des Auges in Fig. 106.

Theilt man nun das Rechteck seiner Länge nach durch lothrechte Linien in eine beliebige Anzahl, etwa 32, gleicher Theile, so stellen diese Linien gleichweit von einander entfernte Cylinderseiten vor und entsprechen einer gleichartigen Theilung der halben Kreisperipherie in Fig. 105 in 16 gleiche Theile. Die hier durch die Theilungspunkte verlängert gezogenen Radien (Gesichtslinien) bezeichnen in ihren Schnittpunkten mit der Linie (V) (X) diejenigen Punkte A, B, E u. s. w., deren Perspectiven a, b, e u. s. w. in die der Kreistheilung entsprechend bezifferten Lothrechten 11, 10, 9 u. s. w. fallen; die Höhen 11 a, 10 b, 9 e u. s. w. aber dieser Perspectiven über der Grundlinie sind in p α, p ε u. s. w. aus Fig. 106 zu entnehmen, nachdem man hier S A, S B, S E u. s. w. gleich O A, O B, O E u. s. w. des Grundrisses gemacht und die Bildebene J p durch Gesichtslinien, von O nach A, B, E u. s. w. gezogen, in α, ε u. s. w. geschnitten hat. Wenn man auf diese Weise (7 g und 8 f gleich 11 a und 10 b) mehrere Punkte der Curve construirt und die Perspectiven v und x ihres Verschwindungspunktes in die Schnittpunkte des Horizontes mit den Cylinderseiten 1 und 17 gesetzt, Punkte ihrer übrigens überflüssigen Verlängerungen v (e^1) und x e^1 noch dadurch bestimmt hat, daß man (r^1) (e^1) und r^1 e^1 gleich r e, n q gleich a k u. s. w. machte, so kann man die ganze Curve (e^1) v e x e^1 zeichnen. Da das Stück a e g dieser Curve die Perspective der Linie A G, das Stück k t des Horizontes die Perspective

Digitized by Google

der Linie K T ist, so sind a k, b l, e r u. s. w. die Perspectiven der lothrechten Linien A K, B L, E R u. s. w. —

§. 378. Nach dem eben gezeigten Verfahren, welches, wie gesagt, der Grundriß-Methode entspricht, soll die nachfolgende Aufgabe gelöst werden; wie man sich aber bei Anwendung der Verschwindungspunkt-Methode zu verhalten hat, soll eine zweite Ausführung derselben Aufgabe zeigen.

Beispiel 38.

§. 379. **Aufgabe.** In Fig. 107 (Taf. 19) ist in den Vierecken A B G H, J K L M, C F E N und in dem Kreise um U der Grundriß eines **Stadttheiles** gegeben, wovon das Viereck A B G H und der Kreis um U **Thürme** bedeuten. Der Kreis um O sei der Grundriß der cylindrisch gekrümmten Bildfläche, O der des Gesichtspunktes. Die Höhe des Auges und die Höhen der Gebäude sind aus Fig. 108 zu entnehmen — es soll die Perspective des Stadttheiles construirt werden.

§. 380. **Ausführung nach der Grundriß-Methode.** In Fig. 109 (Taf. 19) liegt ein Theil der zur Ebene abgewickelten Bildfläche vor. Ihre Höhe ist beliebig; die Grundlinie ist 0. 24; der Horizont ist in einer Höhe darüber, welche gleich ist O° O in Fig. 108. Wie die Bildfläche durch lothrechte Linien (Cylinderseiten) in 24 gleiche Theile, von denen hier nur 14 verwendbar sind, getheilt ist, so ist auch der Cylindermantel in Fig. 107 in 24 gleiche Theile getheilt und zwar durch Radien (die durch jene Cylinderseiten denkbaren Gesichtslinien-Ebenen bedeutend), deren Verlängerungen durch die gegebenen Objecte hindurch hierin diejenigen Stücke bezeichnen, deren Perspectiven in die den Radien gleichbezifferten lothrechten Cylinderseiten in Fig. 109 fallen. Die perspectivischen Höhen jener Stücke in der Bildebene werden durch die Aufriß-Fig. 108, wo O der Gesichtspunkt und Y° Y eine, alle anderen vertretende Cylinderseite (die Bildfläche) ist, ermittelt, nachdem man die Stücke in der aus Fig. 107 zu entnehmenden Entfernung vom Gesichtspunkte nach Fig. 108 in einer gleichen Entfernung von der Standlinie O° O nebst den ihnen eigenen Höhen geometrisch übertragen, und hier durch Gesichtslinien, nach O gezogen, ihre perspectivischen Höhen und Größen auf der Cylinderseite (Bildfläche) Y° Y bestimmt hat. Die Perspectiven von Stücken, welche, wie z. B. die Kante C des Stadttheiles C F E N, zwischen zwei Radien liegen, werden ermittelt, wenn man zunächst die Gesichtslinie, hier c° C, nach ihnen zieht, die Entfernung des

Digitized by Google

Punktes c° vom Punkte 6, hier als $^2/_5$ des Bogens 5. 6 betragend, feststellt, und so in der Construction links vom Punkte 6 in $^2/_5$ der Länge 5. 6 den Punkt c° bezeichnet und durch ihn eine Lothrechte zieht. Darauf überträgt man die Entfernung O C aus Fig. 107 nach Fig. 108 in $O^\circ c^\circ$, macht hier die Lothrechte $c^\circ c^2$ gleich der gegebenen Höhe des Stadttheiles und zieht nun die Gesichtslinien $O c^\circ$ und $O c^2$, wodurch auf der Cylinderseite (Bildfläche) $Y^\circ Y$ in $c^4 c^3$ die perspectivische Höhe und Größe für die Kante $c c^1$ in Fig. 109 abgeschnitten wird. So auch wird die Perspective des cylindrischen Thurmes durch Ermittelung der Höhe und Größe der Perspectiven $r r^1$, $q q^1$, $s s^1$ u. s. w. seiner in R, Q, S u. s. w. stehenden Seiten gefunden.

§. 381. Soll dieselbe Aufgabe nach der Verschwindungspunkt-Methode ausgeführt werden, und sind in der Grundriß-Fig. 110 (Taf. 19) der Halbkreis um O, als gekrümmte Bildfläche, und die beiden Vierecke A B G H und C N E F zusammen ein Theil des in Fig. 107 gegebenen Grundrisses in doppeltem Maßstabe, so wandelt man den Bildflächen-Cylinder in ein Prisma von beliebig vielen Seitenflächen um, behandelt diese als ebene Bildflächen und construirt auf jeder einzelnen die Perspectiven der in ihrem Gesichtsfelde liegenden Objecte.

In Fig. 110 ist der Halbkreis um O durch gleichentfernte Radien so getheilt, wie es einer Theilung des ganzen Kreises in 12 Theile entspricht, damit das zwischen je zwei Radien (Gesichtslinien) liegende Gesichtsfeld wenigstens nicht mehr als 37° umfasse; es sind dann die Sehnen 0. 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, und 4. 5 gezogen, welche nunmehr 5 ebene Bildflächen vorstellen, die in der Construction, Fig. 111 (Taf. 19), in einer Ebene aneinandergereiht vorliegen. In letzterer Figur ist des doppelten Maßstabes wegen der Horizont zweimal so hoch über der durch a° gehenden Grundlinie gezogen, wie in Fig. 109. Die den einzelnen Bildflächen entsprechenden Verticalen liegen durch deren Mitten. In den Schnittpunkten derselben mit dem Horizonte liegen die Hauptpunkte P^1, P^2, P^3 u. s. w. Die Distanz ist für alle Bildebenen dieselbe, weshalb die herabgeschlagenen Gesichtspunkte O^1, O^2, O^3 u. s. w. alle in gleicher Entfernung von den Hauptpunkten liegen. p^1, p^2 u. s. w. sind die Grundpunkte. — (Die Buchstaben des großen Alphabets werden immer Punkte des Grundrisses, die kleinen Buchstaben Punkte der Construction bezeichnen.) —

Erste Bildebene. Von der gegebenen, in der Grundebene liegenden Linie A N ist, wie die Gesichtslinien O A und O L zeigen, nur die Perspective des Stückes A L auf der ersten Bildebene zu construiren. Dasselbe

Digitized by Google

bildet, dem Grundriſſe nach, mit der Verticalebene den Winkel von $29^1/_2{}^\circ$, weshalb α^1 im Horizonte ſein Verſchwindungspunkt und $t\alpha^1$ der Theilpunkt dazu iſt. Da A N die verlängerte erſte Bildebene im Punkte M ſchneidet, ſo überträgt man das Maß $P^1 M$ in die Grundlinie der Conſtruction in $p^1 m$, zieht $m\,\alpha^1$, und ſchneidet dieſe, nachdem man noch $m\,a^\circ$ gleich M A gemacht hat, durch eine Linie, von a° nach dem Theilpunkte $t\alpha^1$ gezogen, in a; das Stück der Linie $m\,\alpha^1$ von a bis 1 in der Grenze der zweiten Bildebene iſt dann die Perſpective des Stückes A L. Trägt man darauf die gegebene Höhe der in A ſtehenden lothrechten Thurmkante in $a^\circ a^2$ auf, und ſchneidet eine durch a gezogene Lothrechte durch eine Linie, von a^2 nach $t\alpha^1$ gezogen, in a^1, ſo iſt $a\,a^1$ die Perſpective jener Thurmkante, und zieht man von α^1 durch a^1 bis zur Grenze der zweiten Bildebene, ſo iſt $a^1 1^1$ ein Theil der Perſpective der obern horizontalen Kante des Thurmes.

Zweite Bildebene. In dieſe fallen die Perſpectiven der Thurmkanten B und G, der Kante C des Stadttheiles C N E F, der zwiſchen dieſem und dem Thurme durchgehenden Straße, und zunächſt des Stückes L J der Linie A N. Letzteres bildet mit der Verticalebene O R den Winkel von $59^1/_2{}^\circ$, weshalb α^2 ſein Verſchwindungspunkt und $t\alpha^2$ dazu der Theilpunkt iſt. Ueberträgt man, da die verlängerte zweite Bildebene die Linie A N im Punkte Q ſchneidet, das Maß $P^2 Q$ in $p^2 q$ und zieht $q\,\alpha^2$, ſo iſt das Stück i l hiervon die Perſpective des Stückes J L, welche ſich an den in der Grenze der erſten Bildebene ſchon vorhandenen Punkt l anſchließt. Die Perſpectiven c und b der Punkte C und B werden gefunden, wenn man $q\,c^\circ$ und $q\,b^\circ$ gleich Q C und Q B macht und dann i l durch Linien, von c° und b° nach dem Theilpunkte $t\alpha^2$ gezogen, ſchneidet. Macht man dann wieder $b^\circ b^2$ gleich der gegebenen Thurmhöhe, und $c^\circ c^2$ gleich der gegebenen Höhe des Stadttheiles und zieht von b^2 und c^2 Linien nach dem Theilpunkte $t\alpha^2$, ſo ſchneiden dieſe auf den durch b und c zu ziehenden Lothrechten in $b\,b^1$ und $c\,c^1$ die perſpectiviſchen Größen der in B und C ſtehenden Gebäudekanten ab. — Die Richtung der Straße weicht von der der Verticalebene um 26° ab, weshalb γ der Verſchwindungspunkt der ihr folgenden horizontalen Kanten iſt, und dahin auch b g und $b^1 g^1$ gerichtet ſind. Die Perſpective g des Punktes G wird in der $b\,\gamma$ vermittelſt des dem Verſchwindungspunkte γ entſprechenden Theilpunktes beſtimmt.

Dritte Bildebene. Das auf dieſer zu conſtruirende Stück J S der Linie A N weicht von der Verticalebene $O P^3$, dem Grundriſſe nach, um $89^1/_2{}^\circ$ ab, weshalb ſein Verſchwindungspunkt in ſehr großer Entfernung außerhalb

Digitized by Google

des Constructionsraumes liegt und es rathsam ist, zuvor die Perspective s u auf der vierten Bildebene zu construiren und dann i mit s durch eine Linie zu verbinden.

Die Construction der Perspectiven auf den übrigen Bildebenen gleicht der auf den ersten beiden und bedarf es dabei keiner weitern Erläuterung. —

Schließlich liegt in der gebrochenen Linie a l i s u n die Perspective der Linie A N vor. Die nunmehr herantretende Schwierigkeit, diese gebrochene Linie, von der überdies nur wenige Punkte perspectivisch ganz richtig sind, in eine Curve umzuwandeln, wird erst recht verständlich, wenn man sie mit der entsprechenden Linie in Fig. 109 vergleicht. Dies und der Hinblick auf die Umständlichkeit des Verfahrens bei der etwaigen Annahme noch schmälerer Bildebenen, als hier gewählt sind, spricht wohl überzeugend für die Vorzüglichkeit der Grundriß-Methode bei der vorliegenden Art von Constructionen. §. 382.

Funfzehntes Kapitel.

Das Kuppelbild.

Die Anleitung zur Construction von Perspectiven auf der inneren Fläche eines Kugelstückes ist aus dem vorhergehenden Kapitel zu entnehmen: §. 383.

Sieht man in Fig. 107 den Kreis um O als die Grundriß-Projection einer halbkugelförmigen Kuppel an, so fallen die Perspectiven der Stücke, welche dort durch die Verlängerungen der Radien (Gesichtslinien-Ebenen) in den gegebenen Objecten bezeichnet werden, in die entsprechenden Meridianlinien der Kuppel. Die Höhen der Perspectiven in diesen Meridianlinien sind durch eine Aufrißprojection, wie Fig. 108 ist, zu ermitteln, wenn man an Stelle der dort geraden Linie (Cylinderseite) Y° Y die Kuppelkrümmung, eine Meridianlinie, setzt und dazu den Gesichtspunkt entsprechend orientirt.

Von einer Abwickelung der Kuppelfläche behufs der perspectivischen Construction kann selbstverständlich nicht die Rede sein.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Schattengrenzen.

Sechzehntes Kapitel.

Allgemeines.

§. 384. Nachdem in der Ersten Abtheilung das Wesen des Lichtes und sein Verhalten bei der Berührung mit Körpern im Allgemeinen erörtert worden, bleibt dem vorliegenden Abschnitte die Aufgabe, Anleitung zu geben 1) zur Ermittelung der Grenzen, bis zu welchen gegebene Körper von gegebenem Lichte beleuchtet werden, sowie der Grenzen des Raumes, welchem durch solche Körper das Licht entzogen wird, und 2) zur Construction der Perspectiven dieser Grenzen.

§. 385. Schon Eingangs der Ersten Abtheilung ist die Fortpflanzungsbahn des Lichtes als eine geradlinige bezeichnet worden. Da die ebendaselbst späterhin erwähnten Inflexionserscheinungen des Lichtes beim Vorübergange an scharfen Kanten so überaus subtiler Art sind, daß sie, wo es sich, wie hier, um breite Lichtbüschel handelt, der Beobachtung fast ganz entgehen, so kann für den vorliegenden Zweck von ihrem Auftreten gänzlich abgesehen und ein Lichtstrahl als in einer unter allen Umständen geradlinigen Bahn fortschreitend angesehen werden.

Digitized by Google

Eine nächste Folgerung aus dieser Voraussetzung ist, daß auch der Schatten, welchen ein Körper durch den Raum wirft, sein Schlagschatten, sich in gerader Richtung fortpflanzt, da seine Grenzen durch geradlinige Lichtstrahlen gebildet werden. Es muß demnach, wenn man das Licht als von einem Punkte ausgehend annimmt, der Schlagschatten eines körperlichen Punktes, etwa einer Kegelspitze, eine unendlich lange gerade Linie sein; es muß der Schlagschatten einer mit allen ihren Punkten dem Lichte ausgesetzten körperlichen geraden Linie, etwa einer Würfelkante, eine Ebene sein; es muß ferner der Schlagschatten einer etwa viereckigen Scheibe oder eines Würfels eine unendlich lange abgekürzte Pyramide, und der Schlagschatten einer runden Scheibe oder einer Kugel einen unendlich langen abgekürzten Kegel bilden, u. s. w.

§. 386. Wie nun die durch den Raum an dem Auge vorübergehenden Lichtstrahlen an sich nicht sichtbar, dies vielmehr erst dann sind, wenn sie, auf einen Körper treffend, von diesem in das Auge reflectirt werden, so ist auch der Schlagschatten im Raume an sich selbst nicht — da er überhaupt nichts Positives ist, vielmehr nur die Abwesenheit des Lichtes bedeutet — sondern nur dann wahrnehmbar, wenn er von einem Körper theilweise aufgefangen wird, und zwar erkennt das Auge in diesem Falle ihn und seine Grenzen an dem Ausbleiben der Reflexion an den durch den Schatten verursachenden Körper der Erleuchtung beraubten Theilen des den Schatten auffangenden Körpers.

§. 387. Fängt man die Schlagschatten der oben angeführten Objecte auf einer Fläche auf, so bilden sie hierauf Figuren, welche der Gestalt der Schatten werfenden Körper in der Weise entsprechen, daß, wenn an die Stelle des Lichtes das Auge träte, die Grenzen der aufgefangenen Schlagschatten mit den dann sichtbaren Grenzen der Körper zusammenfallend erscheinen würden. Da die unter dieser Annahme sichtbaren Grenzen der Körper an diesen selbst auch die wirklichen Grenzen zwischen deren beleuchteten und nicht beleuchteten Theilen, also die Schattengrenzen sein müssen, so sind die Schlagschattengrenzen insbesondere als die Schlagschatten der Schattengrenzen an den Körpern selbst anzusehen.

Digitized by Google

§. 388. Die Perspectiven der Schlagschattengrenzen werden deshalb auch in Verbindung mit denen der Schattengrenzen an den Körpern selbst construirt.

Der Kürze wegen werden in der Folge beide Schattenarten durch die Bezeichnungen Schlagschatten und Objectschatten unterschieden werden.

§. 389. Wenn das Licht nicht von einem Punkte, sondern von einem Körper von gewisser Größe, also von einer Menge bei einander liegender Punkte ausgeht, so verursacht jeder derselben einen besondern Object- und einen entsprechenden Schlagschatten. So weit diese Schatten nun von dem Lichte anderer Punkte des leuchtenden Körpers getroffen und dadurch wieder erhellt werden, nennt man sie Halbschatten. Die verhältnißmäßig kleine Stelle im Schatten, welche durch keinen der leuchtenden Punkte erhellt wird und deshalb am dunkelsten ist, nennt man den Kernschatten.

Ist in Fig. 112 (Taf. 18) der Kreis um L der leuchtende Körper, etwa eine der Kugelform sehr nahe kommende Milchglaskuppel einer Lampe, ist ferner der Kreis um K der beleuchtete Körper, eine Kugel, und das Viereck daneben eine Tafel, welche den Schlagschatten der letztern auffängt, so beleuchtet der Punkt A nur das Stück $\alpha^1 1 \alpha$ der Kugel, und es ist das Stück $\alpha^1 s \alpha$ mit der Grenze $\alpha^1 \alpha$ der Objectschatten; auf der Tafel aber ist der (perspectivische) Kreis durch a^1 und a der Schlagschatten. Der dem Punkte A entsprechend liegende Punkt B beleuchtet andererseits das Stück $\beta^1 1 \beta$ der Kugel, und es ist das Stück $\beta^1 s \beta$ mit der Grenze $\beta^1 \beta$ der Objectschatten, auf der Tafel aber der Kreis durch b^1 und b der entsprechende Schlagschatten. An der Kugel wird demnach das Stück $\beta \alpha^1$ des dem Punkte A entsprechenden Objectschattens durch das Licht des Punktes B wiedererhellt, sowie andererseits das Stück $\alpha \beta^1$ durch das Licht des Punktes A wiedererhellt wird. Außerdem erhellt noch das Licht der zwischen B und D und zwischen A C liegenden Punkte die erwähnten Objectschatten bis δ und γ hin. Es folgt daraus, und, da Aehnliches mit allen innerhalb der Kugelzone $\alpha^1 \delta \gamma \beta^1$ gelegenen Stellen vorgeht, daß diese Zone Halbschatten hat.

Digitized by Google

In gleicher Weise wird auf der Tafel das Stück $b a^1$ des dem Punkte A entsprechenden Schlagschattens durch das Licht des Punktes B, andererseits das Stück $a b^1$ des dem Punkte B entsprechenden Schlagschattens durch das Licht des Punktes A wiedererhellt. Außerdem werden diese Schlagschatten noch durch das Licht der zwischen B und D und zwischen A und C liegenden Punkte bis zu der Peripherie des durch d und c gehenden Kreises wiedererhellt, so daß, da Gleiches auch in der Ausdehnung g h und in allen anderen Ausdehnungen vorgeht, der ganze Schlagschattenring um den Kernschatten d c, welcher, von dem Lichte keines Punktes erreichbar, am dunkelsten ist, als Schlagschatten der Halbschattenzone $\alpha^1 \delta \gamma \beta^1$ vorliegt. Er ist selbst ein Halbschatten, kommt aber in der Nähe des Kernschattens diesem an Dunkelheit ziemlich nahe, weil hier weniger Punkte des leuchtenden Körpers auf ihn erhellend zu wirken vermögen oder, anders ausgedrückt, sich hier die mehrsten Schlagschatten decken.

An der Kugel K selbst wird nur das Stück $\delta s \gamma$ von dem Lichte keines Punktes des leuchtenden Körpers L getroffen und hat deshalb vollkommenen Schatten. In dem vollkommen beleuchteten Stücke $\alpha^1 l \beta^1$ ist in und um den Punkt l das sogenannte „höchste Licht"; denn hier fallen die mehrsten Strahlen nahezu rechtwinklig ein, und ist dieser Punkt dem leuchtenden Körper zugleich am nächsten. Nach α^1 und β^1 hin stuft sich die Helligkeit des Stückes $\alpha^1 l \beta^1$ wegen der Schiefheit der dort einfallenden Strahlen in der Weise ab, daß das Auftreten der Halbschattenzone bei $\alpha^1 \beta^1$ kaum merklich ist.

Aus Fig. 113 (Taf. 18) ist zu ersehen, inwiefern die Größe des §. 390.
leuchtenden und des beleuchteten Körpers und die Entfernung derselben von einander sowohl, als von dem den Schlagschatten auffangenden Körper von Einfluß auf die Bildung und die Dunkelheitsabstufung des Schlagschattens sind. Auf der Tafel I ist, weil sie gerade durch die Spitze des Schlagschattenkegels $\alpha x \beta$ geht, der Kernschatten auf einen Punkt x reducirt; auf der Tafel II ist gar kein Kernschatten, alles Halbschatten, da jeder Punkt des Schlagschattens hier noch von dem Lichte irgendwelcher Punkte der leuchtenden Kugel L getroffen wird. Da dies jedoch in geringerem Grade

Digitized by Google

bei den in der Nähe des Mittelpunktes z gelegenen, etwa durch den Kreis f^2 f^3 umschlossenen Stellen der Fall ist, so ist hier sowohl, wie auf der Tafel I in der Nähe von x, der Halbschatten von stärkerer Dunkelheit, als an seinem, übrigens unbestimmt verlaufenden, Rande.

§. 391. Daß die Halbschatten in den Figuren 112 und 113 so große Ausdehnungen haben, hat seinen Grund nicht allein in dem Umstande, daß dort die Lichtquelle nicht ein einzelner Punkt, vielmehr eine Gruppe leuchtender Punkte ist, sondern auch in der großen Nähe des beleuchteten Körpers zum leuchtenden, da hierbei die äußeren Strahlen der Lichtbüschel, die, von den einzelnen Lichtpunkten ausgehend, überhaupt dem beleuchteten Körper zugehen, so stark divergirende sind. Denkt man sich den Körper K in Fig. 113 allmählich in größere Entfernung von L rückend, so werden zugleich die äußeren Strahlen $A\alpha$ und $A\beta$ des Lichtbüschels $\alpha A \beta$, und so auch die der anderen Büschel, immer mehr an Divergenz verlieren; und denkt man K in so ungeheure Entfernung von L gerückt, wie die der Erde von dem Monde oder von der Sonne ist, so ist endlich die Verschiedenheit der Richtung jener Strahlen in der Nähe von K so gering geworden, daß sie, als in Parallelität übergegangen, unbeachtet gelassen werden darf. So ist es für die bildliche Darstellung zu rechtfertigen, daß man hierbei das Sonnen- und Mondlicht als von einem Punkte, dem Mittelpunkte der Sonne oder des Mondes ausgehend, in parallelen Strahlen kommend und darum Halbschatten ausschließend, ansieht.

Das einzige Merkmal einer Verschiedenheit der Strahlenrichtung jener Himmelskörper an irdischen Objecten ist die Unbestimmtheit der Grenzen von Schlagschatten, wenn diese in einiger Entfernung vom Schatten werfenden Körper aufgefangen werden — ein in bildlichen Darstellungen leicht zu beachtender Umstand.

Die bei theilweise bewölktem Himmel oft vorkommende Erscheinung von Sonnenstrahlen, welche, durch Wolkenlücken gehend, stark divergiren, ist kein Beweis für die wirkliche Divergenz der Sonnenstrahlen; vielmehr ist diese Erscheinung nur subjectiv und dahin zu erklären, daß die auch hier als in der That parallel aufzufassenden

Digitized by Google

Strahlen nach der Sonne zu etwa so zu convergiren scheinen, wie die an sich parallelen Schienenstränge einer Eisenbahn nach dem Horizonte zu. —

§. 392. Nachdem nunmehr die Wirkungen sowohl der von leuchtenden Punkten in der Nähe (künstliche Flamme) ausgehenden divergirenden Lichtstrahlen, als der von Punkten in unendlicher Entfernung (Sonne und Mond) ausgehenden parallelen Lichtstrahlen als ausreichend erörtert angesehen werden können, muß hier noch der Wirkungen einer dritten Gattung von Licht mit gleichsam convergirenden Strahlen gedacht werden. Es ist dies das sogenannte atmosphärische Licht oder Tageslicht, welches, wenn die Sonne bei sonst klarem Himmel von einer Wolke verdeckt ist, von den Lufttheilchen reflectirt, oder an trüben Tagen von dem die Sonne verdeckenden Wolkenschleier reflectirt und refractirt zur Erdoberfläche gelangt. Seine in allen Richtungen durcheinander leuchtenden Strahlen wirken auf die Objecte im Freien, wie wenn sie von einer über diese gestülpten, mit ihrer inneren Fläche leuchtenden Halbkugel herrührten.

§. 393. Ist in Fig. 114 (Taf. 18) das Dreieck A B C der Grundriß eines in freiem Felde stehenden dreiseitigen Prismas, der Kreis darum der Horizont, d. h. die scheinbare Grenze zwischen Himmel und Erde, so empfängt zunächst die obere Grundfläche des Prismas das Licht der ganzen leuchtenden Halbkugel, des Himmels. Jede lothrechte Prismafläche aber, wie B C, empfängt nur das Licht einer Hälfte des Himmels, und wirft dabei vor sich eine unendliche Menge dreieckiger Halbschatten, welche von dem aus rückwärts liegenden Gegenden, wie 1 und 11, 2 und 12, 3 und 13 u. s. w. kommenden Lichte verursacht werden. Während nämlich auf den etwa von 1 und 11 verursachten Schatten außer dem halben Himmel H M J noch die großen Stücke von H bis 1 und von J bis 11 wiedererhellend wirken, vermögen auf einen etwa von 8 und 18 verursachten Schatten außer dem halben Himmel H M J nur die kleinen Stücke H 8 und J 18 erhellend zu wirken, weshalb jene weitabfallenden Schatten fast aufgehoben, die in großer Nähe, dicht bei s liegenden aber, wenn auch mit sehr verschwommenen Umrissen, erkenn-

Digitized by Google

bar bleiben. Von den anderen Prismaflächen ist ein Gleiches nachzuweisen.

§. 394. Auf eine lothrecht stehende Fläche A B C D (Fig. 115, Taf. 18), welche von einer horizontalen Fläche C D E F überdacht ist, wirft die letztere ebenfalls eine unendliche Menge dreieckiger Halbschatten, welche weiter ab von D C durch die seitlich einfallenden Strahlen wieder aufgehoben werden, in größerer Nähe jedoch zu D C, etwa bei s, in einem kleinen, unbestimmt begrenzten Halbschatten-Dreieck erkennbar bleiben.

§. 395. Uebrigens wirkt das atmosphärische Licht, in der Bedeutung als reflectirtes Licht, erheblich modificirend auf die Dunkelheit der der Sonne entsprechenden Schatten im Freien.

Von besonderm Interesse ist dieses Licht, wenn seine Strahlen durch eine Oeffnung in einen übrigens umschlossenen Raum, durch das Fenster in ein Zimmer dringen. Wegen der in diesem Falle eigenthümlichen Gestaltung der Schatten sind weiter unten, in Kap. 20, auch einige dem atmosphärischen Lichte entsprechenden Schattenconstructionen vorgeführt. —

§. 396. Von dem erheblichsten Einflusse auf den Grad der Dunkelheit der Schatten im Allgemeinen ist das reflectirte Licht, und, wegen seiner großen Leuchtkraft, namentlich das reflectirte Sonnenlicht.

Setzt man, um der täuschenden Einwirkung der verschiedenen Farben der Körper auf das Urtheil über den Dunkelheitsgrad der Schatten zu entgehen, gleiche, am besten weiße Färbung für den Schatten werfenden wie für den Schatten fangenden Körper voraus, so ist im Allgemeinen der Schlagschatten dunkler als der Objectschatten, weil er nur auf solche Flächen fallen kann, welche bei Beseitigung des Schlagschatten werfenden Körpers von directem Lichte beleuchtet sein würden und demnach der Seite abgewendet sind, von woher wirksame Reflexe kommen können. Deshalb ist er auch, wenn er über gekrümmte Flächen fällt, auf diesen immer da am dunkelsten, wo sonst die höchsten Lichter sein würden. Der Objectschatten liegt hingegen stets auf der Seite der Körper, welche dem reflectirten Lichte am meisten ausgesetzt ist. Dem entsprechend ist auch seine

Digitized by Google

Dunkelheit, wenn er Körpern angehört, die von krummen Flächen begrenzt sind und sich deshalb zur Beobachtung besonders eignen, am geringsten auf solchen Flächentheilen, die zu der Richtung des directen Lichtes nahezu rechtwinklig gerichtet sind, und am stärksten auf den Flächentheilen, deren Richtung sich der des directen Lichtes nähert; d. i. gewöhnlich in der Nähe der Grenze des Objectschattens.

§. 397. Befindet sich aber ein anderer reflectirender Körper in der Nähe auf der Seite des Objectschattens, so wird dadurch diese allgemeine Anordnung des Dunkelheitsverhältnisses in letzterem in einer Weise modificirt, die sich am deutlichsten an einem Beispiele, Fig. 116 (Taf. 20), erläutern läßt:

Hier bedeuten die beiden concentrischen Kreisstücke den Grundriß eines zwischen A und B ausgeschnittenen hohlen Cylinders, der von Sonnenlicht, das hier des besseren Verständnisses halber in unter sich gleich entfernte einzelne Strahlen zerlegt vorgeführt ist, beleuchtet wird.

Von der äußeren Fläche des Cylinders ist die Hälfte D F E beleuchtet, in F wäre das höchste Licht; die andere Hälfte D H E hat Objectschatten. Nimmt man nun in einiger Entfernung vom Cylinder auf der Seite des Objectschattens und in der Richtung des Strahles 9 H einen gleichfalls von der Sonne beleuchteten Körper an, so treffen die von diesem reflectirten Strahlen den Cylinder am reichlichsten und am wenigsten schief in der Nähe von H, weshalb sein Objectschatten hier am wenigsten dunkel erscheinen wird. — Nimmt man den reflectirenden Körper in größerer Nähe bei dem Cylinder an, wie etwa die zu den Sonnenstrahlen normal gerichtete Tafel T U, so fängt diese zwischen d und e den Schlagschatten des Cylinders auf; sie vermag an dieser Stelle nicht allein selbst nicht zu reflectiren, sondern sie verhindert hier auch den Zugang des von anderen Körpern hinter ihr reflectirten Lichtes; es wird deshalb der Objectschatten in der Umgebung von H am dunkelsten sein. Die regelmäßige Reflexion an den Stellen d T und e U der Tafel fände derart statt, daß die Sonnenstrahlen in sich selbst und nicht in der Richtung nach dem Cylinder zu reflectirt würden;

Digitized by Google

die aber an jenen Stellen unregelmäßig reflectirten Strahlen treffen den Objectschatten aus größter Nähe, am reichlichsten und am wenigsten schief bei C und bei N, weshalb derselbe hier mehr als bei D, bei H und bei E erhellt sein wird. — Nimmt man jedoch die reflectirende Tafel schief zu den Sonnenstrahlen, etwa wie S V gerichtet an, so fällt der Schlagschatten zunächst wieder zwischen d^1 und e^1. Es ist derselbe zwischen Q und e^1 dunkler als zwischen Q und d^1, weil er wegen der Nähe des Cylinders dort nur spärlich von seitlich einfallenden Reflexen wiedererhellt werden kann; darum vermag er von dort aber auch um so weniger erhellend auf den Objectschatten zwischen H und W zu wirken, und ist dieser deshalb hier, und besonders bei H, am dunkelsten. Während ferner die von dem Stücke d^1 S regelmäßig reflectirten Strahlen sich von dem Cylinder abwenden, erhellen die von dem Stücke e^1 V reflectirten die ihnen naheliegenden Theile des Objectschattens sehr erheblich, und besonders bei C, da sie ihn hier aus größter Nähe, am reichlichsten und am wenigsten schief treffen; und zwar wird diese Wirkung durch die unregelmäßig reflectirten und bis gegen W hin wirkenden Strahlen nur noch verstärkt. Auf der andern Seite des Objectschattens wird durch die unregelmäßige Reflexion N augenscheinlich mehr als D erhellt sein.

Was die innere Cylinderfläche betrifft, so sind davon die einen Hälften der Stücke A β a und B α b Object-, die anderen Hälften Schlagschatten. Das allein von directem Lichte getroffene Stück a r b hat bei r das höchste Licht, weil hier der eine Strahl normal, und dessen benachbarte Strahlen nahezu normal einfallen. Verfolgt man die Richtungen der von den Punkten l, g und a reflectirten Strahlen, so findet man, daß dieselben die innere Cylinderfläche in näher bei einander liegenden Punkten und an sich weniger schief gerichtet treffen zwischen B und γ, als zwischen γ und α, und deshalb dort erhellender wirken müssen, als hier. Es ist daher auch das Schattenstück B α b bei α dunkler als bei λ, vollends dunkel aber bei b, wohin kaum wiederholt reflectirte Strahlen zu bringen vermögen. In Bezug auf das Schattenstück A β a ist das Gleiche zu sagen. —

Digitized by Google

§. 398. Für die nun folgenden Constructionen ist die hier mehrfach hervorgehobene Unterscheidung des Lichtes, seinem Ursprunge und der damit zusammenhängenden Strahlenrichtung nach, als Licht, dessen Strahlen

1) von einem Punkte ausgehen und divergiren,

2) von einem Punkte ausgehen und parallel sind,

3) von unendlich vielen Punkten ausgehen und convergiren,

festgehalten, für die einzelnen Kapitel jedoch überschriftlich ausgedrückt worden durch die Bezeichnungen:

1) die künstliche Lichtflamme,

2) Sonnen- und Mondlicht,

3) atmosphärisches Licht.

Bei allen Aufgaben sind die Perspectiven sowohl des Schatten werfenden als des im Schlagschatten befindlichen Körpers, und außerdem die bei ihrer perspectivischen Construction verwendeten Hülfspunkte und -Linien gegeben. Denn, handelt es sich um die Construction der Schatten der von ebenen Flächen begrenzten Körper, so bilden wohl perspectivisch schon vorliegende Kanten selbst die Objectschattengrenzen, und sind auch als solche nach einer kurzen Ueberlegung leicht zu erkennen; in Bezug jedoch auf die Objectschattengrenzen an solchen Körpern, welche ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzt sind, bedarf es stets der besondern Construction ihrer Perspectiven, und sind dazu jene Hülfspunkte und -Linien unentbehrlich.

Siebzehntes Kapitel.

Constructionen.

§. 399. Das Verfahren bei der Construction der Schlagschatten-Perspective eines körperlichen Punktes (einer Spitze) oder einer körperlichen geraden Linie (einer Kante) ergiebt sich von selbst, wenn man festhält, daß der Schlagschatten

Digitized by Google

1) auf der Oberfläche des Schatten fangenden Körpers,
2) in einer durch das Licht und zugleich durch den Punkt, oder die gerade Linie, gehenden Ebene (Lichtebene), demnach in der Schnittlinie dieser mit der Oberfläche liegt, und hierin
3) durch Lichtstrahlen bezeichnet wird, welche durch den gegebenen Punkt, oder die Punkte der gegebenen Linie, gehen.

§. 400. Ist L in Fig. 117 (Taf. 19) der Lichtpunkt, R ein Punkt, dessen auf die ebene Fläche H fallende Schlagschatten-Perspective r construirt werden soll, so kann man nach Obigem, um r zu finden,

1) durch L und R die zur Ebene H normale Lichtebene LFMN annehmen, deren Schnittlinie FM mit der Ebene H construiren, und dieselbe durch einen Strahl, von L durch R gezogen, in r schneiden; man könnte aber auch

2) durch L und R eine zur Ebene H schiefe Lichtebene S annehmen und die Schnittlinie EG beider durch den Strahl Lr in r schneiden.

Da jedoch die perspectivische Construction der Schnittlinien zu einander normaler Ebenen weniger umständlich ist, als die der Schnittlinien zu einander schiefer Ebenen, so giebt man bei der Construction der Schlagschatten von Punkten den normal zur Schatten fangenden Ebene anzunehmenden Lichtebenen den Vorzug, zumal diese dann, wegen der vorwiegend horizontalen und lothrechten Richtung der ebenen Flächen der Objecte, meistens zugleich lothrecht sind. Lothrecht angenommene Lichtebenen sind außerdem bei der Construction der Schattenperspectiven von Körpern mit gekrümmten Oberflächen im Ganzen bequemer anzuwenden, als schiefe Lichtebenen.

§. 401. Die Construction der Perspectiven von Schnittlinien zwischen Ebenen ist in den §§. 322 bis 339 gezeigt worden. — Eine vom Lichtpunkte L (Fig. 117) auf die Schatten fangende Ebene H gefällte, hier normale Linie LF nennt man die Lichtachse, ihren Fußpunkt F auf der Schatten fangenden Ebene den Fußpunkt des Lichtes; doch kommt die Bezeichnung als Lichtachse auch einer zur Ebene H schiefen Linie LE zu, welche, wenn z. B. der

Digitized by Google

Schatten der Linie $R\varrho^1$ gesucht werden soll, mit dieser parallel gegen die Schatten fangende Ebene gezogen wird, und ist dann E dazu der Fußpunkt des Lichtes.

Ist in Fig. 118 (Taf. 19) die Perspective eines Prismas gegeben, in L die eines Lichtpunktes, so ist zunächst F der Fußpunkt des letztern auf der Grundebene, und LF die Lichtachse. Der Fußpunkt auf der erweitert gedachten oberen Prismafläche M ist F^1, die Lichtachse dazu LF^1; der Fußpunkt auf der erweitert gedachten Prismafläche J ist F^2, und LF^2 die Lichtachse dazu. Soll nun die Schlagschatten-Perspective r^1 eines Punktes R^1 construirt werden, dessen Projection (gleichfalls Fußpunkt) auf der Grundebene der Punkt ϱ, auf der erweiterten Prismafläche J der Punkt ϱ^1 ist, so ist die durch F und ϱ gezogene Linie F (r^2) die Schnittlinie der durch L und R^1 anzunehmenden lothrechten Lichtebene mit der Grundebene, und würde der durch den verlängerten Strahl LR darin abgeschnittene Punkt (r^1) die gesuchte Schlagschatten-Perspective auf der Grundebene sein. Da diese der lothrechten Lichtebene angehörige Schnittlinie aber in a an die lothrechte Prismafläche J stößt, so setzt sie sich auf dieser lothrecht in a b fort und ergiebt in ihrem Schnittpunkte r^1 mit dem Strahle L (r^1) die wirkliche Schlagschatten-Perspective von R^1. §. 402.

Faßte man statt der hier gewählten Lichtebene die zu der erweiterten Prismafläche J normale Lichtebene ins Auge, und zog die den letzteren beiden entsprechende Schnittlinie $F^2\varrho^1$, so erzielte man in dem Schnittpunkte derselben mit dem Strahle L (r^1) kürzer den Punkt r^1.

Soll die Schlagschatten-Perspective r^2 eines lothrecht über R^1 liegenden Punktes R^2 construirt werden, so ist dieselbe in der Fortsetzung der Schnittlinie der zuerst angenommenen Lichtebene mit dem Prisma und zwar auf dessen oberer Fläche M zu finden, zu welcher F^1 der Fußpunkt des Lichtes und ϱ^2 die Projection des Punktes R^2 ist. Zieht man deshalb von F^1 durch ϱ^2, oder gleich durch b eine Linie, so ist diese die Fortsetzung der Schnittlinie, und der durch den verlängerten Strahl LR^2 in ihr abgeschnittene Punkt r^2 der gesuchte.

Digitized by Google

Die Schattenperspective r eines lothrecht unter R^1 liegenden Punktes R fällt, wie der Strahl L r zeigt, vor das Prisma.

§. 403. Da es nach dem gezeigten Verfahren möglich ist, die Schlagschatten-Perspective eines Punktes auf jeder beliebigen Schatten fangenden Ebene zu finden, so ist dasselbe auch zureichend, um die Schlagschatten-Perspective einer geraden Linie zu construiren, da man ja nur der Perspectiven wenigstens zweier ihrer Punkte bedarf, um jene Perspective selbst ziehen zu können.

Faßt man demnach in Fig. 117 die Punkte ϱ und R als Endpunkte einer Linie ϱR, und die Punkte ϱ^1 und R^1 als Endpunkte einer Linie $\varrho^1 R$ auf, so ist ϱr der Schlagschatten der ersteren, und $\varrho^1 r$ der Schlagschatten der andern Linie, da die Schlagschatten der Punkte ϱ und ϱ^1 mit diesen selbst zusammenfallen, und r der Schatten des Punktes R ist. Und sieht man in Fig. 118 die Punkte ϱ und R als Endpunkte einer Linie ϱR an, so ist ϱr die Schlagschatten-Perspective dieser Linie. So ist ferner die gebrochene Linie $\varrho a b r^2$ die Schlagschatten-Perspective der als Linie aufzufassenden Punktreihe zwischen ϱ und R^2, wie denn überhaupt die Schnittlinie der durch ϱR gehenden lothrechten Lichtebene mit der Grundebene und dem Prisma die Schlagschatten-Perspectiven aller innerhalb derselben Lichtebene denkbaren Objecte enthält.

So wäre hier auch, da g die Schlagschatten-Perspective des Punktes G ist, b g die Schlagschatten-Perspective von b G, diese als gegebene gerade Linie aufgefaßt. Sieht man endlich die erweiterte Prismafläche J als eine Wand, und $R^1 \varrho^1$ als eine zu ihr normale Linie an, so ist das Stück $\varrho^1 r^1$ der Linie $F^2 r^1$, welche die Schnittlinie der Lichtebene $L F^2 r^1$ mit der Wand ist (F^2 ist der Licht-Fußpunkt dazu), die Schlagschatten-Perspective von $\varrho^1 R^1$ auf der Wand.

§. 404. Für die Construction im Allgemeinen am förderlichsten ist es, wenn man dabei an folgender, aus den Figuren 117 und 118 abzuleitenden Regel festhält:

Die Schlagschatten-Perspective einer gegebenen geraden Linie, dieselbe sei normal oder schief zur Schatten fangenden Ebene, findet man, wenn man gegen letztere

Digitized by Google

aus dem Lichtpunkte eine der gegebenen parallele Linie (Lichtachse) zieht, darauf durch die Fußpunkte dieser und der gegebenen Linie auf der Schatten fangenden Ebene eine andere Linie (die Schnittlinie der letztern mit der Lichtebene, d. i. die Schlagschatten-Perspective) zieht und deren Länge durch einen durch den Endpunkt der gegebenen Linie gehenden Strahl abschneidet.

Denn wie jede in der Lichtebene der gegebenen Linie liegende andere, mit dieser parallele Linie, muß auch die aus dem Lichtpunkte selbst der gegebenen Linie parallel zu ziehende und meistens leicht zu construirende Lichtachse die Schatten fangende Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen schneiden, und muß umgekehrt der Fußpunkt einer solchen Lichtachse auf der Schatten fangenden Ebene als ein Punkt der Schnittlinie zu verwenden sein.

Danach wären in Fig. 117 die Schlagschatten ϱr und $\varrho^1 r$ der beiden Linien ϱR und $\varrho^1 R$ auch als dadurch gefunden anzusehen, daß, nachdem dort die den beiden Linien parallelen Lichtachsen LF und LE gezogen worden, in den beiden, von F durch ϱ und von E durch ϱ^1 gezogenen Linien die Schnittlinien der lothrechten Lichtebene $LFMN$ und der schiefen Lichtebene S mit der Schatten fangenden Ebene dargestellt und dieselben durch den Strahl LR beide in r abgeschnitten wurden. §. 405.

In Fig. 118 aber wäre die Schlagschatten-Perspective bg von bG der gegebenen Regel nach dadurch zu ermitteln gewesen, daß man Le perspectivisch parallel bG, dann von e durch b zog und diese Linie durch den Strahl LG in L schnitt. —

Da auch bei den Constructionen der Schatten-Perspectiven gekrümmter Linien (Kanten) und der Körper, welche von krummen Flächen begrenzt sind, die gerade Linie das Constructionsmittel ist, bedarf es für dieselben keiner besondern Erörterung. §. 406.

Digitized by Google

Beispiele.

Achtzehntes Kapitel.

Die künstliche Flamme.

Beispiel 39.

§. 407. **Aufgabe.** In Fig. 119 (Taf. 20) ist die Perspective (P Hauptpunkt, P D_2 halbe Distanz) eines **Zimmers und verschiedener Objecte darin gegeben** — es sollen die Schattenperspectiven der Objecte bei der Annahme des **Lichtpunktes L einer** auf dem Waydtische rechts stehenden **Kerze** construirt und einige Andeutungen über die Abstufung der Erleuchtung gegeben werden.

§. 408. **Ausführung.** Zunächst ergiebt die Feststellung der Fußpunkte des Lichtes auf den verschiedenen Wandflächen (die hier nach den ihnen entsprechenden Fußpunkten benannt sind), der Decke und dem Fußboden zugleich die Orte der hellsten Erleuchtung dieser Flächen. Es wird die rechte Seitenwand in der Nähe des Fußpunktes F^2 am hellsten von allen, von dieser Stelle an aber nach allen Seiten hin verhältnißmäßig stärker abnehmend erleuchtet sein, als dies bei den übrigen Flächen der Fall ist, weil wegen der großen Nähe des Lichtes die Strahlen schon in kleiner Entfernung von F^2 sehr spitzwinklig einfallen. Aehnliches ist in Bezug auf die schiefe Wand rechts zu sagen, deren Licht-Fußpunkt F^3 in ihrer Verlängerung liegt. Auch für die Flächen der anderen Wände und Objecte ist festzuhalten, daß sie in der Nähe ihrer Licht-Fußpunkte am hellsten erleuchtet sind; es ist aber auch des Grundgesetzes zu gedenken, daß die Stärke der Erleuchtung der Objecte im quadratischen Verhältnisse zu der Zunahme ihrer Entfernung vom Lichte abnimmt. Wie schwer es dabei ist, den Helligkeitsgrad der Flächen mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, ist klar, wenn man bedenkt, daß, wenn in einem Falle die Nähe eines Objectes zum Lichte es als stark erleuchtet erscheinen lassen möchte, dieser Vorzug, wie bei der Wand rechts, wieder durch ein zu spitzwinkliges Einfallen der Strahlen aufgehoben werden kann; und daß ferner, wenn wirklich der

Digitized by Google

Erleuchtungsgrad für zwei Objecte unter Berücksichtigung ihrer Entfernung vom Lichte und der Einfallswinkel der Strahlen vergleichsweise festgestellt wäre, das Urtheil wieder durch einen dritten Factor, nämlich durch die Einwirkung der von anderen in der Nähe befindlichen Objecten regelmäßig oder unregelmäßig reflectirten Strahlen unsicher gemacht wird, abgesehen von dem nicht minder in Betracht kommenden Einflusse, welchen die Farben der Objecte, die Beschaffenheit ihrer Oberflächen und die Größe der Winkel, unter welchen das Auge die letzteren sieht, auf das Urtheil üben. Will man sich demnach nicht mit einer nur ungefähren Schätzung begnügen, so muß man — was für alle Fälle besonders zu empfehlen ist — die Natur selbst zu Rathe ziehen.

§. 409. Der Schlagschatten des Tisches, auf welchem das Licht steht, wird gefunden, wenn man entweder vom Fußpunkte F^2 durch A bis β am Fußboden (Grundebene) zieht, durch β eine der A B parallele Linie β b legt, diese durch den Strahl L B in b abschneidet, dann b c perspectivisch parallel B C zieht und wieder durch den Strahl L C abschneidet u. s. f.; oder wenn man die Projectionen b° und c° der Punkte B und C auf dem Fußboden feststellt, vom Fußpunkte F aus durch b° und c° gezogene Linien durch Strahlen in b und c abschneidet und durch diese Punkte b β u. s. w. zieht.

§. 410. Um den Schlagschatten des links auf dem Fußboden stehenden Prismas zu finden, werden zuerst diejenigen seiner lothrechten Kanten gesucht, indem man durch deren Fußpunkte H°, G° und E° vom Licht-Fußpunkte F aus Linien zieht und diese durch die Strahlen L H, L G und L E in h, g und e schneidet. h und e sind darauf durch gerade Linien mit (g) zu verbinden. Da aber G° (g) in γ an die lothrechte Wand F^5 stößt und deshalb der Schlagschatten von G auf diese fallen muß, so wird durch γ eine Lothrechte gezogen und in deren Schnittpunkte g mit dem Strahle L G der wirkliche Schlagschatten von G ermittelt. Schließlich sind noch von g Linien nach den Punkten zu ziehen, in welchen h (g) und e (g) an die Wand stoßen.

§. 411. Von der Pyramide wird zunächst ihr Schlagschatten O (s) M auf dem Fußboden construirt, indem man vom Licht-Fußpunkte F aus den Schlagschatten S° (s) ihrer lothrechten Achse S° S und dann O (s) und M (s), als die Schatten ihrer Kanten O S und M S, zieht. Da aber der Schatten der Achse in σ an die Wand stößt, so wird durch σ eine Lothrechte

Digitized by Google

gezogen, diese durch den Strahl L S in s geschnitten, und werden nun nach diesem Punkte die an der Wand emporsteigenden Stücke der Schlagschatten der schiefen Kanten O S und M S gezogen. Um den auf das Prisma fallenden Theil des Schlagschattens zu construiren, wird der der oberen Grundfläche des Prismas entsprechende Fußpunkt F^1 in der Lichtachse L F bestimmt und in gleicher perspectivischer Höhe mit ihm innerhalb der Pyramide ein ihrer Grundfläche paralleler Durchschnitt $N^1 O^1 M^1$ gezeichnet; es wird dann eine Linie von F^1 aus durch S^1 über die Prismafläche gezogen und durch den Strahl L S in (s^1) geschnitten, wonach andere Linien, von O^1 und M^1 nach (s^1) gezogen, die Schlagschatten der Kanten O S und M S auf der Prisma-Grundfläche ergeben, während das auf die Seitenfläche des Prismas fallende Schlagschattenstück durch die Verbindungslinie der Punkte i und d begrenzt wird.

§. 412. Den in einer gebrochenen Linie K b p f q über die Stufe, den darauf ruhenden Kasten und die linke Seitenwand fallenden Schlagschatten der in k° auf dem Fußboden stehenden Kante der Nische findet man, wenn man die vordere Kastenfläche sowohl, als die Seitenwand bis zum Fußboden verlängert, sie hier beide durch eine vom Fußpunkte F durch k° gezogene Linie in β und φ schneidet, und darauf durch β die Lothrechte b p und durch φ die Lothrechte f q zieht. Verbindet man schließlich K mit b, und p mit f durch gerade Linien, so haben diese als perspectivisch parallele Linien einerseits die Richtung nach einem gemeinschaftlichen Verschwindungspunkte x, andererseits nach solchen in der Lichtachse L F gelegenen Fußpunkten, deren perspectivische Höhen denen der oberen Flächen der Stufe und des Kastens entsprechen.

§. 413. Um den Schlagschatten des an der Wand F^4 befindlichen Wandtisches und zunächst sein auf diese Wand selbst fallendes Stück zu finden, construirt man auf der über die Nische hinweg erweitert gedachten Wand den Schatten (r) des Punktes R, indem man entweder vom Fußpunkte F^4 durch J eine Linie zieht und diese durch den Strahl L R in (r) schneidet, wonach die Stücke J E und U C der nach diesem Punkte gerichteten Linien J (r) und U (r) das gesuchte Stück des Schlagschattens ergeben; oder indem man die Projection r° des Punktes R auf dem Fußboden bestimmt, von F durch r° bis an die erweiterte Wand in (ϱ) zieht und eine hierdurch gezogene Lothrechte durch den Strahl L R in (r) schneidet. Das auf den Kasten fallende Schlagschattenstück findet man, wenn man vermittelst der Strahlen L E und L C in der Linie b p die Schlagschatten e und c der Punkte E und C feststellt, dann den Schlagschatten r^1 des Punktes R unter der Annahme sucht, daß er auf die seitlich verlängerte

Digitized by Google

lothrechte Kastenfläche fiele; und zwar wird er hier gefunden, wenn man von F durch r° bis ϱ^1 zieht und durch eine durch ϱ^1 gezogene Lothrechte den Strahl L R schneidet. Von e und c nach r^1 gezogene Linien ergeben darauf das über den Kasten fallende Schlagschattenstück; und bricht man diese Linien da, wo sie an die Wand F^5 stoßen, nach r, der eigentlichen Schlagschatten-Perspective von R, um, so wird damit der Schlagschatten des Wandtisches vollendet. r aber ist der Schnittpunkt einer durch ϱ gezogenen Lothrechten mit dem Strahle L R.

Der Schlagschatten des an die Wand F^4 sich lehnenden Stabes A D wird gefunden, wenn man beliebig hoch, hier aber am besten in der Höhe der oberen Fläche des Wandtisches, eine in der lothrechten Neigungsebene des Stabes angenommene, zur Wand perspectivisch normale Linie z° Z bis an den Stab zieht und dann den Schlagschatten z des Punktes Z sucht, indem man von F^4 aus eine Linie durch z° zieht und diese durch den Strahl L Z in z schneidet. Es müssen alsdann eine von A durch z bis δ gezogene Linie den Schatten auf der Wand, und andere, von a° bis Z und von δ bis D gezogene Linien den Schatten auf dem Tische und den auf dem Fußboden ergeben. Eine vierte Linie aber, von dem Schnittpunkte der Linie a° Z mit der vordern Tischkante nach z gezogen, ergiebt den Schatten auf der schiefen Unterfläche des Tisches. §. 414.

So ist auch der Schlagschatten des gegen die Ecke gelehnten Stabes V W zu finden, wenn man zuvor in der lothrechten Neigungsebene des Stabes beliebig die Lothrechte m° M annimmt und dann den Schlagschatten m des Punktes M auf der verlängert gedachten Fußbodenfläche dadurch bestimmt, daß man eine von F durch m° gezogene Linie durch den Strahl L M in m schneidet. Zieht man darauf W m, jedoch nur bis μ, und außerdem V μ, so ist die gebrochene Linie W μ V der Schlagschatten des Stabes. §. 415.

Der Schlagschatten des vornüber geneigten Spiegels an der rechten Seitenwand wird gefunden, wenn man den Schatten (r) des Punktes R zunächst auf der oben verlängert gedachten lothrechten Seitenwand dadurch feststellt, daß man den Strahl L R durch eine vom Licht-Fußpunkte F^2 durch den Fußpunkt r° gezogene Linie schneidet und E (r), jedoch nur bis ε in der Grenze der schiefen Wand, zieht. Ermittelt man darauf auf letzterer in F^3 den in ihrer Verlängerung liegenden Fußpunkt des Lichtes, und in s den des Punktes R (indem man nämlich E r° bis ϱ verlängert, ϱ s parallel F^7 F^6 zieht und R s normal auf ϱ s fällt), und schneidet dann den Strahl L R durch eine von F^3 durch s gezogene Linie in r, so ist dieser Punkt die wirkliche Schlagschatten-Perspective von R, und demnach §. 416.

Digitized by Google

E ε r diejenige der Spiegelkante E R. r q ist perspectivisch parallel R Q zu ziehen u. s. w.

§. 417. Den Schlagschatten der von der schiefen Wand lothrecht herabhängenden Schnur N K findet man, wenn man nach §. 404 in F^7 den Fußpunkt einer mit der N K parallel aus L gegen die schiefe Wand gezogenen Linie feststellt, von F^7 durch N bis $\varkappa$ zieht, dann $\varkappa$ k lothrecht fortsetzt und durch einen Strahl L K in k abschneidet.

§. 418. In gleicher Weise findet man das Stück G γ des auf die schiefe Wand fallenden Schlagschattens des Balkens, wenn man L F^6 parallel den Balkenkanten bis zum Fußpunkte F^6 auf der verlängert gedachten schiefen Wand, und darauf von F^6 aus G γ zieht. Die Richtung des Schlagschattenstückes des Balkens auf der Wand links wird durch Linien, vom Licht-Fußpunkte F^5 aus gezogen, bestimmt.

§. 419. Um den Schlagschatten des Ankers J U zu construiren, bestimmt man zunächst in diesem selbst durch eine beliebige, zu U G perspectivisch normale Linie A B einen Punkt B und sucht den Schatten b desselben, indem man von F^6 durch A eine Linie zieht und dieselbe durch den Strahl L B in b schneidet. U b ist dann die Richtung des Schlagschattens auf der schiefen Wand. Seine Fortsetzung über die horizontale Decke muß nach i, dem durch den Strahl L J bestimmbaren Schatten des Punktes J, gerichtet sein; nach dem Punkte y aber dieser Fortsetzung muß das auf den Balken selbst fallende kurze Schlagschattenstück J h gerichtet sein, da, wenn die vordere Balkenfläche bis zur Decke verlängert gedacht wird, dieselbe in y den Schatten an der Decke schneiden und dieser sich alsdann auf ihr in der Richtung y J fortsetzen würde.

Beispiel 40.

§. 420. **Aufgabe.** In Fig. 120 (Taf. 19) sind in einer Gruppe gegeben die Perspectiven (P Hauptpunkt, P D/$_2$ die halbe Distanz) eines **aufgerichteten**, der Länge nach gespaltenen **Cylinders**, eines **liegenden Cylinders**, eines **Kegels**, einer mit ihrem Pole K auf der Grundebene ruhenden **Kugel**, deren mit der Bildebene zusammenfallende lothrechte Achse K G ist, und einer **Wandfläche** — es sollen unter Annahme einer im Punkte L befindlichen Kerzenflamme, deren Fußpunkte auf der obern Cylinder-Grundfläche F^1, auf der Grundebene F und auf der Wandfläche F^2 sind, die Perspectiven der Object- und Schlagschatten aller Körper und der Orte der höchsten Lichter auf ihnen construirt werden.

Digitized by Google

Die **Ausführung** geschieht im Allgemeinen in der Weise, daß mehrere, §. 421.
durch die Lichtachse L F und die Körper gehende lothrechte Lichtebenen angenommen, deren Schnittlinien mit den Oberflächen der Körper construirt, und vom Lichtpunkte aus tangirende Strahlen an die Schnittlinien gezogen werden. Die Berührungspunkte derselben sind dann Punkte der Objectschattengrenzen, ihre Schnittpunkte aber mit den Schnittlinien Punkte der Schlagschattengrenzen.

In der Figur sind zwei solche durch alle Körper zugleich gehenden Lichtebenen angewandt, deren Schnittlinien mit der Grundebene für die erste Lichtebene: w F t, und für die zweite: y F s sind. Durch den liegenden Cylinder ist, um den auf ihn fallenden Schlagschatten zu construiren, eine dritte Lichtebene mit der Schnittlinie 3 F, und durch den stehenden Cylinder sind, um Schlagschattenpunkte seiner oberen Grundfläche zu finden, noch andere, die übrigen Körper nicht treffende Lichtebenen angenommen.

Die Schnitte der Lichtebenen mit der Kugel sind an sich Kreise, der eine ein' größter Kugelkreis; ihre Perspectiven H 1 A 1^1 und J Q B V sind nach Anleitung des §. 245, die Perspectiven aber $1 S^1$ v und o r o^1 der Schnitte mit dem Kegel, von denen der eine ein Dreieck, der andere eine Hyperbel ist, nach Anleitung des §. 256 construirt. Die Schnitte mit dem liegenden Cylinder sind dadurch construirt, daß auf dem Cylindermantel acht gleichweit von einander entfernte Seiten, wie N P, T P, S P, T^1 P u. s. w., und auf der Grundebene deren Projectionen Q P, τ P, σ P u. s. w. dargestellt wurden. Durch die Punkte, in welchen letztere durch die Schnittlinien der Lichtebenen geschnitten werden, wie z. B. 1, 2 und 3, sind dann Lothrechte gezogen und die entsprechenden Cylinderseiten dadurch selbst in solchen Punkten 1, 2 und 3 geschnitten worden, durch welche die Schnitt-Perspective gezeichnet werden kann. Die Schnitte durch den stehenden Cylinder, wie z. B. Z K $\varkappa$ ζ, sind Rechtecke.

An dem stehenden Cylinder ist nur seine obere Grundfläche be- §. 422.
leuchtet. Der Schlagschatten der letztern wird gefunden, wenn man durch die den einzelnen Punkten ihrer Peripherie, wie J, B und E, entsprechenden Projectionen auf der Grundebene, wie ι, β und ε, Linien vom Licht-Fußpunkte F aus zieht und diese durch entsprechende Strahlen in i, b und e schneidet. — Da die gerade Kante B E parallel der Grundebene ist, so hat sie mit ihrem Schlagschatten b e denselben Verschwindungspunkt x. — Da übrigens die obere Grundfläche an sich ein Kreis und der Schatten fangenden Grundebene parallel ist, so ist ihr Schlagschatten auf dieser, als ein der Grundfläche des Strahlenkegels paralleler Schnitt, ebenfalls ein

Digitized by Google

Kreis, dessen Perspective mittels des ihn einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in P verschwindet, construirt werden kann, wenn man in a^1 die Schlagschatten-Perspective des Mittelpunktes A^1, und in a^1c die des Halbmessers A^1C ermittelt hat.

§. 423. Die obengedachten beiden Lichtebenen schneiden den Cylinder und den Kegel in der gebrochenen Linie $K\varkappa 1 S^1$ und in der gebrochenen, zum Theil gekrümmten Linie $R\varrho o r T o^1$. Zieht man nun durch K und R Strahlen, so schneiden diese die Kegelschnitte in den Punkten k und r, die demnach Punkte des über den Kegel fallenden Schlagschattens sind, so wie h ein solcher Punkt ist, da b e in ihm an den Kegel stößt. — Der Object- und der Schlagschatten des Kegels werden gefunden, wenn man zuvörderst den Schatten $S^1 s$ seiner Achse $S^1 S$ sucht und dann von s aus Tangenten $s\vartheta$ und $s\tau$ an die Grundfläche zieht, worin sich die Schlagschattengrenzen ergeben. Zieht man darauf von den Berührungspunkten ϑ und τ nach der Spitze S^1 die Kegelseiten ϑS^1 und τS^1, so sind diese die Objectschattengrenzen. Fiele der Punkt s so entfernt, daß er nicht darzustellen wäre, so müßte durch einen, an einem Schnitte wie $o r T o^1$ tangirenden Strahl L t in T ein Punkt der Object-, und in dessen Schlagschatten t ein Punkt der Schlagschattengrenze construirt werden, wonach an der Kegel-Grundfläche die Tangente $t\tau$, und die Kegelseite τS^1 ebenfalls gezogen werden können. — Ein anderes, freilich umständlicheres Verfahren, die Objectschattengrenze am Kegel zu construiren, ist in §. 571 vorgeführt. (S. außerdem auch §. 451.)

Die hellste Erleuchtung ist in der Kegelseite $1 S^1$, in welcher die durch die Achse gehende Lichtebene den Kegelmantel schneidet. Andererseits ist aber auch hier das Stück 1 k des Schlagschattens des Cylinders am dunkelsten, weil diese Kegelseite reflectirenden Flächen am meisten abgewandt ist (§. 396). Der Ort des höchsten Lichtes ist im Fußpunkte einer vom Lichtpunkte L perspectivisch normal zu der Kegelseite $1 S^1$ gezogenen Linie, und zwar in der Verlängerung von $1 S^1$ über S^1 hinaus zu finden. Der Verschwindungspunkt u dieser normalen Linie ist in der lothrechten Grenzlinie (ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) der durch die Kegelachse gehenden Lichtebene als correspondirender Verschwindungspunkt zu dem Verschwindungspunkte y der Kegelseite $1 S^1$ gelegen. (S. auch hierzu §. 571.)

§. 424. Die Grundflächen des liegenden Cylinders liegen im Schatten. Die Objectschattengrenzen des Cylindermantels sind Cylinderseiten, welche perspectivisch parallel der Achse durch diejenigen Punkte der Cylinderschnitte zu ziehen sind, in welchen die letzteren durch Strahlen berührt werden. Durch die Punkte, in welchen dieselben Strahlen die Grundebene treffen,

Digitized by Google

gehen die der Achse parallelen Schlagschattengrenzen des Mantels. Die Punkte r und o, in welchen die Kugelschnitte durch jene Strahlen zuerst geschnitten werden, sind Punkte der Grenze des auf die Kugel fallenden Schlagschattenstückes. — Der Schlagschatten der vorderen Grundfläche wird am kürzesten gefunden, wenn man durch Punkte der Peripherie, wie N, T, S, T^1 u. s. w., Ordinaten zur Grundebene zieht und deren Schlagschatten construirt, indem man vom Licht-Fußpunkte F aus Linien durch die Fußpunkte Q, τ, σ u. s. w. jener Ordinaten zieht und dieselben durch die Strahlen L N, L T, L T^1, L S u. s. w. in n, t, t^1, s u. s. w. schneidet.

An sich ist dieser Schlagschatten der kreisförmigen Grundfläche eine Ellipse, deren ebenfalls elliptische Perspective man jedoch wie eine Kreisperspective vermittelst eines einschließenden Quadrates construiren kann, wenn man zuvor den Schlagschatten a des Mittelpunktes A, a s als den des Halbmessers A S feststellt, und dann eine durch den Licht-Fußpunkt F gehende, der Schatten werfenden Kreisebene perspectivisch parallele, hier also horizontale Grenzlinie für die zu supponirende Ebene (der als Kreisperspective aufgefaßten Schattenellipse) dazu wie einen Horizont, F darin als Hauptpunkt, und die Höhe F L des Lichtes über F als Distanz verwendet. Stände die Cylinder-Grundfläche schief zur Bildebene, so ließe sich eine derartige Construction der Perspective der Schlagschatten-Ellipse ähnlich ausführen, wäre jedoch wegen ihrer Umständlichkeit nicht zu empfehlen. —

Punkte des von dem aufgerichteten auf den liegenden Cylinder fallenden Schlagschattens, wie g, z und d, findet man, wenn man die krummen Cylinderschnitte durch Strahlen schneidet, welche durch die ihnen entsprechend liegenden Punkte G, Z und D der oberen Grundfläche des stehenden Cylinders gezogen werden.

Die am hellsten erleuchtete Cylinderseite findet man, wenn man den Mittelpunkt m eines Cylinderschnittes, in der Figur etwa des der ersten Lichtebene entsprechenden, feststellt, letzteren durch einen nach m gerichteten Strahl in l schneidet und durch diesen Punkt jene Cylinderseite zieht. Das höchste Licht würde in dieser Seite da liegen, wo eine zur Cylinderachse normale Lichtebene sie schneidet, weshalb man besser die Ermittelung von l sogleich in dem Schnitte einer solchen Ebene vornimmt.

Punkte des Objectschattens an der Kugel, wie H, J, B und A, findet §. 425.
man da, wo aus dem Lichte an die Kugelschnitte gezogene Strahlen diese berühren. Und wo dieselben Strahlen die Grundebene oder die Wand treffen, liegen die entsprechenden Punkte h, i, b und a der Grenze des Schlagschattens. e ist der Schlagschatten des Punktes E, in welchem der

Digitized by Google

Cylinder-Schlagschatten den Objectschatten der Kugel schneidet. — Das höchste Licht liegt in dem Lichtpole l, in welchem ein vom Lichtpunkte L nach dem Kugel-Mittelpunkte C gezogener Strahl den in seiner Lichtebene liegenden größten Kugelkreis schneidet. l^1 ist hiernach der dem Lichtpole entgegengesetzte Pol.

In dem nächstfolgenden Beispiele wird Anleitung gegeben werden, die Schatten der Kugel ohne vorherige Construction von Kugelschnitten perspectivisch darzustellen. —

§. 426. An Körpern, welche von anderen krummen Flächen begrenzt sind, als die hier vorgeführten einfachen geometrischen Körper, construirt man zuvor die Schnittfiguren der Lichtebenen, wie dies in §. 255 am Kegel gezeigt ist, und ermittelt dann die Schattengrenzen, wie hier, durch tangirende Strahlen.

Beispiel 41.

§. 427. **Aufgabe.** In Fig. 121 (Taf. 21) ist um den Mittelpunkt C die Perspective (P Hauptpunkt, O herabgeschlagener Gesichtspunkt) einer mit ihrem Pole K auf der Grundebene ruhenden **Kugel** gegeben, deren mit der Bildebene zusammenfallende lothrechte Achse KG ist. L ist die Perspective des **Lichtpunktes einer Kerze**, deren Fußpunkt auf der Grundebene F ist — es sollen die Perspectiven der Object- und Schlagschattengrenzen der Kugel, des Poles im höchsten Lichte und des diesem entgegengesetzten Poles construirt, und Anleitung zur Construction der Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem, dem Lichte ausgesetzten Kugelabschnitte gegeben werden.

§. 428. Die **Ausführung** giebt Gelegenheit, die in dem 33. Beispiele ausgeführten Constructionen praktisch anzuwenden; denn die Objectschattengrenze, an sich ein Kugelkreis (Strahlen-Berührungskreis), welcher beschrieben wird durch den die Kugel berührenden Strahlenkegel, ist als Schnittfigur der Kugel mit einer Ebene zu construiren, welche normal zu dem vom Lichtpunkte nach dem Kugel-Mittelpunkte denkbaren Strahle (Strahlenkegel-Achse) ist. Das geometrische Maß des Halbmessers des Berührungskreises und des Abstandes seines Mittelpunktes vom Kugel-Mittelpunkte sind am sichersten durch eine geometrische Hülfsconstruction zu ermitteln. Die Lage der Ebene des Berührungskreises geht schon aus den perspectivischen Orten der gegebenen Stücke hervor und ist auch ihre

Digitized by Google

Grenzlinie danach zu ermitteln. Da diese Ebene nämlich normal zu der Strahlenkegel-Achse C L gerichtet ist, deren Verschwindungspunkt der Punkt S in der lothrechten Grenzlinie S s (F^1 Hauptpunkt, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) der durch C und L gehenden Lichtebene ist, so muß ihre Grenzlinie einerseits durch den Punkt s (Parallelstrahl ω s normal zu Parallelstrahl ω S), andererseits durch den Punkt ε (Parallelstrahl O ε normal zu Parallelstrahl O F^1) gehen. Es muß demnach s e ihre Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ und Δ^1 Distanzpunkte, S Verschwindungspunkt für normale Linien) sein, und muß dem Vorhergehenden nach die Neigung der Ebene unter die Grundebene gleich dem (53° großen) Winkel $F^1 \omega$ s sein, während der Abweichungswinkel ihrer Schnittlinie mit der Grundebene von der Verticalebene gleich P O ε ist. Die Richtigkeit der ermittelten Größe des Neigungswinkels wird bestätigt durch die vorerwähnte geometrische Hülfsconstruction der Aufrißprojection der Kugel und der Kerze, und kann dieselbe in der Figur selbst unter Benutzung des Kreises um C ausgeführt werden. Macht man hier nämlich vermittelst des der perspectivisch horizontalen Linie K F^1 entsprechenden Theilpunktes ω das Maß K φ geometrisch gleich dem perspectivischen Maße K F, und die Lothrechte $\varphi \lambda$ geometrisch gleich der perspectivischen Größe F L, so liegt in dem Kreise um C und in der Linie $\varphi \lambda$ die geometrische Aufrißprojection der Kugel und der Kerze vor. Zieht man nun aus λ die Tangenten λ B und λ A an den Kreis, und innerhalb desselben die Sehne B A, so ist deren Länge das geometrische Maß des Durchmessers des Strahlen-Berührungskreises, M C der geometrische Abstand seines Mittelpunktes vom Kugel-Mittelpunkte, N der Punkt, in welchem seine Ebene die Bildebene schneidet, und φ W σ der, wie vorher schon ermittelt, (53° große) Winkel, um welchen seine Ebene sich unter die Grundebene neigt. Hiernach ist zunächst durch N die der Grenzlinie s ε parallele Grundlinie β u der schiefen Berührungskreisebene, und von u nach ε die Schnittlinie der letztern mit der Grundebene zu ziehen. Ferner ist die Perspective m des Mittelpunktes M des Berührungskreises, da sie offenbar in einer zu der Ebene des letztern normalen, von C nach L gerichteten Linie, zugleich aber auch in einer innerhalb der Lichtebene von N aus sich um 53° senkenden Linie N s liegt, im Schnittpunkte von C S und N s zu bestimmen; oder auch dadurch, daß man C q geometrisch gleich C M macht und dieses Maß vermittelst des der Linie C S entsprechenden Theilpunktes t S perspectivisch in C m überträgt. Die perspectivische Länge des der Grenzlinie s ε parallelen Durchmessers i e des Berührungskreises findet man endlich, wenn man von H^1 durch m bis μ in der schiefen Grundlinie zieht, hier $\mu \beta$ und $\mu \alpha$

Digitized by Google

geometrisch gleich M B und M A macht und dann, von β und α nach H^1 ziehend, auf dem Durchmesser die Punkte i und e abschneidet, wonach die Perspective des Strahlen-Berührungskreises, mit anderen Worten: der Objectschattengrenze, vermittelst des einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in H^1 verschwindet, construirt werden kann. Nach der Vollendung müssen die Punkte b, N, m, a und w in einer nach s gerichteten Linie liegen, wie die Punkte B, N, M, A und W der geometrischen Hülfsconstruction in einer sich um 53° unter die Grundebene senkenden Linie liegen. —

Den größtentheils außerhalb des Constructionsraumes fallenden Schlagschatten, welcher an sich eine Ellipse bildet, deren Perspective jedoch eine Hyperbel ist, findet man, wenn man, wie bisher immer, die Schlagschatten-Perspectiven einzelner Punkte der Objectschattengrenze, wie z. B. von a und r, sucht. Zu dem Zwecke zieht man von a und r Linien a H^1 und r H^1 nach H^1 (Ordinaten) und bezeichnet sowohl deren-Fußpunkte auf der Grundebene in δ und ϱ der Schnittlinie u ε, als den Fußpunkt F^2 einer jenen Ordinaten parallelen, also nach H^1 gerichteten Linie L F^2 auf der Grundebene, indem man nämlich zunächst die Schnittlinie u ε durch eine von m nach H^1 gezogene Linie in τ, und darauf L H^1 durch eine von τ nach P gezogene Linie in F^2 schneidet. Zieht man alsdann Linien von F^2 durch δ und ϱ und schneidet sie durch Strahlen, von L durch a und r gezogen, in v und r^1, so sind dies Punkte der Schlagschatten-Hyperbel. Mehr Punkte derselben lassen sich nach Erfordern auf dieselbe Art construiren. Die Perspective m^1 der Mittelpunkte C und m der Kugel und des Berührungskreises liegt gleichfalls im Schnittpunkte einer von F^2 durch τ gezogenen Linie mit einem von L durch m und C zugleich gehenden Strahle. Wie die geometrische Hülfsconstruction V als Schlagschatten von A ergiebt, so hat sich in der perspectivischen Construction v als Schatten von a ergeben und wäre derselbe auch, im Anschlusse an die geometrische Construction, in der Linie K F^1 durch eine von V nach ihrem Theilpunkte ω gezogene Linie zu bestimmen gewesen. —

Die Perspectiven l und l^1 des Lichtpoles und des diesem entgegengesetzten Poles findet man, wenn man in der Strahlenkegel-Achse C S vermittelst des ihr entsprechenden Theilpunktes t S die Stücke C l und C l^1 perspectivisch gleich C G und C K macht. —

Construirt man noch unter Anwendung des Hauptpunktes H^1 die Perspectiven mehrerer dem Kreise um m parallelen kleineren Kugelkreise bis nach dem Pole l hin, wobei man deren Durchmesser und Mittelpunkte zuvor durch Linien, welche man in der geometrischen Hülfsconstruction

Digitized by Google

parallel B A zieht, geometrisch ermittelt und dann perspectivisch überträgt, wie dies mit B A geschehen, so ergeben dieselben die Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem dem Lichte ausgesetzten Kugelabschnitte. Als deren eine und zwar als die mit der Grenzlinie s ε zusammenfallende ist das Stück 2. 3 der letztern selbst anzusehen, welches die Kugelperspective in ihr abschneidet. —

Im 47. Beispiele (§. 469) ist die Construction der Perspectiven der Schatten u. s. w. dieser Kugel unter Annahme der Sonnen-Perspective im Punkte S gezeigt.

Beispiel 42.

Aufgabe. In Fig. 122 (Taf. 20) ist die Perspective (P Hauptpunkt, D Distanzpunkt) eines **Kreuzgewölbes** und die des **Lichtpunktes** L einer Kerzenflamme gegeben — es sollen die Perspectiven der höchsten Lichter im Gewölbe und der Object- und Schlagschatten darin construirt werden. §. 429

Die **Ausführung** erfordert die Anwendung des Verfahrens, welches im §. 424 bei der Construction der Schatten an dem liegenden Cylinder eingeschlagen wurde. Stellt man zunächst die Fußpunkte F, F^1 und F^2 des Lichtes auf der Grundebene (dem Fußboden), auf der Ebene der der Bildebene parallelen Wölbungscurve V n J und auf der verlängerten Ebene der linken Seitenwand fest, und zieht alsdann eine Linie von F^1 durch den Mittelpunkt m der halbkreisförmigen Wölbungscurve bis 1 in deren Peripherie, und von 1 nach P die Cylinderseite 11^1, so bezeichnet diese den Ort des höchsten Lichtes in den Kappen U und X. Zieht man ferner von F^1 aus eine Tangente F^1 n an die Wölbungscurve, und durch n die ebenfalls nach P gerichtete Cylinderseite, so bezeichnet diese die Objectschattengrenze in denselben Kappen; n aber ist zugleich der Punkt, in welchem die Grenze des von der Kante n V H offenbar in das Gewölbe geworfenen Schlagschattens anfängt. Zieht man ebenso vom Fußpunkte F^2 durch den Mittelpunkt m^1 des Bogens über der linken Seitenwand bis 1^2 in der Peripherie und legt durch diesen Punkt die der Bildebene parallele Cylinderseite $1^2 1^3$, so bezeichnet diese den Ort des höchsten Lichtes in den Kappen W und Y, während wieder eine aus F^2 an den Bogen gezogene Tangente die Cylinderseite bezeichnen würde, mit welcher die Objectschattengrenze in jenen Kappen zusammenfällt. Da dieselbe jedoch durch die Gratbogen dem Auge verdeckt wird, bleibt sie hier außer Betracht. §. 430.

Digitized by Google

Wie gesagt, wirft die von n bis V gekrümmte Kante n V H einen Schlagschatten in das Gewölbe. In welche der vier Gewölbekappen zunächst der Schlagschatten des Kämpferpunktes V fällt, ergiebt sich von selbst, wenn man mit der Schlagschatten-Construction des geradlinigen Stückes H V jener Kante beginnt; zu diesem Zwecke vom Licht-Fußpunkte F durch H über die Grundebene (Fußboden) bis o, dann $o\,o^1$ lothrecht zieht und den Fortgang dieser Schattengrenze durch die Punkte o^2, o^3, o^4 der Kappe X dadurch construirt, daß man die Cylinderseiten der letztern durch solche Lothrechten schneidet, welche durch die Schnittpunkte ω^2, ω^3, ω^4 der entsprechenden Cylinderseiten-Projectionen mit der Schnittlinie H o der durch die Kante H V gehenden Lichtebene mit der Grundebene gehen. Da nun ein Strahl L V die Curve $o^1\,o^2\,o^3\,o^4$ nicht schneidet, so fällt der Schlagschatten v von V nicht in die Kappe X, sondern in eine der beiden Kappen U und W, und ist es rathsam, jener Curve mit der Construction des in diese Kappen fallenden Schlagschattens des Kreisbogens n V von n aus entgegenzukommen. Man faßt zu dem Ende beliebige einzelne Punkte der Curve n V ins Auge, z. B. den Punkt B, und bestimmt vermittelst des Strahles L B seinen Schlagschatten b in dem Schnitte B 1. 2. 3. 4 einer durch B gehenden lothrechten Lichtebene mit der Kappe U, nachdem man diesen Schnitt dadurch construirt, daß man in der Grundebene die Projectionen der Cylinderseiten durch eine von F durch β (die Projection von B) gezogene Linie in den Punkten 1. 2. 3. 4, die Cylinderseiten in der Kappe oben aber durch Lothrechte schnitt, welche durch 1. 2. 3. 4 unten geben. Hat man auf diese Weise die Schatten mehrerer zwischen n und G liegenden Punkte ermittelt, so kann man von n aus durch sie hindurch die Grenze n b g des in die Kappe U fallenden Schlagschattens zeichnen. — Die nunmehr offenbar in die Kappe W fallenden Schlagschatten der Punkte zwischen G und V, und des Punktes V selbst, werden auf dieselbe Art gefunden.

Das horizontale Stück des das Gewölbe haltenden Ankers liegt, wie seine Projection auf der Grundebene zeigt (s. hier Punkt ϱ), bis R selbst im Schlagschatten der Kante H V; der Schatten r aber von R wird in der Schlagschattengrenze $o^1\,o^2\,o^3\,o^4$ in der Kappe X durch den Strahl L R bestimmt. Den übrigens in die Kappen X und Y fallenden Schlagschatten des Ankerstückes R T findet man wieder durch die Construction der Schatten s und t einzelner Punkte S und T, und zwar in den Schnitten durch S und T lothrecht angenommener Lichtebenen mit jenen Kappen. Das in die Kappe Y fallende Schlagschattenstück ist geradlinig und wie eine (Cylinder-) Seite der Kappe gerichtet, da es der Schnitt einer durch den geraden

Digitized by Google

horizontalen Anker denkbaren Lichtebene mit einem, seiner Achse nach, der Bildebene parallelen Cylinder ist. Ebenso, innerhalb des Schnittes 5. 6. 7 einer durch A lothrechter Lichtebene mit der Kappe U, wird der Schlagschatten a des Punktes A gefunden. Der Schlagschatten K 8. 9. 10. 11 des lothrechten Ankerstückes ist der Schnitt einer lothrechten Lichtebene mit der Kappe U und wird in den Cylinderseiten dieser Kappe durch Lothrechte abgeschnitten, welche man in der Grundebene in den Punkten 8, 9 u. s. w. der Cylinderseiten-Projectionen errichtet, in welchen die letzteren von derselben Lichtebene geschnitten werden. —

Für die Construction der Schatten auf schiefen Flächen §. 431.
ist die Anleitung aus den Constructionen der Sonnenschatten auf schiefen Flächen zu entnehmen.

Neunzehntes Kapitel.

Sonnen- und Mondlicht.

Das Verfahren bei der Construction der Perspectiven der dem §. 432.
Sonnen- und Mondlichte entsprechenden Schatten ist wesentlich dasselbe, wie bei der Construction der Perspectiven der dem Kerzenlichte entsprechenden Schatten und unterscheidet sich davon nur dadurch, daß, während bei letzterer der Lichtpunkt und sein Fußpunkt auf der Schatten fangenden Ebene in der Nähe liegen, diese beiden Punkte bei Sonnen- und Mondlicht — in der Folge wird der Kürze wegen stets nur die Sonne genannt werden — wegen der ungeheuern Entfernung dieser leuchtenden Körper als in unendlicher Entfernung liegend zu behandeln sind.

Wenn demnach die Schlagschatten-Perspective irgend einer ge- §. 433.
raden Körperkante construirt werden soll und dieserhalb, entsprechend der in §. 404 gegebenen und für diese Constructionen besonders wichtigen Regel, aus der Sonne eine der Kante parallele Linie (Lichtachse) gegen die Schatten fangende Ebene gezogen wird, so fällt, weil die Linie ebenfalls in unendlicher Entfernung ist, ihr

Digitized by Google

Fußpunkt (Sonnen-Fußpunkt) auf der Schatten fangenden Ebene in deren in unendlicher Entfernung liegende Grenzlinie.

Es tritt hierbei die Lichtachse selbst als Grenzlinie der durch das Schatten werfende Object angenommenen einen oder mehreren Lichtebenen auf, der Sonnenpunkt darin als der Verschwindungspunkt des der Erde zugehenden parallelen (§. 391) Strahlensystems, und der Sonnen-Fußpunkt als Verschwindungspunkt der perspectivisch parallelen Schnittlinien jener Lichtebenen mit der Schatten fangenden Ebene (§. 322). —

§. 434. Die Sonne kann in bildlichen Darstellungen fünferlei Stellung haben; sie kann nämlich stehen

a) im Horizonte,
über dem Horizonte, und zwar
b) im Zenithe, oder
c) an einem andern Orte in der verlängerten Bildebene,
d) hinter der Bildebene, oder
e) vor der Bildebene.

§. 435. **a) Die Sonne im Horizonte**

ist je nach ihrer Stellung dabei zur Bildebene selbst darstellbar oder nicht; ihre Strahlen sind horizontal. Schlagschatten fallen, da alle horizontalen Ebenen im Streiflichte sind, nur auf lothrechte und schiefe Ebenen und werden perspectivisch construirt wie bei den nachfolgend unter c), d) und e) erörterten verschiedenen Sonnenständen.

§. 436. **b) Die Sonne im Zenithe**

ist selbst nicht darstellbar. Jede lothrechte Linie fällt mit einem Strahle zusammen. Ist das Schatten werfende Object eine lothrechte gerade Kante, so ist bei diesem, das in §. 433 Gesagte allein ausschließenden Sonnenstande jede ihr parallele, also lothrechte Linie zugleich eine Lichtachse, und jeder Punkt einer nicht lothrechten Ebene ein Sonnen-Fußpunkt. Ist die Schatten fangende Ebene horizontal, wie z. B. die Grundebene, so ist jeder Schlagschatten gleich einer Horizontalprojection des Schatten werfenden Objectes und ist seine Perspective deshalb gleich einem perspectivischen Hülfsgrundrisse des Objectes zu construiren.

Digitized by Google

c) Die Sonne in der verlängerten Bildebene.

§. 437. In diesem Falle ist die Sonne selbst nicht darstellbar. Die Perspectiven ihrer Strahlen sind, weil diese der Bildebene parallel oder mit ihr zusammenfallend sind, geometrisch parallel, d. h. zum Horizonte sämmtlich unter demselben Winkel geneigt zu ziehen.

§. 438. Handelt es sich um die Construction des auf eine horizontale Ebene fallenden Schattens eines Punktes oder einer lothrechten Linie, so liegt die lothrechte Lichtachse der, durch diese Objecte anzunehmenden lothrechten Lichtebene in unendlicher Entfernung, ihr Fußpunkt, d. i. ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte liegt deshalb ebenfalls in unendlicher Entfernung, so daß die dahin gerichtete Schnittlinie jener Lichtebene mit der horizontalen Ebene eine dem Horizonte parallele Linie ist. Stände z. B. die Sonne 36° hoch, und es soll in Fig. 123 (Taf. 20) der auf die Grundebene fallende Schlagschatten der lothrechten Stange B A construirt werden, so ist von dem im Horizonte in unendlicher Entfernung gelegenen Sonnen-Fußpunkte F durch A die Schnittlinie F b der durch B A angenommenen lothrechten Lichtebene mit der Grundebene zu ziehen und dieselbe durch einen durch B gehenden zum Horizonte oder zu F b um 36° geneigten Strahl S B in b zu schneiden, wonach A b der Schlagschatten ist.

§. 439. Handelt es sich aber, wie in Fig. 124 (Taf. 20), darum, den Schlagschatten der in H^2 verschwindenden schiefen Linie, der Kante B A eines Prismas zu construiren, das auf einer doppeltschiefen Ebene steht, deren Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verschwindungspunkt für normale Linien) $\varepsilon\varrho$ ist, bei einer beliebigen Sonnenhöhe von etwa 45°, so ist nach der in §. 404 enthaltenen Regel aus der Sonne eine der B A parallele, d. h. gleichfalls in H^2 verschwindende und zwar zum Horizonte um 45° geneigte Lichtachse — denn nur eine so geneigte Linie ist hier nach der Sonne gerichtet — gegen die Schatten fangende schiefe Ebene zu ziehen; es ist dann ihr Schnittpunkt F mit der schiefen Grenzlinie der der Kante B A und allen ihr parallelen Kanten entsprechende Sonnen-Fußpunkt, und demnach auch eine von F durch A gezogene Linie die

Digitized by Google

Schnittlinie der durch B A anzunehmenden schiefen Lichtebene mit der gegebenen schiefen Ebene, der darin durch einen zum Horizonte um 45° geneigten Strahl S B abgeschnittene Punkt b der Schlagschatten von B; b A aber ist der Schlagschatten von B A. — Da die Kante B M, als der Grenzlinie ε ϱ geometrisch parallel, der Bildebene parallel ist, so ist auch ihr Schlagschatten b m parallel ε ϱ; der Schlagschatten m des Punktes M ist darin durch einen zum Horizonte um 45° geneigten Strahl abzuschneiden.

§. 440. Will man aber den Schlagschatten des Punktes B unter Annahme einer durch diesen Punkt lothrechten Lichtebene finden, so stellt man zunächst den in der schiefen Ebene lothrecht unter B liegenden Fußpunkt β fest und zieht dann aus dem in der schiefen Grenzlinie in unendlicher Entfernung, ebenfalls lothrecht unterhalb des Sonnenpunktes gelegenen Sonnen-Fußpunkte F^2 durch β eine, hiernach mit ε ϱ geometrisch parallele Linie β m, deren Schnittpunkt b mit dem Strahle S B gleichfalls den Schlagschatten von B ergiebt. Es wäre demnach β b der Schlagschatten der lothrechten Linie β B auf der schiefen Ebene, und die gerade Linie β m der Schlagschatten der gebrochenen Linie β B M.

§. 441. Dem Vorhergehenden entsprechend ist der Schlagschatten der schiefen Kante B C auf der horizontalen Grundebene zu finden, wenn das Prisma bis in letztere verlängert gegeben ist. Die mit B C perspectivisch parallele Lichtachse S H^2 schneidet dann die Grenzlinie der Schatten fangenden Grundebene, den Horizont, im Sonnen-Fußpunkte F^1, und ist eine von F^1 durch C gezogene Linie die Schnittlinie der durch B C annehmbaren schiefen Lichtebene mit der Grundebene und b° darin der Schlagschatten von B. Fällt man aber von B auf die Grundebene eine Lothrechte B β°, so ist die dem Horizonte parallele β° b° deren Schlagschatten, und ist Punkt b° darin als vermittelst einer durch Punkt B lothrecht angenommenen Lichtebene construirt anzusehen.

Beispiel 43.

§. 442. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 125 (Taf. 21) die Perspective (P Hauptpunkt, D Distanzpunkt) eines **Grabens** gegeben,

Digitized by Google

dessen horizontale Bodenfläche G H J K ist und dessen Seitenwände gebildet werden durch die einfach-schiefe Fläche Q N G K mit der Grenzlinie (n)(g), durch die einfach-schiefe Fläche E C H J mit der Grenzlinie c(h), ferner durch die einfach-schiefe Fläche E Q K J, und endlich durch die doppelt-schiefe Fläche C H G N mit der Grenzlinie p(m). Die Schnittlinie der letztern Fläche mit der Grundebene ist M ε, und H G die mit der Bodenfläche des Grabens. Neben dem Graben steht ein **Mast** A B, an dessen Spitze B **zwei Taue** R B und T B befestigt sind — es sollen unter Annahme der **Sonne** als links **in der verlängerten Bildebene** $29\frac{1}{2}°$ über dem Horizonte stehend die Schlagschatten-Perspectiven des Mastes, der Taue und der einen Grabenwand construirt werden.

Ausführung. Um den Schlagschatten des Mastes zu finden, ist, §. 443.
da dieser selbst lothrecht steht, durch ihn eine lothrechte Lichtebene anzunehmen und die dieser entsprechende lothrechte Lichtachse (Grenzlinie) durch die Sonne zu legen, wonach deren Schnittpunkte mit den Grenzlinien der verschiedenen Flächen, über welche der Schlagschatten fällt, die Sonnen-Fußpunkte für diese ergeben. Da diese Punkte aber, wie die Lichtachse selbst, sämmtlich in unendlicher Entfernung liegen, so sind die nach ihnen gerichteten einzelnen Stücke der gebrochenen Schlagschattenlinie A a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 b, mit A a^1 beginnend, je geometrisch parallel den entsprechenden Grenzlinien zu ziehen. Ein durch den Punkt B gehender, mit dem Horizonte den Winkel von $29\frac{1}{2}°$ bildender Strahl S b bezeichnet in b den Schlagschatten des Spitzpunktes B.

Der Schlagschatten des Taues T B findet sich in der gebrochenen §. 444.
Schnittlinie einer durch T B angenommenen schiefen Lichtebene mit den den Graben bildenden Flächen. Die Lichtachse (Grenzlinie) dieser schiefen Lichtebene muß zunächst durch die Sonne gehen, also eine zum Horizonte um $29\frac{1}{2}°$ geneigte Linie sein. Sie muß außerdem parallel T B sein, d. h. mit ihr in demselben Punkte y verschwinden. Beide Eigenschaften hat die Linie (w)(g). Die Schnittpunkte w, p, c und g dieser Lichtachse mit den verschiedenen Grenzlinien sind die Sonnen-Fußpunkte, aus denen man die gebrochene Schlagschattenlinie T t^1 t^2 t^3 ..... b, bei T beginnend, derart zu ziehen hat, daß die Stücke T t^1, t^2 t^3 und t^5 t^6, weil sie auf horizontale Flächen fallen, nach dem Sonnen-Fußpunkte w im Horizonte gerichtet sind; die Stücke t^3 t^4 und t^6 b aber müssen, weil sie auf die doppeltschiefe Ebene fallen, nach p, t^4 t^5 nach c, und t^1 t^2 nach g gerichtet sein.

Digitized by Google

Ebenso wird, um den Schlagschatten des Taues R B zu finden, eine diesem perspectivisch parallele Lichtachse, d. h. eine durch den Verschwindungspunkt u der Linie R B gehende, zum Horizonte um $29^1/_2{}^\circ$ geneigte (hier außerhalb des Constructionsraumes gelegene) Linie u x gezogen, und sind dann die Schnittpunkte x, m, h und n derselben mit den Grenzlinien der verschiedenen Flächen die Sonnen-Fußpunkte für diese, so daß nun $R r^1$, $r^2 r^3$ und $r^4 r^5$ nach x, $r^5 b$ nach m, $r^3 r^4$ nach h, und $r^2 r^1$ nach n gezogen werden können.

§. 445. Kommt es nicht darauf an, wie hier, die Aufgabe als ein Beispiel zu den vorher gegebenen Regeln zu lösen, so ist der kürzere Weg der Ausführung der, daß man zunächst den Schlagschatten (b) des Punktes B auf der Grundebene und seinen Schlagschatten β auf der Ebene des Grabengrundes, und dazu auf dieser die Punkte α, τ und ϱ feststellt, in welchen sie von den Verlängerungen des Mastes und der Taue getroffen wird. Zieht man alsdann von A nach (b), so findet man $A a^1$ und $a^4 a^5$, und zieht man von α nach β, so ergiebt sich das Stück $a^2 a^3$, während $a^1 a^2$, $a^3 a^4$ und $a^5 b$ parallel den entsprechenden Grenzlinien gezogen werden. Ferner ergiebt eine von T nach (b) gezogene Linie die Schlagschattenstücke $T t^1$ und $t^5 t^6$, und eine Linie von τ nach β das Stück $t^2 t^3$, wonach $b t^6$ und $t^4 t^3$, und darauf $t^5 t^4$ und $t^1 t^2$ als Verbindungslinien zwischen schon vorhandenen Punkten gezogen werden können u. s. w.

§. 446. Ein Punkt a^7 des von der Grabenwand Q N G K auf den Grund geworfenen Schlagschattens — welcher zugleich zeigt, daß die auf jener Grabenwand construirten Schlagschatten, die hier nur ihres Zusammenhanges wegen mit ausgeführt sind, in der Wirklichkeit nicht vorhanden sein können — wird durch einen durch a^1 gezogenen Strahl $a^1 a^7$ bestimmt, wonach durch a^7 die Grenze des Schlagschattens der Kante Q N mit dieser perspectivisch parallel, also nach P zu ziehen ist. Von ihren Schnittpunkten λ und π mit den Grenzen H G und J K der anderen schiefen Grabenwände werden schließlich Linien λ N und π Q nach N und nach Q gezogen. Die Verschwindungspunkte dieser Linien findet man leicht nach Anleitung der §§. 404 und 433. φ z. B., den Verschwindungspunkt der Linie λ N, findet man, wenn man die Grenzlinie p (m) der Schatten fangenden Fläche C H G N durch eine durch die Sonne gehende, der Schatten werfenden Kante Q N parallele Linie, d. h. also eine in P verschwindende und um $29^1/_2{}^\circ$ über den Horizont sich erhebende Linie φ P in φ schneidet u. s. w. —

Beispiel 44.

§. 447. **Aufgabe.** In Fig. 126 (Taf. 21) ist die Perspective (P Hauptpunkt, D und D^1 Distanzpunkte) eines mit einer

Digitized by Google

Kuppel bedeckten **cylindrischen Gebäudes**, ferner die Perspective eines an der abgestumpften Ecke eines andern Gebäudes angebrachten **Thürmchens**, dessen Achse q^1E mit der Ecke zusammenfallen würde, wenn diese nicht abgestumpft wäre, und außerdem die Perspective einer **Nische** gegeben — es sollen unter Annahme der **Sonne**, als 45° über dem Horizonte, **innerhalb der verlängerten Bildebene** links des Beschauers stehend, die Schattenperspectiven der gegebenen Objecte construirt werden.

Ausführung. Um die Objectschattengrenze an dem Cylin- §. 448.
der des erstgenannten Gebäudes zu construiren, wird aus dem in unendlicher Entfernung liegenden Fußpunkte der Sonne die hiernach dem Horizonte parallele Schnittlinie einer den Cylinder berührenden Lichtebene mit der Grundebene berührend an die Grundfläche des Cylinders gezogen, wonach die im Berührungspunkte α stehende Cylinderseite αa sich als Ort der Objectschattengrenze ergiebt. Das durch den Strahl $A a^1$ (alle Strahlen sind hier unter 45° zum Horizonte geneigt) abgeschnittene Stück αa^1 jener Schnittlinie bildet die Grenze des Schlagschattens, so viel davon überhaupt sichtbar wird.

Da die Perspective der halbkugelförmigen Kuppel in Rücksicht §. 449.
auf die aufgegebene Beleuchtung nach Anleitung des §. 243 (Fig. 59) construirt worden, so können hier an die dabei verwendeten, der Bildebene parallelen Hülfskreise, welche so wie ihre Mittelpunkte C^2, C^3, C^4, C^5, C^6, soweit nöthig, vorliegen, sofort berührende, zum Horizonte um 45° geneigte Strahlen gezogen werden, um danach durch die Berührungspunkte T^1, T^2, T^3 u. s. w. bis zum Pole 7 die Curve der Objectschattengrenze an der Kuppel zeichnen zu können. — Punkte des Schlagschattens der Kuppel findet man wie den Punkt t^2, wenn man nämlich die Projection 2 des Punktes C^2 auf der Grundebene feststellt, durch Punkt 2 die Linie $2\,t^2$ zieht und dieselbe durch den entsprechenden berührenden Strahl $T^2\,t^2$ in t^2 abschneidet, u. s. w. — Der Ort des übrigens nicht sichtbaren höchsten Lichtes auf der Kuppel ist der Punkt l, in welchem ein durch den Mittelpunkt C^1 der Kuppel gehender Strahl ihren der Bildebene parallelen, in der Figur vorliegenden Durchschnitt schneidet.

Der zum Theil auf den Cylinder fallende Schlagschatten der vor- §. 450.
springenden Kante (Peripherie der Grundfläche) des Gesimskegels wird gefunden, wenn man zuvor die Projection dieser Kante auf der Grundebene construirt, dann beliebige Punkte, wie z. B. B, in der Kante selbst, und deren Projectionen, wie hier also b°, in der Grundebene bezeichnet, darauf

Digitized by Google

durch b^0 die Schnittlinie $b^0\beta$ einer lothrechten Lichtebene, am Cylinder als eine Seite emporsteigend, zieht und dieselbe schließlich durch einen durch B gehenden Strahl in b, als einem Punkte der Schlagschattengrenze, schneidet. So findet man auch im Punkte a der Objectschattengrenze den Schlagschatten des Punktes A der Kante. — Punkte der Fortsetzung dieses Schlagschattens auf der Grundebene, wie z. B. a^1 und h als Schatten von A und H, werden durch Strahlen in den Schnittlinien mit der Grundebene abgeschnitten; oder man construirt vermittelst des einschließenden Quadrates die Perspective des Kreises, welchen der Schlagschatten der Gesimskegel-Grundfläche auf der Grundebene bilden muß, da letztere beiden mit einander parallel sind, nachdem man zuvor den Schlagschatten $g\,g^1$ des in dem gegebenen Höhendurchschnitte des Gebäudes vorliegenden Durchmessers $G\,G^1$ der Gesimskegel-Grundfläche festgestellt hat.

§. 451. Ob der Mantel des Kegels $K\,G\,G^1$ überhaupt von Licht getroffen wird oder nicht, hängt davon ab, ob der Schlagschatten k der Spitze K innerhalb des Schlagschattens der Grundfläche oder außerhalb desselben fällt. Wo, wie hier, ersteres der Fall ist, liegt der ganze Kegelmantel im Schatten seiner Grundfläche. Stände der vorliegende Kegel umgekehrt, mit der Spitze nach oben, so würde der Schlagschatten der letztern innerhalb desjenigen der Grundfläche fallen und der Mantel überall mehr oder weniger beleuchtet sein, d. h. keinen Objectschatten haben und keinen Schlagschatten werfen. Und wären die Kegelseiten wie die Lichtstrahlen, nämlich hier um 45° zur Grundfläche geneigt, so würde in der vorliegenden Stellung des Kegels sein Mantel mit Ausnahme der einen, im Streiflichte befindlichen Seite G K Objectschatten haben, während, wenn unter derselben Annahme der Kegel mit der Spitze nach oben stände, nur eine Seite G^1 K Objectschatten, oder vielmehr nur Streiflicht haben würde. In beiden Fällen fiele jedoch der Schlagschatten des Mantels ebenfalls noch innerhalb desjenigen der Grundfläche.

§. 452. Punkte der Schlagschattengrenze in der Nische werden zum Theil analog dem Verfahren bei der Kuppel gefunden. Wie bei dieser construirt man nämlich, da die Decke der Nische eine Viertelkugel ist, ihrer Fläche angehörige, der Bildebene parallele Kreisstücke, wie z. B. diejenigen um die Mittelpunkte C und C^1, legt dann aber durch die Punkte J und G, in welchen der Nischenrand sie schneidet, Strahlen, deren zweite Schnitt-

Digitized by Google

punkte i und g mit denselben Kreisen Punkte der Schlagschattengrenze sind. Die Schlagschatten k und b anderer Punkte K und B des Nischenrandes findet man mit Hülfe der entsprechenden Projectionen k°, b° und $\varkappa$, β auf der Grundfläche des Nischencylinders. — Der Ort des höchsten Lichtes in demselben Cylinder ist die Seite $i^1 i$. Sie wird darin bestimmt durch eine durch den Mittelpunkt i° der Grundfläche gelegte horizontale, die Peripherie der letztern in i^1 schneidende Linie.

Die in die Seite NM fallende Objectschattengrenze an dem Cylinder des Eckthürmchens wird wie bei dem Kuppelgebäude durch an die Grundflächen gezogene horizontale Tangenten $N n^\circ$ oder $M m^\circ$ ermittelt. Der Schlagschatten dieser Cylinderseite auf der Mauer wird gefunden, wenn man die eben gezogenen Tangenten bis in letztere, d. h. bis zu den Punkten n° und m° der der Verlängerung der Mauer angehörigen Linien $q v$ und $q^1 v^1$ verlängert und dann eine durch diese Punkte gezogene Lothrechte durch Strahlen, welche durch die Punkte N und M gehen, in n und m abschneidet. Die Schlagschattenstücke nr und ma ergeben sich am leichtesten nach der Construction der Schatten des Daches und der Console des Eckthürmchens. §. 453.

Die Objectschattengrenze an dem dem Thürmchen als Dach dienenden Kegel wird gefunden, wenn man zuvor den Schlagschatten (e) der Spitze E auf der verlängert gedachten Kegel-Grundfläche feststellt, und dann Tangenten aus (e) an die letztere selbst zieht. Von der einen derselben wird die Grundfläche in R berührt, und ist hiernach die Kegelseite RE die Objectschattengrenze. Den Schlagschatten von dieser findet man, wenn man zuerst den des Punktes R, wie vorher den des Punktes N auf der Mauer sucht. Da die letztere, bis in den Kegel verlängert, mit dessen Achse zusammenfallen würde, muß der auf sie fallende Schlagschatten der Kegelseite RE von r nach E gerichtet sein, in dem Punkte c aber der Kante der Mauer sich nach e, dem wirklichen Schlagschatten der Spitze E (im Schnittpunkte des Strahles Ee mit dem Schatten $q \varepsilon e$ der Achse liegend) umbiegen. Zeichnet man schließlich durch die Punkte v, r, n eine elliptische Curve, so ist diese ein Theil des Schlagschattens der dem Cylinder und dem Kegel gemeinschaftlichen Grundfläche, und das Stück rn davon der Schlagschatten des Stückes RN. cr ist eine Tangente an dieser Curve. §. 454.

Um Object- und Schlagschatten des dem Thurme als Console dienenden umgekehrten schiefen Kegels zu finden, dessen Spitze X in der die Ecke abstumpfenden Fläche liegt, denkt man sich die letztere verlängert und construirt auf ihr den elliptischen Schlagschatten $v^1 (m) (a) t^1$ der dem Kegel und dem Cylinder gemeinschaftlichen Grundfläche vermittelst einzelner §. 455.

Digitized by Google

seiner Punkte, indem man z. B. von M horizontal bis (μ) in der verlängerten $t^1 v^1$ zieht, durch (μ) eine Lothrechte zieht und diese durch einen durch M gehenden Strahl in (m) schneidet u. s. w. Eine alsdann aus X an diese Ellipse gezogene Tangente ergiebt (a) als Berührungspunkt, und ein durch (a) gezogener Strahl ergiebt im Punkte A der Peripherie der Grundfläche denjenigen Punkt, nach welchem die als Objectschattengrenze auftretende Kegelseite X A gerichtet ist. Von jener Tangente X (a) ist selbstverständlich nur das Stück X z der die Ecke abstumpfenden Fläche angehörig. Von z aus muß, nachdem der elliptische Schlagschatten $v^1 m a$ der Cylinder-Grundfläche neuerdings auf der die Nische enthaltenden Mauerfläche vermittelst einzelner seiner Punkte, wie dies vorher mit m geschehen, construirt worden, abermals eine, hier sehr kurze Tangente z a an diese Ellipse gezogen werden, wodurch sich in a der wirkliche Schlagschatten von A ergiebt. Es liegt hiernach in der Curve m a der Schlagschatten des Stückes M A der Grundfläche, und in der gebrochenen Linie a z X der der Kegelseite A X vor. —

§. 456. **d) Die Sonne hinter der Bildebene**

ist darstellbar; ihr Stand wird durch ihren Abweichungswinkel von der Verticalebene und durch ihren Höhenwinkel über dem Horizonte bezeichnet, und wird auch ihre Perspective demgemäß construirt. Steht die Sonne z. B. um den Winkel von 20° rechts der Verticalebene und 36° über dem Horizonte, so wird der erstere an die Verticale in O (Fig. 127, Taf. 20) angetragen, der Horizont dadurch in F geschnitten, durch F die lothrechte Grenzlinie (F Hauptpunkt, F O Länge der Distanz, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene gezogen, an F ω in ω der Höhenwinkel von 36° angetragen und dadurch die Grenzlinie in S geschnitten, wonach S die Perspective der Sonne, der Verschwindungspunkt der Strahlen, ist.

§. 457. Handelt es sich nun um die Construction des auf eine horizontale Ebene, etwa die Grundebene, fallenden Schlagschattens eines lothrechten Stabes B A, so ist die der B A parallele S F selbst die Lichtachse, d. i. die Grenzlinie der durch B A anzunehmenden lothrechten Lichtebene; Punkt F, als ihr Schnittpunkt mit der Grenzlinie der Schatten fangenden Ebene (mit dem Horizonte) ist der Sonnen-Fußpunkt, d. i. der Verschwindungspunkt

Digitized by Google

für die Schnittlinie beider Ebenen, und deshalb die nach F gerichtete b A, durch einen Strahl in b abgeschnitten, der Schlagschatten von B A.

Bei der Construction des auf die horizontale Grundebene fallenden Schlagschattens des der Bildebene parallelen schiefen Stabes B C ist die der B C parallele S F¹ die Lichtachse (Grenzlinie der durch B C anzunehmenden schiefen Lichtebene), Punkt F¹, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, der Sonnen-Fußpunkt, demnach die nach F¹ gerichtete Linie b C, durch einen Strahl in b abgeschnitten, der Schlagschatten von B C. §. 458.

Ist S in Fig. 128 (Taf. 21) die Perspective der Sonne, B A die eines schiefen Stabes, welcher in A normal auf einer doppelt-schiefen Ebene steht, deren Grenzlinie (H¹ Hauptpunkt, H² Verschwindungspunkt für normale Linien) ε ϱ, und deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene u ε ist, so ist für die Construction des auf die schiefe Ebene fallenden Schlagschattens der Linie B A die dieser parallele, d. h. in H² verschwindende S F die Lichtachse (Grenzlinie der schiefen Lichtebene), ihr Schnittpunkt F mit der Grenzlinie ε ϱ der Sonnen-Fußpunkt, und die nach diesem gerichtete b A, durch einen Strahl S B in b abgeschnitten, der Schlagschatten. §. 459.

Wird der schiefe Stab B A bis C in der horizontalen Grundebene verlängert und sein Schlagschatten auf dieser gesucht, so ist S F² dazu die Lichtachse, F² der Sonnen-Fußpunkt und b° C der Schlagschatten.

Für die Construction des auf die schiefe Ebene fallenden Schlagschattens des lothrechten Stabes B G ist die der B G parallele, also lothrechte S F¹ die Lichtachse, F¹ der Sonnen-Fußpunkt, demnach die nach F¹ gerichtete b G der Schlagschatten. §. 460.

Zu dem in J auf der Grundebene stehenden lothrechten Stabe B J ist wieder F³ der Sonnen-Fußpunkt, und b° J der Schlagschatten von ihm. —

Beispiel 45.

Aufgabe. In Fig. 129 (Taf. 22) ist die schon im Beispiele 19 (Fig. 63, Taf. 10) vorgeführte Perspective (P Hauptpunkt, §. 461.

Digitized by Google

P D/$_2$ halbe Distanz) **eines Thurmes mit geschweiftem Dache** und die eines an einer Mauer emporgeführten **Schornsteins** gegeben; die **Sonne** stehe **hinter der Bildebene** 36° über dem Horizonte und 29° rechts der Verticalebene — es sollen die Schattenperspectiven der gegebenen Objecte construirt werden.

§. 462. **Ausführung.** Um die hier nicht weit außerhalb des Constructionsraumes fallende Perspective S der Sonne darzustellen, wird an die Verticale rechts in O der Winkel von 29° angetragen, dadurch der Horizont im Punkte F geschnitten, durch F eine Lothrechte als Grenzlinie (F Hauptpunkt, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene gezogen, und dieselbe durch einen an den Horizont, zu diesem um 36° geneigten, in ω angetragenen Winkelschenkel in S geschnitten. Bei Annahme lothrechter Lichtebenen ist dann S F die Lichtachse, F der Sonnen-Fußpunkt. Wird aber irgendwo eine horizontale Lichtebene angenommen, wie hier, um zunächst das Stück u g des Schlagschattens der horizontalen Schornsteinkante A G auf der lothrechten Mauerfläche zu construiren, die, als normal zur Bildebene, die Verticale zur Grenzlinie hat, so ist eine aus dem Sonnenpunkte, der A G, also dem Horizonte geometrisch parallel gegen die Verticale zu ziehende Linie S F^1 die Lichtachse, und ihr Schnittpunkt F^1 mit der Verticale der Sonnen-Fußpunkt, so daß eine Linie, aus F^1 durch A gezogen und durch einen Strahl S G in g abgeschnitten, in u g jenes Schlagschattenstück ergiebt.

Um den Schlagschatten des Schornsteins zu vollenden, kann man nun durch g lothrecht den Schatten der durch G lothrecht gehenden Kante, durch u parallel mit A G das auf die obere horizontale Fläche der Mauer fallende, durch einen Strahl S A in a abzuschneidende Schlagschattenstück u a ziehen und die Richtigkeit darin controliren, daß hierbei a zugleich in eine vom Sonnen-Fußpunkte F durch α zu ziehende Linie fallen muß. a r endlich, durch einen Strahl S R in r abzuschneiden, ist perspectivisch parallel A R, d. h. in P verschwindend.

§. 463. Die Cylinderseite, in welcher die Objectschattengrenze an dem Thurmcylinder liegt, wird dadurch bestimmt, daß man aus dem Fußpunkte F an die obere oder untere Grundfläche, oder auch wohl an das oberhalb der Construction vorliegende Stück des perspectivischen Hülfsgrundrisses des Thurmcylinders und des Dachvorsprunges eine Tangente zieht; es ist dann eine Lothrechte, durch die Berührungspunkte b°, oder β, oder c gezogen, die Objectschattengrenze. Die von F durch c gezogene Tangente

Digitized by Google

c d ergiebt zugleich die Grenze des auf die obere Mauerfläche fallenden Schlagschattens des Thurmcylinders.

Die Kegelseiten, in welchen die Objectschattengrenzen des umgekehrten Gesimskegels liegen, dessen Spitze E ist, werden dadurch ermittelt, daß man von dem Mittelpunkte 2 der Kegel-Grundfläche eine Linie nach F zieht, dieselbe durch einen Strahl S E in e schneidet, von e Tangenten, wie e T deren eine ist, an die Grundfläche und hiernach die Kegelseite E T zieht. Da diese in der Figur mit der den Umriß des Gesimskegels bildenden Seite zusammenfällt, ist das Gesims, soweit es sichtbar ist, im Schatten. Punkte der Grenze des zum Theil auf den Thurmcylinder fallenden Schlagschattens der Gesimskegel-Grundfläche werden am genauesten unter Anwendung des schon erwähnten, oberhalb der Figur vorliegenden Stückes des perspectivischen Hülfsgrundrisses der Kegel- und der Thurmcylinder-Grundfläche construirt, indem man nämlich von F aus (Schnitt-) Linien (lothrechter Lichtebenen mit der Grundrißebene) durch die Peripherien zieht, wie z. B. $B^\circ b^\circ$, dann durch lothrechte Linien die Punkte B° und b° in die Punkte B und β der Construction überträgt, durch β eine Cylinderseite zieht und dieselbe durch einen Strahl S B in b schneidet. Auf dieselbe Art ist der Schlagschatten t des Punktes T festgestellt worden. §. 464.

Punkte des Objectschattens an dem geschweiften Dache werden gefunden, wenn man zuvor die Schnitte mehrerer beliebigen lothrechten Lichtebenen mit dem Dache construirt, wie dies im Beispiele 19 gezeigt worden; es sind dann die Berührungspunkte, wie h, i, K, k, m und n von Strahlen, welche berührend an diese Curven gezogen werden, Punkte der Objectschattengrenze. In der Figur trifft es sich zufällig, daß der Punkt k, weil er der zweite Berührungspunkt desselben Strahles S K ist, zugleich der Schlagschatten von K und deshalb ein Punkt der Grenze des Schlagschattens ist, welchen der zwiebelförmige obere Theil des Daches auf den glockenförmigen unteren Theil desselben wirft. Andere Punkte dieser Schlagschattengrenze ergeben sich in den Schnittpunkten der die oberen Schnittfiguren berührenden Strahlen mit den unteren Schnittfiguren. §. 465.

Beispiel 46.

Aufgabe. In Fig. 130 (Taf. 23) sind die schon im Beispiele 32 (Fig. 90, Taf. 15) vorgeführten Perspectiven eines **Cylinders** und eines **Kegels** gegeben, welche beide auf einer doppelt-schiefen Ebene, deren Grenzlinie $y^1 F^3$ und deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene M_E ist, liegen und §. 466.

Digitized by Google

zwar beide auf Seiten, welche in y^1 verschwinden. Beide sind von einer horizontalen Ebene, einer Wasserfläche (P Hauptpunkt im Horizonte, D Distanzpunkt), geschnitten — es sollen unter Annahme der **Sonne** im Punkte S die Schattenperspectiven der aus dem Wasser ragenden Stücke construirt werden.

§. 467. **Ausführung.** Die Perspectiven der Grundflächen des Cylinders, deren Grenzlinie wH^2 ist, sind in Fig. 90 vermittelst im Punkte H^2 verschwindender Ordinaten, wie rq, tt^1, r^1q^1 u. s. w., construirt. Um nun Punkte des Schlagschattens der zum Theil aus dem Wasser ragenden einen Grundfläche zu ermitteln, construirt man in Fig. 130 die Schlagschatten jener Ordinaten, so weit diese die Schnittlinie pp° der Wasserfläche überragen. Um so z. B. den über die Wasserfläche fallenden Schlagschatten pt des Ordinatenstückes pT zu finden, stellt man vermittelst der aus der Sonne perspectivisch parallel mit pT, also in H^2 verschwindend, zu ziehenden Lichtachse SF^1 in der Grenzlinie der Wasserfläche, d. i. der Horizont, den Sonnen-Fußpunkt F^1 fest, zieht von diesem eine Linie durch p und schneidet dieselbe durch den Strahl ST in t, u. s. w. — Die Seite, in welcher der Objectschatten am Cylindermantel liegt, findet man, wenn man wieder unter Anwendung von in H^2 verschwindenden Ordinaten, wie z. B. ni eine ist, die Schnittfigur des Cylinders mit einer beliebigen Lichtebene, die jedoch die Lichtachse SF^5 zur Grenzlinie haben muß, construirt und aus der Sonne einen berührenden Strahl Sh an dieselbe zieht; die durch h gehende, in y^1 verschwindende Cylinderseite ist alsdann die Objectschattengrenze. Da diese in g die Schnittfigur des Cylinders mit der Wasserfläche schneidet, so ist eine von g berührend an den Schlagschatten der Cylinder-Grundfläche gezogene Linie $g(F^4)$ die Grenze des über die Wasserfläche fallenden Schlagschattens des Cylindermantels. Die Richtung dieser Linie kann allenfalls dadurch controlirt werden, daß man mit einer aus der Sonne parallel der durch h liegenden Cylinderseite, also durch y^1 gezogenen Lichtachse SF^4 den Horizont, als Grenzlinie der Schatten fangenden Wasserfläche, in dem links weit entfernt gelegenen Sonnen-Fußpunkte F^4 schneidet, und nach diesem von g aus unmittelbar die Schlagschattengrenze zieht.

§. 468. Diesem Verfahren entsprechend findet man den zum Theil über die Wasserfläche, zum Theil die gegebene schiefe Ebene bergauf fallenden Schlagschatten, und danach den Objectschatten des Kegels. Da y^2 in der Grenzlinie xz^1 der Kegel-Grundfläche der Verschwindungspunkt der Ordinaten δD, βB, αA u. s. w. ist, unter deren Anwendung die Perspective der Grundfläche construirt wurde, so ergiebt die aus der Sonne

Digitized by Google

nach y^2 zu ziehende Lichtachse in ihrem Schnittpunkte F^2 mit dem Horizonte den Sonnen-Fußpunkt zu dem auf die Wasserfläche fallenden Schlagschatten des Ordinatenstückes $\varkappa^1 K$, und hat man danach nur von F^2 durch $\varkappa^1$ eine Linie zu ziehen und dieselbe durch einen Strahl S K in k zu schneiden, um in k einen Punkt des auf die Wasserfläche fallenden Schlagschattens der Grundfläche zu erzielen. Zu dem die gegebene schiefe Ebene bergauf fallenden Schlagschattenstücke der Grundfläche ist der Schnittpunkt F^3 der Lichtachse $S y^2$ mit der Grenzlinie $y^1 F^3$ der Sonnen-Fußpunkt, so daß Linien, von F^3 durch die Fußpunkte β und α der Ordinaten βB und αA gezogen, in ihren Schnittpunkten b und a mit den Strahlen S B und S A Punkte der Grenze des in Rede stehenden Schlagschattenstückes ergeben. Zieht man schließlich aus der Kegelspitze s eine Tangente s c an dieses Schlagschattenstück, so ist diese die Grenze des Schlagschattens des Kegelmantels, und schneidet man die Peripherie der Kegel-Grundfläche durch einen Strahl S c in C, und zieht dann die Kegelseite C s, so ergiebt sich hierin die Objectschattengrenze am Kegelmantel.

Beispiel 47.

§. 469. **Aufgabe.** Es soll zu Fig. 121 (Taf. 21), unter Annahme der **Sonne hinter der Bildebene** im Punkte S, Anleitung zur Construction der Perspectiven des Object- und des Schlagschattens der **Kugel**, des Lichtpoles und der Grenzen gleicher Erleuchtung an derselben gegeben werden.

§. 470. **Ausführung.** Die Aufgabe unterscheidet sich von der in §. 427 gegebenen nur dadurch, daß, während dort der Lichtpunkt L und sein Fußpunkt F auf der Grundebene in der Nähe lagen, hier beide Punkte S und F^1 in unendlicher Entfernung liegen; daß ferner, während dort der die Objectschattengrenze bildende Kreis als Berührungskreis eines Strahlenkegels nicht ein größter Kugelkreis war und deshalb der Ort seines Mittelpunktes und die Länge seines Durchmessers erst durch eine geometrische Hülfsconstruction festgestellt werden mußten, hier dieser Kreis als Berührungskreis eines Strahlencylinders ein größter Kugelkreis um den Kugelmittelpunkt C von bekanntem Durchmesser ist. Daß übrigens die Ebene des hier zu construirenden Berührungskreises der jenes Kreises parallel ist und deshalb ebenfalls εs als Grenzlinie hat, geht schon daraus hervor, daß der von der Sonne nach dem Kugel-Mittelpunkte C gerichtete Strahl S C zugleich durch den Lichtpunkt L geht. Die Grundlinie aber der hier in Betracht kommenden Kreisebene ist die durch C gehende Linie $x z$; ihre Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene ist εz.

Digitized by Google

Construirt man hiernach um C mit dem Durchmesser x y des um C geometrisch vorliegenden Kreises die Perspective eines größten Kugelkreises unter Anwendung des einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in H^1 verschwindet, so ist diese die Perspective der Objectschattengrenze an der Kugel. Vermittelst der hierbei verwandten, in H^1 verschwindenden Ordinaten wird auch der auf die Grundebene fallende Schlagschatten der Kugel gefunden. Die Lichtachse dazu ist die den Ordinaten parallele, also nach H^1 gezogene Linie $S H^1$, und der Schnittpunkt P derselben mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt. Zieht man nun von P Linien durch die Punkte, in welchen jene Ordinaten die Schnittlinie ε z treffen, und schneidet dieselben durch entsprechende Strahlen wie im Beispiele 41, so ergeben die Schnittpunkte die Grenze des Schlagschattens. Der Schlagschatten des Mittelpunktes C würde, wie der des Punktes m, in m^1 fallen.

Der Lichtpol ist auch hier der Punkt l. Das Stück 2. 3 der Grenzlinie ε s, welches innerhalb der Kugelperspective liegt, sowie die im Beispiele 41 um den Mittelpunkt m construirte Kreisperspective selbst sind als Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem dem Lichte ausgesetzten Kugelabschnitte anzusehen.

§. 471. **e) Die Sonne vor der Bildebene**

ist selbst nicht darstellbar. Für die Construction der von ihr bei diesem Stande verursachten Schatten wird die Perspective des Verschwindungspunktes ihrer Strahlen vermittelst des nach ihr selbst gerichteten, aber rückwärts gegen die Bildebene verlängerten Parallelstrahles bestimmt, und fällt dieselbe hierbei selbstverständlich auf die dem gegebenen Stande der Sonne entgegengesetzte Seite der Verticalebene und unterhalb des Horizontes, wenn die Sonne selbst über demselben steht.

Ist zu Fig. 131 (Taf. 20) die Sonne z. B. als 20° rechts der Verticalebene und 36° über dem Horizonte stehend gegeben, so fällt die Perspective (S) des Verschwindungspunktes der von ihr ausgehenden parallelen Strahlen 20° links der Verticalebene und 36° unter den Horizont, und hat man, um sie zu construiren, an die Verticale in O links den Winkel von 20° anzutragen, dadurch den Horizont in F zu schneiden, durch F die lothrechte Grenzlinie (F Hauptpunkt, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene zu ziehen und dieselbe durch einen an den Horizont in ω

Digitized by Google

unterhalb anzutragenden, von diesem um 36° abweichenden Winkelschenkel in (S) zu schneiden.

Soll hiernach der auf die horizontale Grundebene fallende Schlagschatten b A eines lothrechten Stabes B A construirt werden, so ist dazu die lothrechte Grenzlinie (S) F selbst als Lichtachse, und ihr Schnittpunkt F mit dem Horizonte als Sonnen-Fußpunkt anzusehen, demnach F A zu ziehen und durch einen Strahl (S) B in b abzuschneiden. §. 472.

Im Uebrigen ist dieser Strahlen-Verschwindungspunkt (S) in jeder Beziehung so zu verwenden, wie in dem Vorhergehenden der Sonnenpunkt selbst und ist dieserhalb Neues nicht hinzuzufügen.

Beispiel 48.

Aufgabe. Es ist in Fig. 132 (Taf. 23) die Perspective (P Hauptpunkt, $0/_3$ ein Drittel der Distanz) eines an der abgestumpften Ecke eines Gebäudes angebrachten **Balkons** gegeben — es sollen unter Annahme der **Sonne vor der Bildebene**, 32° rechts der Verticalebene und $20^1/_2$° über dem Horizonte stehend — wonach (S) der Verschwindungspunkt der Strahlen ist — die Perspectiven der Schatten des Balkons *construirt* werden. §. 473.

Ausführung. Um die Object- und Schlagschatten an der Vorderfläche des Balkons selbst und auf der die Ecke abstumpfenden Wandfläche zu finden, wird am zweckmäßigsten die Schnittfigur des Balkons mit einer lothrechten Lichtebene, welche die Lichtachse (S) F zur Grenzlinie hat, construirt, wie eine solche in der Figur vorliegt. Es ergeben dann Strahlen, durch vorspringende Eckpunkte des Schnittes, wie z. B. durch $\varkappa$ und J gezogen, daß durch $\varkappa^1$ und λ der Schlagschatten der Kante K L der Console, durch i und i^1 der der Kante des Architraves geht u. s. w. Ein berührender Strahl, an den Schnitt durch das deckende Glied gezogen, ergiebt für dieses in E den Ort des Objectschattens, in e den des Schlagschattens u. s. w. §. 474.

Das Stück des Schlagschattens, welches auf die Façade links fällt, wird am leichtesten dadurch construirt, daß man durch die Eckpunkte eines zuvor angefertigten perspectivischen Hülfsgrundrisses die Schnittlinien der horizontalen Grundebene mit den durch jene Eckpunkte annehmbaren Lichtebenen nach F zieht, dann durch die Punkte, in welchen diese Linien an die Façade links stoßen, lothrechte Linien zieht und diese durch entsprechende

Digitized by Google

Strahlen schneidet. So ist, um z. B. den Schlagschatten r von R zu finden, durch die Projection r° des Punktes R eine nach F gerichtete Linie bis ϱ zu ziehen, und eine durch ϱ gezogene Lothrechte durch den Strahl (S) R in r zu schneiden u. s. w. — Punkte des gerade auf das Gesims der Façade links fallenden Schlagschattens der lothrechten Kante N Q des Balkons ergeben sich, wenn man die Grundriß-Projection dieses Gesimses durch eine von q° nach F gezogene Linie schneidet und die Schnittpunkte durch lothrechte Linien in die entsprechenden Kanten der Gesimsperspective selbst überträgt. Ein an das so entstandene Schlagschattenprofil in dem deckenden Gliede berührend gezogener Strahl ergiebt hierin zugleich die Punkte, durch welche die Object- und Schlagschattengrenzen nach x gezogen werden können. Construirt man an dem Gesimse der Façade rechts auf gleiche Art den Durchschnitt einer lothrechten Lichtebene und zieht an denselben einen berührenden Strahl, so ergiebt derselbe hier gleichfalls den Ort der Object- und der Schlagschattengrenze.

Um den auf die Façade links fallenden Schatten des Balkons *ohne* Benutzung des perspectivischen Hülfsgrundrisses zu construiren — was wegen der großen Entfernung der hierbei zu benutzenden Sonnen-Fußpunkte nicht zu empfehlen ist — müßte man die Schlagschatten der nach Punkt y des Horizontes gerichteten Kanten des Balkons suchen. Der diesen Kanten und der linken Façade, deren Grenzlinie lothrecht durch den weit links gelegenen Punkt x geht, entsprechende Sonnen-Fußpunkt F^1 ist der Schnittpunkt der durch die Sonne (S) den Kanten parallel, also durch y, zu ziehenden Lichtachse mit jener Grenzlinie; es ist danach eine z. B. von T nach F^1 gezogene, durch den Strahl (S) M in m abgeschnittene Linie T m der Schlagschatten der Kante T M, u. s. w.

Ebenso wäre zu verfahren, wenn es darauf ankäme, auf der die Ecke abstumpfenden Fläche den Schlagschatten einer im Punkte y verschwindenden Linie, wie z. B. der Fuge V U, zu suchen. Da eine durch den rechts liegenden Punkt z gehende Lothrechte die Grenzlinie der die Ecke abstumpfenden Fläche ist, so ist der Schnittpunkt F^2 dieser Grenzlinie mit einer durch die Sonne (S) parallel V U, d. h. durch y zu ziehenden Lichtachse (S) F^2 der Sonnen-Fußpunkt, und wäre demnach eine aus F^2 durch U gezogene und durch den Strahl (S) V in v abgeschnittene Linie v U der Schlagschatten von V U.

Beispiel 49.

§. 475. **Aufgabe.** In Fig. 133 (Taf. 22) sind die Perspectiven (P Hauptpunkt, $PO/_3$ ein Drittel der Distanz) I und II der

neben einander liegenden elliptischen **Eingänge zweier cylindrischen Tunnels** gegeben. Die Seiten des Tunnelcylinders I verschwinden im Hauptpunkte P, die des andern in dem rechts außerhalb der Construction liegenden Punkte z; (S) sei der Verschwindungspunkt der Strahlen **der vor der Bildebene stehenden Sonne** — es sollen die Schlagschatten-Perspectiven der Tunneleingänge construirt werden.

Ausführung. Da die Grundflächen eines Cylinders ebene Flächen §. 476. und seine Seiten gerade Linien sind, so kann man zur Construction der Schatten mit Vortheil die sehr leicht zu construirenden geradlinig begrenzten Schnitte des Cylinders mit solchen, hier offenbar einfach schiefen, Lichtebenen verwenden, welche der Achse des Cylinders parallel sind, also durch je zwei Seiten desselben gehen. Die Endpunkte der Schlagschatten, welche die einen Cylinderseiten auf die in denselben Lichtebenen liegenden anderen Cylinderseiten werfen, ergeben alsdann Punkte der Grenze des in den Cylinder fallenden Schlagschattens. — Die Grenzlinie jener Lichtebenen muß durch die Sonne, oder was hier dasselbe ist, durch Punkt (S), und zugleich durch den Verschwindungspunkt P der Cylinderseiten gehen, also die Linie (S) P sein. Da ferner die Ebene des Tunneleinganges I (Grundfläche des Tunnelcylinders) parallel der Bildebene ist, so müssen die Schnitte solcher Lichtebenen mit dieser Grundfläche gerade, der Grenzlinie (S) P geometrisch parallele Linien sein, während die Schnitte derselben mit dem Cylindermantel in P verschwindende (gerade) Cylinderseiten sind. Es sind demnach A α P und B β P Schnitte dieser Art. Zieht man nun von den Endpunkten A und B der Cylinderseiten A P und B P, welche Punkte des Schatten werfenden Umfanges der Grundfläche sind, die Strahlen A (S) und B (S), so schneiden diese die Cylinderseiten α P und β P in den Punkten a und b, welche die Schlagschatten von A und B sind. So ist auch in dem Schnitte E ε P der durch den Strahl E (S) abgeschnittene Punkt e der Schlagschatten von E; doch kann man diesen Punkt auch wie andere Schlagschattenpunkte, die auf die Grundebene fallen, vermittelst einer lothrechten Lichtebene, als Schnittpunkt einer von der Projection ε° nach dem der Grundebene entsprechenden Sonnen-Fußpunkte F gezogenen Linie mit dem Strahle E (S) ermitteln.

Faßt man die Ausführung als im Sinne der in den §§. 404 und 433 hervorgehobenen Regel geschehen auf, so ist danach

P b als Schlagschatten der horizontalen Cylinderseite P B und als dadurch construirt anzusehen, daß man die Lichtachse (S) P parallel P B, d. h. durch P gehend, also horizontal, zog, ihren Schnittpunkt P

Digitized by Google

mit dem Horizonte als Sonnen-Fußpunkt zur Construction des auf eine horizontale Cylinderseite P β fallenden Schlagschattens der selbst horizontalen Cylinderseite P B feststellte und dann b darin durch einen Strahl abschnitt;

es kann aber andererseits b β auch als Schlagschatten der einfach-schiefen Linie B β der Grundfläche, und demgemäß als dadurch construirt angesehen werden, daß durch (S) die der Linie B β parallele, also ebenfalls einfach-schiefe Lichtachse (S) F^1 gezogen und in dem Schnittpunkte P derselben mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt zur Construction des auf die horizontale Cylinderseite P β fallenden Schlagschattens von B β festgestellt worden.

Die Seite, in welcher der Objectschatten der Cylinderfläche liegt und von deren Endpunkte T an der Grundfläche die Schlagschattencurve in der Cylinderhöhlung anfängt, wird durch eine an den Cylindermantel berührend gelegte Lichtebene bestimmt. T ist dadurch zu ermitteln, daß man an die Curve des Tunneleinganges aus dem in der unendlich entfernten Grenzlinie der Ebene dieser Curve liegenden Sonnen-Fußpunkte F^1 eine, wegen dieser Lage von F^1, der B β und A α geometrisch parallele Tangente zieht. Um hierbei den Berührungspunkt T durch einfache Linealconstruction festzustellen, kann man, da jene Curve ein Kegelschnitt ist, verfahren, wie in §. 231 gezeigt ist, durch dieselbe nämlich an einer beliebigen Stelle eine Linie v q nach dem unendlich entfernten Verschwindungspunkte F^1 der Linie A α, also hier dieser geometrisch parallel ziehen, ferner α v und A q ziehen und bis zu ihrem Schnittpunkte n verlängern, dann den Schnittpunkt m der Diagonalen des Vierecks α A q v feststellen und zuletzt den Kegelschnitt durch eine n und m verbindende Linie in dem gesuchten Berührungspunkte T schneiden.

Eine schließlich durch die Punkte T, a, b und e gezeichnete Curve ist die Grenze des Schlagschattens des Tunneleinganges I.

§. 477. Die Construction der Schattengrenze an dem Tunneleingange II geschieht dem Vorhergehenden entsprechend. c K $\varkappa$ d und h G γ i sind hier wieder Schnitte des Cylinders mit solchen (hier doppelt-schiefen) Lichtebenen, welche durch die Sonne und zugleich durch je zwei Cylinderseiten gehen; und zwar ist die Grenzlinie dieser Ebenen die Linie (S)(z), weil diese durch die Sonne, oder was dasselbe ist, durch den Punkt (S), und zugleich durch den Verschwindungspunkt z der Cylinderseiten geht. In ihrem Schnittpunkte w mit der lothrechten Grenzlinie y w der Cylinder-Grundfläche bezeichnet dieselbe den Verschwindungspunkt für die Schnittlinien K $\varkappa$ und G γ jener Lichtebenen mit dieser Grundfläche. Schneidet man nun wieder

Digitized by Google

die Cylinderseiten $\varkappa$d und γi durch Strahlen, von (S) durch K und G gezogen, in den Punkten k und g, so sind dies Punkte der Schlagschattencurve. In der Seite, welche an dem Tunnelcylinder durch eine ihn berührende Lichtebene — in der Figur durch eine von w an den Umfang seiner Grundfläche, diese in N berührend, gezogene Tangente bestimmt — festgestellt wird, liegt wieder der Objectschatten der Cylinderfläche, und in dem Punkte N dieser Seite beginnt zugleich die Schlagschattencurve. w ist hier der Sonnen-Fußpunkt zu der Ebene des Tunneleinganges II, denn er ist der Schnittpunkt einer aus der Sonne normal, wie die Cylinderseiten (nämlich in z verschwindend), gegen jene Ebene gerichteten Linie (S) z mit der Grenzlinie y w derselben. —

Faßt man wieder die Construction als im Sinne der in den §§. 404 und 433 hervorgehobenen Regel geschehen, d k z. B. als den in die horizontale Cylinderseite d$\varkappa$ fallenden Schlagschatten der horizontalen Cylinderseite cK auf, so ist (S) z als horizontal wie die in z verschwindende Schatten werfende cK, und als Lichtachse zu der entsprechenden Lichtebene anzusehen, und z, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, als Sonnen-Fußpunkt dazu. Faßt man aber k$\varkappa$ als den in die horizontale Cylinderseite $\varkappa$d fallenden Schlagschatten der doppelt-schiefen Linie K$\varkappa$ auf, so ist (S) z, weil sie wie die Schatten werfende K$\varkappa$ durch w geht, als doppelt-schiefe Lichtachse zu der entsprechenden Lichtebene, und z, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, wieder als der Sonnen-Fußpunkt dazu anzusehen.

Beispiel 50.

Aufgabe. In Fig. 134 (Taf. 24) ist die Perspective (P Hauptpunkt, PO_2 halbe Distanz) einer von einer Viertel-Kugelfläche überwölbten, in einer ebenen Wand angebrachten **Nische** gegeben. Die Ebene der Wand hat zur Grenzlinie eine durch den rechts außerhalb der Construction liegenden Punkt z gehende Lothrechte. **Die Sonne** stehe **vor der Bildebene**, (S) sei der Verschwindungspunkt ihrer Strahlen, F demnach der Sonnen-Fußpunkt für horizontale Ebenen — es soll die Perspective des Schlagschattens in der Nische construirt werden. §. 478.

Ausführung. Man construirt, wie im Beispiele 44, §. 452, Schnitte der Nische mit solchen lothrechten Lichtebenen, welche die Lichtachse (S) F zur Grenzlinie haben, und bestimmt in ihnen die Schlagschatten ihrer Schnittpunkte mit dem oberen Nischenrande durch Strahlen. Während nun §. 479.

Digitized by Google

aber in §. 452 die Perspectiven dieser Schnitte, die an sich Kreise sind, als Kreisstücke um leicht zu ermittelnde Mittelpunkte geschlagen werden konnten, sind dieselben hier, wo die Sonne nicht, wie dort, innerhalb der Bildebene steht, Stücke von Ellipsen. Das zweckmäßigste Verfahren, diese zu construiren, ist wohl folgendes: Nachdem man zuvor die Perspective K C L Q des Halbkreises dargestellt hat, welcher die Grenze zwischen der Cylinder- und der Kugelfläche bildet, construirt man über beliebigen, in z verschwindenden Sehnen J H und C L dieses Halbkreises die Perspectiven J G D H und C R N lothrechter, dem Nischenrande paralleler, in der Kugelfläche liegender Halbkreise, schneidet darauf die Sehnen und die Curve K C L Q durch beliebige, nach F gerichtete Linien α F und β F in Punkten wie α, γ, ϱ, E und β, δ, L, und überträgt diese vermittelst lothrechter Linien in die den Sehnen entsprechenden Halbkreise, wonach man hier durch die Punkte A, G, R, E und B, D, L jene Schnitte der Lichtebenen, so weit sie durch die Kugelfläche gehen, zeichnen kann. Ihre Fortsetzungen durch den Cylinder sind gerade Seiten desselben. Schneidet man diese Schnitte nun durch Strahlen, welche von A und B nach (S) gezogen werden, in a und b, so sind dies Punkte der Grenze des Schlagschattens. a fällt hierbei nicht mehr in die Kugelfläche der Nische, sondern in die durch E liegende Seite des Nischencylinders. Da der Schlagschatten k von K offenbar noch tiefer als a fällt, so bedarf es nicht der Construction eines durch K gehenden vollständigen Nischenschnittes; es genügt vielmehr, mit einer von K nach F gezogenen Linie den Halbkreis K C N Q in $\varkappa$ und darauf die durch diesen Punkt gehende Cylinderseite durch einen Strahl (S) K in k zu schneiden. Der Anfangspunkt T der Schlagschattencurve im Nischenrande ist der Berührungspunkt einer Tangente, welche aus dem in der Ebene der Wand liegenden Sonnen-Fußpunkte F^1 an jene Curve gezogen wird. Da dieser Punkt F^1 der Fußpunkt einer aus der Sonne normal gegen die Ebene der Wand gezogenen Lichtachse sein muß, so ist er festzustellen im Schnittpunkte der durch z gehenden lothrechten Grenzlinie (z Hauptpunkt, y Verschwindungspunkt für normale Linien) mit einer von y durch (S) gezogenen Linie.

Zwanzigstes Kapitel.

Atmosphärisches Licht.

§. 480. Das Wesen des atmosphärischen Lichtes und seine Wirkung auf Körper im Freien ist in den §§. 392—395 genügend erörtert

Digitized by Google

worden, und bedarf es demnach hier nur noch einer Untersuchung der Entstehung der diesem Lichte entsprechenden Schatten im umschlossenen Raume.

§. 481. Während, wie in den angeführten Paragraphen gezeigt ist, im Freien eine Bildung von Kernschatten kaum möglich ist, findet wegen der Abgrenzung der in den umschlossenen Raum dringenden Lichtmasse durch die Fenstergrenzen hier allerdings eine Bildung von Kernschatten statt, und erklären sich die Umstände, von welchen die Gestaltung dieser Schatten und der mit einiger Deutlichkeit wahrnehmbaren Halbschatten abhängt, am leichtesten, wenn man Folgendes berücksichtigt:

§. 482. Faßt man in einem durch ein eckiges oder rundes Fenster erhellten Raume, etwa einem Zimmer, als Schatten werfendes Object zunächst nur einen körperlich gedachten Punkt ins Auge, so kommen von allen in das Zimmer dringenden Strahlen nur diejenigen in Betracht, welche nach dem Punkte gerichtet sind und demnach in ihrer Gesammtheit eine Lichtpyramide oder einen Lichtkegel bilden, dessen Basis das Fenster und dessen Spitze der Punkt ist. Wegen der geradlinigen Fortpflanzung der Strahlen entzieht folgerecht der Punkt einem hinter ihm gelegenen Raume, welcher entsprechend als Schattenpyramide oder Schattenkegel zu bezeichnen ist, dessen Basis die Schatten fangenden Wandflächen des Zimmers enthalten, die vollständige Erleuchtung derart, daß alle darin gelegenen Punkte eine Spur eines das Licht theilweise auffangenden Hindernisses zeigen, d. h. im Halbschatten sind. Die Grenzen aber jener Schattenbasis, d. h. die Grenzen des Schlagschattens des Punktes, müssen dieselben und überhaupt festzustellen sein, gleichviel ob man die ganze Fensteröffnung, oder, wie es bei der perspectivischen Construction geschieht, nur die Grenzen des Fensters als leuchtend ansieht.

§. 483. Ist nun FE in Fig. 135 (Taf. 22) der Grundriß einer Fensteröffnung, und PR der Grundriß eines schmalen Prismas, dessen Schlagschatten auf den Fußboden fällt, so bezeichnen, dem Vorhergehenden nach, von F durch R und von E durch P zu ziehende Strahlen die Grenzen des (Halb-) Schattenraumes hinter dem Prisma.

Digitized by Google

Zum Verständnisse der innerhalb dieses Raumes vorhandenen Dunkelheits-Verschiedenheiten gelangt man, wenn man sich die leuchtende Fensteröffnung in Theile zerlegt denkt und die diesen entsprechenden Schlagschatten ins Auge faßt. Hier entspricht dann der Schlagschatten p P R ϱ dem von dem Punkte E, und der Schlagschatten π P R r dem von dem Punkte F kommenden Lichte. Der Raum zwischen den Grenzen P p und R r überhaupt ist erfüllt von den Schlagschatten sämmtlicher zwischen E und F liegenden Lichttheile. Während nun in dem kleinen Dreiecke P q R, in welches gar kein directes Licht dringt, sich sämmtliche Schlagschatten decken und hier einen Kernschatten bilden, werden alle anderen Schlagschatten von dem Lichte mehrerer oder weniger Theile des Fensters mehr oder weniger wiedererhellt und zu Halbschatten umgewandelt. So empfängt die Stelle k dicht neben dem Kernschatten nur das Licht, welches von den dem Punkte E zunächst liegenden Theilen des Fensters kommt, während andererseits die Stelle n das von allen, mit Ausnahme der dem Punkte F zunächst liegenden, Fenstertheilen kommende Licht empfängt; k, wo sich die Mehrzahl der Schatten decken, ist deshalb an sich erheblich dunkler als die Stelle n, welche selbst wegen des Contrastes zu der ihr benachbarten vollkommen erleuchteten Stelle o noch dunkler erscheint, als sie wirklich ist, und dabei zugleich verursacht, daß o aus demselben Grunde heller erscheint, als ferner liegende Stellen des beleuchteten Fußbodens.

Das von k und n Gesagte trifft in gleicher Weise auch die Stellen l und m, sodaß, wenn man den Schlagschattentheil m n auf einer lothrechten ebenen Fläche y z auffängt, sich darauf seine Dunkelheits-Verschiedenheiten so, wie sie Fig. 136 (Taf. 22) vorführt, zeigen.

In weiterer Entfernung vom Prisma ändern sich die Dunkelheits-Verhältnisse des Schattens. Wenn zunächst der Spitze q des Kernschattens die Stelle i noch denselben Einwirkungen wie die Stelle k unterliegt, so ist dies schon weniger an der Stelle b der Fall, weil hierhin das Licht mehrerer dem Punkte E nahe liegenden Theile des Fensters gelangt. Die Stelle d wird in gleicher Weise erhellt, wie die Stelle n. Auffallend anders aber zeigt sich die

Digitized by Google

Mitte des ganzen Schattens, zwischen b und c. Da hier nämlich das Dreieck ϱ q π Licht zugleich empfängt von den den beiden Punkten E und F zunächst liegenden Fenstertheilen, so ist es erheblich heller als die benachbarten Halbschatten h c und i b, und je weiter entfernt in ihm Punkte von q und je näher sie dabei der Mitte des Dreiecks liegen, wie z. B. u, desto mehr Licht empfangen sie. Scheinbar verstärkt werden die Erleuchtungsgrade des Dreiecks ϱ q π noch dadurch, daß darin z. B. die Stelle a wegen des Contrastes zu der dunklen Stelle b heller, diese aber andererseits wegen des Contrastes zu der helleren Stelle b dunkler erscheint, als sie wirklich ist. In den übrigen Theilen des Schlagschattens erscheint wieder die Stelle d im Contraste zu der helleren Stelle t dunkler, als sie wirklich ist u. s. w.

Da das von a, b und d Gesagte in gleicher Weise auch die Stellen s, c und g trifft, so zeigen sich die Dunkelheits-Verschiedenheiten des Schlagschattens zwischen d und g, wenn man denselben auf einer lothrechten ebenen Fläche w x auffängt, wie dies Fig. 137 (Taf. 22) vorführt.

Dem Vorhergehenden entsprechend erklärt sich die Schattenbildung da, wo das durch das Fenster eindringende Licht durch einen dunklen Gegenstand, etwa das Fensterkreuz, getheilt ist. §. 484.

Ist in Fig. 138 (Taf. 22) wieder F E der Grundriß einer Fensteröffnung, das Viereck D C in der Mitte derselben der Grundriß des lothrechten Pfostens des Fensterkreuzes, P R der Grundriß eines schmalen Prismas, dessen Schlagschatten auf den Fußboden fällt, so begrenzen wieder die den beiden Punkten F und E entsprechenden Schlagschatten e P R ε und φ R P f den (Halb-) Schattenraum, und das Stück P q R, in welchem sich diese beiden äußersten und alle anderen Schlagschatten decken, ist der Kernschatten. Denkt man sich nun, des besseren Verständnisses wegen, die beiden als leuchtend anzusehenden Hälften des Fensters je in eine Anzahl gleicher leuchtender Theile zerlegt — jede etwa in drei, wie sie in der Figur durch die Nummern von 1 bis 6 bezeichnet vorliegen — und erwägt, in welcher Weise jeder einzelne leuchtende Theil erhellend auf den Schlagschattenraum wirkt, so ergiebt sich z. B.

Digitized by Google

hinsichtlich des dem Theile 1 entsprechenden Schlagschattens e P R α, daß in ihm zunächst das Stück a P R ε gewissermaßen als Schattenkern und die Stücke e P a und α R ε als Halbschatten anzusehen sind; daß ferner auf ihn das Licht der anderen 5 Fenstertheile ihrer Reihenfolge entsprechend mehr und mehr erhellend in der Art wirkt, daß das Licht des zweiten Fenstertheiles außer dem ganzen Halbschatten e P a und dem Stück ε b¹ b des andern Halbschattens α R ε, von seinem Schattenkerne a P R ε das Stück a P b¹ ε erhellt, und endlich, daß das Licht des dritten Fenstertheiles, abgesehen von seiner Wirkung auf die genannten Halbschatten, vom Schattenkerne auch noch das Stück b¹ P c¹ erhellt. Durch das Fehlen des Lichtes zwischen C und D wird die regelmäßige Folge erhellend wirkender Fenstertheile plötzlich unterbrochen, und markirt sich die Unterbrechung zum Theil im Halbschatten ε R α, besonders auffallend aber im Schattenkerne durch die dunkle Stelle c¹ P d¹. Durch die von der Grenze D des vierten Fenstertheiles an wieder eintretende Lichtwirkung wird wieder das Stück d¹ P P¹ auffallend erhellt u. s. w.

Die Dunkelheit in diesem — so zu sagen — zweiten Kernschatten c¹ P d¹ ist bei c¹ P neben dem Stücke a P c¹ ε, welches dem vorhergehenden Paragraphen nach heller sein muß, als das Stück d¹ P q, am stärksten. Der Fortgang dieses Kernschattens, dessen Dunkelheit über c¹ d¹ hinaus plötzlich abnimmt, durch die dem zweiten und dritten Fenstertheile entsprechenden Schlagschatten hindurch ist wie sein Anfang zu erklären. Selbstverständlich gilt das, was von dem zweiten Kernschatten c P d gesagt ist, auch für den andern, entsprechend gelegenen Kernschatten γ R δ.

Hinsichtlich des mittlern Theiles d P R γ des Gesammtschattens ist anzuführen, daß derselbe mindestens ebenso hell wie die Schattenmitte in Fig. 137 erscheinen muß, da er von dem Vorhandensein oder der Aufhebung des Lichtes zwischen C und D gänzlich unbetroffen bleibt, während der übrige Theil des Gesammtschattens durch das Fehlen des Lichtes zwischen C und D um $^1/_7$ schwächer erhellt wird, als er es sein würde, wenn C D leuchtete.

§. 485. Daß die dem atmosphärischen Lichte entsprechenden Schatten,

Digitized by Google

besonders in einiger Entfernung vom Schatten werfenden Objecte, sehr unbestimmt begrenzt sind, in jedem Falle viel mehr, als sie in den hierzu gehörigen Figuren der Deutlichkeit wegen haben vorgeführt werden müssen, lehrt die oberflächlichste Beobachtung. Ein weiteres Eingehen auf die feineren Dunkelheits-Abstufungen dieser Schatten, bei denen es wegen der Contraste überhaupt schwer ist, subjective Wahrnehmungen von objectiven streng zu unterscheiden, sowie den Versuch, die an den Grenzen der Gesammtschatten und der zweiten Kernschatten vorkommenden hellen Streifen, vielleicht durch Inflexion, zu erklären, läßt die Allgemeinheit des hier gewählten Beispieles nicht zu; es bedürfte dazu eines bestimmter hingestellten Falles, da auf die Bildung der feineren Schattenabstufungen viele Umstände zugleich — wie etwa die Gestalt und Größe des Fensters sowohl, als des Objectes, die Entfernung des letztern vom Fenster, sein Ort mitten vor dem Fenster oder seitlich davon u. dgl. m. — von Einfluß sind. Nach den gegebenen Andeutungen darf hier füglich von weiteren Erörterungen abgesehen und auf die Beobachtung der Natur selbst verwiesen werden.

Beispiel 51.

Aufgabe. Es ist in Fig. 139 (Taf. 22) die Perspective (P Hauptpunkt) des Innern eines **Zimmers** gegeben, welches durch das durch ein Fenster ohne Kreuz eindringende **atmosphärische Licht** erleuchtet wird — es sollen die Schattenperspectiven der **Fensterwand** selbst und der in dem Zimmer befindlichen Objecte, eines **Tisches** und eines **Schrankes**, construirt werden. §. 486.

Ausführung. Wie §. 482 hervorhebt, ist in Bezug auf jeden einzelnen Punkt eines Objectes das durch ein eckiges Fenster eindringende Licht als in einer Lichtpyramide kommend aufzufassen, deren Spitze der Punkt und deren Basis die Fensteröffnung ist, und entspricht dieser Lichtmasse hinter dem Punkte eine Schattenpyramide, deren Spitze wieder der Punkt selbst ist und deren Basis die Schatten fangenden Flächen des Zimmers enthalten, so, wie in der Figur die Wandfläche rechts in dem durch die Punkte r^1, r^2, r^3 und r^4 gebildeten Vierecke die Basis der Schattenpyramide des Eckpunktes R des Tisches enthält. Da die Lage §. 487.

Digitized by Google

dieſer Punkte genau der der vier Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 der äußern Fenſteröffnung entſpricht, ſo ſind letztere als weſentlich beſtimmend für die Geſtaltung der Schatten überhaupt und demnach auch für die Conſtruction der Perſpectiven derſelben anzuſehen, ſo daß bei letzterer vornehmlich die dieſen Punkten entſprechenden Schatten ins Auge zu faſſen ſind.

Demgemäß ergeben Linien (Strahlen), von dieſen Eckpunkten die Fugen des Fenſtergewändes entlang gezogen, wie 2 B b^2, 3 C c^3 u. ſ. w., vermittelſt ihrer Schnittpunkte b^2, c^3 u. ſ. w. mit den Schatten fangenden Zimmerflächen hierauf zunächſt die durch die Figur $b^2 u c^3 d^4 v a^1$ bezeichnete Stelle, welche von den wenigſten Halbſchatten getroffen wird und deshalb im Ganzen am hellſten erleuchtet iſt.

Um nun die den vier Eckpunkten der Fenſteröffnung entſprechenden Schatten von irgendwelchen Punkten zu conſtruiren, werden die Fußpunkte von dieſen ſowohl, als von jenen, auf den Schatten fangenden Flächen wie bei den anderen Schattenconſtructionen verwendet. In der Figur ſind die (Licht-) Fußpunkte von jenen auf der verlängert gedachten Ebene des Fußbodens F^1 und F^2, auf der Ebene der Decke F^7 und F^5, und auf der Ebene der Wand im Hintergrunde F^4 und F^3.

§. 488. Außer der eben bezeichneten hellſten Stelle ſind die Flächen des Zimmers überall mehr oder minder durch Halbſchatten verdunkelt, welche die Fenſterwand verurſacht; die Stellen aber im Zimmer, in welchen ſich ſämmtliche Halbſchatten decken und einen Kernſchatten bilden, ergeben ſich folgendermaßen: Eine von dem (Licht-) Fußpunkte F^1 durch den Fußpunkt γ der lothrechten Kante B γ bis an die Hinterwand gezogene Linie γ w und eine durch w gezogene Lothrechte w x ergeben den Schlagſchatten der Kante B γ auf dem Fußboden und der Hinterwand; eine von F^7 durch β gezogene Linie β x ergiebt den Fortgang dieſes Schattens über die Decke. Dem entſprechend ſind die theils auf den Fußboden, theils über die Decke fallenden Stücke des Schlagſchattens der lothrechten Kante A δ zu finden. — Der Schatten $a^3 b^4$ der innern horizontalen Kante A B des Fenſterſturzes an der Decke wird gefunden, wenn man von F^5 durch β eine Linie zieht, dieſelbe durch einen Strahl, von 3 durch B gezogen, in b^3 ſchneidet und dann $a^3 b^4$ durch b^3 perſpectiviſch parallel A B, d. h. in P verſchwindend, zieht. a^3 iſt darin der Schatten des Punktes A, b^4 der des Punktes B. — Den über das Fenſtergewände fallenden Schatten C e der Kante C D der Brüſtung ergiebt eine von Punkt 2 durch C gezogene Linie. Schneidet man mit derſelben Linie eine von F^2 durch γ gezogene in c^2 und zieht $e^1 f^2$ durch c^2 perſpectiviſch parallel C D, ſo iſt dies der Fortgang deſſelben Schlagſchattens über den Fußboden, und der Punkt e^1 darin

Digitized by Google

der Schlagschatten des Punktes e, welchen der bei dem Eckpunkte 1 der Fensteröffnung durchkommende Lichtstrahl verursacht.

Um den Schatten der Tischplatte, deren Dicke als unerheblich ver- §. 489.
nachlässigt werden mag, zu finden, werden, nachdem die Projectionen m°, l°, r° und g° ihrer Eckpunkte auf dem Fußboden festgestellt worden, die je vier Schatten der einzelnen Eckpunkte der Tischplatte, wie dieselben den vier Eckpunkten der Fensteröffnung entsprechen, construirt, indem man, um z. B. die vier Schatten r^4, r^3, r^2 und r^1 des Punktes R zu finden, von den Licht-Fußpunkten F^1 und F^2 Linien $r^\circ\varrho$ und $r^\circ\nu$ durch die Projection r° zieht und dann durch ϱ und ν lothrecht gezogene Linien durch Strahlen schneidet, welche von den vier Eckpunkten der Fensteröffnung durch R gehen. In der Figur tragen die Schattenpunkte außer dem Buchstaben des Schatten werfenden Punktes der Tischplatte auch die Ziffer des Eckpunktes der Fensteröffnung, dem sie entsprechen. Verbindet man die entsprechenden Schattenpunkte durch Linien — wobei man die Richtungen von Linien, wie $l^4 m^4$ und $l^1 m^1$, dadurch controliren kann, daß man den Fußpunkt λ der Schatten werfenden Tischkante ML auf der Wand rechts feststellt, und von λ durch l^4 und l^1 zieht — so erzielt man in den vier Vierecken $l^4 r^4 g^4 m^4$, $l^3 r^3 g^3 m^3$, $l^1 r^1 g^1 m^1$ und $l^2 r^2 g^2 m^2$ die Schlagschatten der Tischplatte, welche sich in den beiden Vierecken $l^3 r^4 g^4 m^3$ und $l^2 r^1 g^1 m^2$, den beiden Kernschatten, decken. Die Dunkelheit dieser Kernschatten ist in der Nähe ihrer einander zunächst liegenden Seiten $m^3 g^4$ und $l^2 r^1$ am stärksten. Wäre die Fensteröffnung weniger hoch, so würden die beiden Schatten zu einem einzigen, noch dunkleren, vereinigt sein. — Tangenten, aus den Licht-Fußpunkten F^1 und F^2 an den runden Tischfuß gezogen, ergeben die Schatten desselben auf dem Fußboden; ihre Fortsetzung auf der Wand rechts ist lothrecht.

Bei der Construction der vier auf die Hinterwand fallenden Schatten §. 490.
des Schrankes ist daran zu denken, daß derselbe nicht von dem Lichte erreicht werden kann, welches an der Grenze 2. 3 der Fensteröffnung eindringt, weil dieses Licht durch das Fenstergewände bis zur Kante Bγ abgefangen wird. Für die lothrechte Kante HJ des Schrankes ist vielmehr die Kante Bγ selbst, oder in der äußern Fensteröffnung die Linie 5. 6 (Fußpunkt F^6 auf der Ebene des Fußbodens) die Lichtgrenze, und zwar ergiebt sich diese in einer lothrechten Linie, welche durch den Schnittpunkt F^6 einer von J durch γ gezogenen Linie mit der $F^1 F^2$ gezogen wird. So ist auch für die lothrechte Kante NQ des Schrankes die Linie 7. 8, die durch den Punkt F^8 geht, in welchem eine von Q durch γ gezogene Linie die $F^1 F^2$ schneidet, die Lichtgrenze. Demnach sind denn h^4, h^6, h^5

Digitized by Google

und h^1 die Schatten des Punktes H, welche den einzelnen bei 4, 6, 5 und 1 eindringenden Strahlen entsprechen, n^8, n^7, n^1 und n^4 aber die Schatten des Punktes N, welche den einzelnen bei 8, 7, 1 und 4 eindringenden Strahlen entsprechen. Daß von den nunmehr zu ziehenden Schlagschattengrenzen die beiden $h^6 n^8$ und $h^5 n^7$, obgleich sie Schatten der horizontalen Kante HN auf der ihr parallelen Hinterwand sind, nicht parallel mit HN, sondern schief sind, darf nicht befremden, da hier der Schatten jedes einzelnen Punktes der Kante HN — weil einem solchen stets eine andere Lichtgrenze, als 7. 8 und 5. 6 sind, entspricht — ein den Vierecken $h^4 h^6 h^5 h^1$ und $n^4 n^8 n^7 n^1$ ähnliches Viereck bilden muß, worin immer die der Lichtgrenze 1. 4 entsprechende Seite gleich lang, die der veränderlichen Lichtgrenze aber entsprechende Seite, je weiter der Schatten werfende Punkt selbst nach N zu liegt, desto länger ist.

Von dem Gesammtschatten des Schrankes, welcher von der gebrochenen Linie $h h^6 n^8 p Q$ eingeschlossen ist, sind mit Ausnahme der von der gebrochenen Linie $n n^1 o Q$ eingeschlossenen Stelle, welche, weil sie von allem Lichte ausgeschlossen ist, Kernschatten hat, alle übrigen Theile mehr oder weniger zu Halbschatten aufgehellt, unter denen jedoch die von den gebrochenen Linien $h h^4 n^4 o Q$ und $n n^7 p Q$ eingeschlossenen sich durch stärkere Dunkelheit besonders bemerklich machen.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Schattenperspectiven auf der horizontalen ebenen Bildfläche.

§. 491. Da aus der Construction der Perspectiven der dem Sonnenlichte entsprechenden Schatten sich die Constructionen der den anderen Lichtgattungen entsprechenden Schatten leicht herleiten lassen, wird es genügen, in diesem Kapitel sowohl, wie in den beiden folgenden, ausschließlich das Sonnenlicht in Betracht zu nehmen.

Das Verfahren hierbei richtet sich genau nach den für die lothrechte Bildebene aufgestellten Regeln, und muß nur die Bezeichnung des Sonnenstandes der veränderten Stellung der Bildebene entsprechend geändert werden.

Digitized by Google

Sollte z. B., um an die in §. 366 ausgeführte Construction §. 492.
auf der horizontalen ebenen Bildfläche anzuknüpfen, in jener Fig. 100 (Taf. 18) der Sonnenpunkt, bei Annahme der Sonne als vor dem Beschauer 64° über dem Horizonte und 35° links von der in der Construction angenommenen Verticalebene stehend, bestimmt werden, so würde diese Angabe des Sonnenstandes, bei der hier vorausgesetzten Lage der Bildebene, in Bezug auf die Verticalebene festzuhalten, in Bezug aber auf den (Erd-) Horizont dahin anders zu fassen sein, daß die Sonne, wenn als 64° über dem Horizonte, dadurch als 26° unterhalb des Zenithes stehend, dessen Perspective in der Construction mit dem Punkte P zusammenfällt, gegeben sei.

Es ist demnach links an die Verticale P O in O der Winkel von 35° anzutragen, die Grenzlinie s ω dadurch in s zu schneiden und die Länge s O um s in dieselbe Grenzlinie in s ω zu übertragen; es ist ferner unterhalb der Grenzlinie in ω der Winkel von 26° anzutragen und eine durch s parallel der Verticale gezogene Linie dadurch in S, welcher der gesuchte Sonnenpunkt ist, zu schneiden. Da in der Figur der herabgeschlagene Gesichtspunkt O unten außerhalb des Constructionsraumes liegt, ist zur Feststellung der Punkte s und ω die halbe Distanz P $O_{/2}$ derart zu verwenden, daß man an P $O_{/2}$ in $O_{/2}$ den Winkel von 35° anträgt, die Grenzlinie s ω in $s_{/2}$ schneidet, die Länge $s_{/2}$ $O_{/2}$ um $s_{/2}$ in dieselbe Grenzlinie in $s_{/2}$ $\omega_{/2}$ überträgt und dann P ω gleich 2 mal P $\omega_{/2}$, und P s gleich 2 mal P $s_{/2}$ macht.

Sollte hiernach der auf die über C L befindliche Wand fallende §. 493.
Schlagschatten τ t des in derselben Wand steckenden, zu ihr normalen Stabes τ T construirt werden, so ist vom Sonnenpunkte S aus eine τ T parallele Lichtachse S F gegen die Grenzlinie jener Wandebene, d. i. die Verticale, zu ziehen, wonach F der Sonnen-Fußpunkt auf der Wandebene ist. Eine von F durch τ gezogene Linie τ t, in t durch den Strahl S T abgeschnitten, ist dann der gesuchte, hier hinter den Gesimsvorsprung fallende Schlagschatten.

Digitized by Google

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Schattenperspectiven auf der schiefen ebenen Bildfläche.

§. 494. Für die Construction der Perspective des Sonnenpunktes ist die Anleitung aus den für die Construction der Perspectiven schiefer Ebenen geltenden Regeln zu entnehmen.

Sollte z. B., um wieder an die in §. 369 ausgeführte Construction anzuknüpfen, in der entsprechenden Fig. 102 (Taf. 18) bei Annahme der Sonne als vor der Bildebene 15° links der Verticalebene und 25° über dem Horizonte stehend, der auf die Hausfaçade fallende Schlagschatten ρ r eines oben an der Thür horizontal in der Façade steckenden Stabes ρ R construirt werden, so findet man dazu den Strahlen-Verschwindungspunkt der Sonne folgendermaßen:

Dem gegebenen Sonnenstande nach muß dieser Punkt in der Grenzlinie einer lothrechten, durch das Auge gehenden Ebene, die 15° nach rechts von der Verticalebene abweicht, und zwar darin 25° unter der Grenzlinie der horizontalen Ebenen liegen. Die Grenzlinie der lothrechten Ebene wird am einfachsten gezogen durch die Verschwindungspunkte zweier der Ebene angehörigen, zu einander normalen Linien, am besten einer lothrechten und einer horizontalen Linie; und zwar ist, wenn man an h o in o den Winkel von 15° anträgt und die Grenzlinie D D^1 der horizontalen Ebenen in x schneidet, dieser der Verschwindungspunkt für die horizontale Linie, der schon vorhandene Punkt 1 aber der Verschwindungspunkt für die lothrechte Linie, demnach 1 x die Grenzlinie (H Hauptpunkt, ω herabgeschlagener Gesichtspunkt), in welcher der Strahlen-Verschwindungspunkt zu suchen ist. Derselbe findet sich, wenn man zunächst die Linie ω x zieht und an dieselbe unterhalb in ω den Winkel von 25° anträgt, in dem hierdurch erzielten Schnittpunkte (S).

Um nun den Schlagschatten des horizontalen Stabes ρ R zu finden, zieht man von (S) aus eine dem letztern parallele, also ebenfalls durch h gehende Lichtachse (S) F gegen die Grenzlinie d l

Digitized by Google

der Ebene der Hauptfaçade, wonach F der Sonnen-Fußpunkt für letztere, und eine von F durch ϱ gezogene Linie ϱ r, durch den Strahl (S) R in r abgeschnitten, der gesuchte Schlagschatten ist.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Schattenperspectiven auf der cylindrisch gekrümmten (Panorama-) Bildfläche.

§. 495. Die Construction der Schattenperspectiven entspricht vollkommen dem bei der Construction der Perspectiven der Objecte selbst eingeschlagenen Verfahren. Hat man hierbei die Grundriß-Methode angewandt, so muß man, um diese durchzuführen, die Schlagschattengrenzen der Objecte, oder doch Punkte derselben, zuvor im Grund- und Aufrisse geometrisch feststellen und dann deren Perspectiven in derselben Weise auf die Bildfläche übertragen, wie die Perspectiven der Objecte selbst. Doch kann man bei der Construction der Schattenperspectiven nachträglich mit Vortheil in die Verschwindungspunkt-Methode übergehen, ohne hierbei Schwierigkeiten zu fürchten zu haben, da ja die Anwendung der Grundriß-Methode die Brechung der ganzen Bildfläche in einzelne Theile ebenfalls voraussetzt. Zudem sind schließlich, wie das folgende Beispiel zeigen wird, erhebliche Vortheile in einer Verbindung beider Methoden zu finden.

Auch hier wird es genügen, ausschließlich das Sonnenlicht in Betracht zu nehmen.

§. 496. Da die mehreren sich an einander reihenden Bildebenen, in welche die cylindrische Panoramafläche beim Construiren zerlegt wird, nach einander die verschiedenen möglichen Stellungen zum Sonnenpunkte einnehmen, so müssen, wie sich am deutlichsten aus einem Beispiele ersehen läßt, bei der Construction der Schattenperspectiven die in dem Kapitel über Sonnen- und Mondlicht getrennten, dem Stande der Sonne innerhalb, vor oder hinter der Bildebene entsprechenden Constructionsarten zugleich zur Anwendung kommen.

Digitized by Google

Beispiel 52.

§. 497. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 140 (Taf. 24) in den Figuren I, II, IV, V, VI und dem Kreise III wieder der Grundriß des **Stadttheiles**, welcher schon im Beispiele 38 zum Theil vorgeführt worden, und in dem Kreise um O der Grundriß der cylindrischen Bildfläche gegeben. In Fig. 141 ist auf der zur Ebene abgewickelt vorliegenden, in 12 Bildebenen zerlegten Panoramafläche die Perspective jenes Stadttheiles im doppelten Maßstabe des Grundrisses gegeben — es sollen die Schattenperspectiven der gegebenen Objecte construirt werden unter Annahme der **Sonne** als 45° hoch in der lothrechten Ebene stehend, deren Grundriß-Projection in Fig. 140 die Linie (N)(S) ist.

§. 498. **Ausführung.** Aus dem Grundrisse ist zu ersehen, daß dem in O stehenden Beschauer von der einen Hälfte der Objecte die Schattenseiten, von der andern Hälfte die beleuchteten Theile zugewandt sind, und daß dem entsprechend der Stand der Sonne zu den einzelnen der zwölf Bildebenen, in welche die Panoramafläche zerlegt ist, folgendermaßen zu bezeichnen ist:

Die Sonne steht:

hinter der 8. Bildebene und zwar in der Verticalebene derselben,
hinter der 7. und 9. Bildebene, 30° von deren Verticalebenen abweichend,
hinter der 6. und 10. Bildebene, 60° von deren Verticalebenen abweichend,
innerhalb der 5. und 11. Bildebene, mit denen ihre Strahlen parallel sind,
vor der 4. und 12. Bildebene, 60° von deren Verticalebenen abweichend,
vor der 3. und 1. Bildebene, 30° von deren Verticalebenen abweichend,
vor der 2. Bildebene, innerhalb der Verticalebene derselben.

Nach dieser Feststellung ist in Fig. 141, der in dem Kapitel 19 gegebenen Anleitung gemäß, zu jeder einzelnen Bildebene der Ort des Sonnenpunktes oder des Strahlen-Verschwindungspunktes nebst dem entsprechenden Sonnen-Fußpunkt für horizontale Ebenen zu construiren. Das darstellbare perspectivische Bild S^s der Sonne selbst fällt dabei in die 8. Bildebene. Es wird dadurch ermittelt, daß man an den Horizont in dem Distanzpunkte D der 8. Bildebene den gegebenen Höhenwinkel der Sonne von 45° anträgt und die Verticale derselben Bildebene in S^s schneidet. Die 2. Bildebene, in welche der entsprechende Strahlen-Verschwindungspunkt fällt, ausgenommen, liegen für alle übrigen Bildebenen die zugehörigen Sonnenpunkte seitlich außerhalb ihrer Grenzen. So fällt z. B. der Sonnenpunkt für die 7. Bildebene in die 8. Bildebene. Um

Digitized by Google

ihn festzustellen, wird an die Verticale der 7. Bildebene in O^7 der Abweichungswinkel der Sonne von 30° rechts angetragen, der Horizont in F^7 geschnitten, durch F^7 die lothrechte Lichtachse gezogen, es wird das Maß $F^7 O^7$ um F^7 in den Horizont in $F^7 \omega$ übertragen, an den Horizont in ω der Höhenwinkel der Sonne von 45° angetragen und die Lichtachse in S^7 geschnitten, wonach dies der gesuchte Sonnenpunkt, F^7 aber der Sonnen-Fußpunkt dazu ist u. s. w. — In entsprechender Weise sind die durch den Buchstaben N bezeichneten Strahlen-Verschwindungspunkte für die 4., 12., 3., 1. und 2. Bildebene construirt. — In der Figur bezeichnen die den Punkten P, O, S, F und N beigefügten Ziffern je die Ziffer der Bildebene, welcher jene Punkte zugehören.

Den runden Thurm ausgenommen, sind die im Schatten befindlichen Flächen der gegebenen Objecte bei einem Vergleiche ihrer Richtung mit der der Strahlen ohne Schwierigkeit sogleich zu erkennen. Um ihre Schlagschatten zu construiren, wird auf jeder einzelnen Bildebene mit den ihr entsprechenden Theilen der Objecte so verfahren, wie dies in Kap. 19 gezeigt ist. Um z. B. die Schlagschatten-Perspective $c^\circ c^1$ der auf die 3. Bildebene fallenden Perspective $c^\circ c$ der lothrechten Kante C des Stadttheiles II zu construiren, wird von c° eine Linie nach dem Sonnen-Fußpunkte F^3 gezogen und dieselbe durch einen Strahl, von c nach dem Strahlen-Verschwindungspunkte N^3 gezogen, in c^1 geschnitten, u. s. w.

Um an dem runden Thurme III, dessen Perspective größtentheils die 7. Bildebene enthält, den Object- und danach seinen Schlagschatten zu construiren, wird aus dem Sonnen-Fußpunkte F^7 eine Tangente an die Grundfläche des Thurmes gezogen, und ist dann die durch den Berührungspunkt a° gehende Cylinderseite $a^\circ a$ die Objectschattengrenze. Die in einer gebrochenen Linie über die benachbarten Bildebenen fallende Schlagschattengrenze findet man stückweise, wenn man die eben gezogene Tangente bis a^4 in der Grenze der 6. Bildebene verlängert; dann, da hier der Schlagschatten in die 6. Bildebene tritt, jene Linie über diese fortsetzt, indem man vom Sonnen-Fußpunkte F^6 durch a^4 bis a^3 in der Grenze der 5. Bildebene zieht; hierauf, da die 5. Bildebene den Sonnenstrahlen parallel ist, $a^3 a^2$ horizontal, d. h. nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Sonnen-Fußpunkte F^5 gerichtet zieht, und endlich von a^2, wo der Schatten in die 4. Bildebene tritt, nach ihrem Sonnen-Fußpunkte F^4 zieht. Um die Länge dieser gebrochenen Schlagschattenlinie, d. h. in ihr den Schlagschatten a^1 des Punktes a zu bestimmen, wird dem Vorigen entsprechend vom Sonnenpunkte S^7 der 7. Bildebene ein Strahl durch a bis a^7 gezogen, derselbe über die 6. Bildebene fortgesetzt, indem man

Digitized by Google

vom Sonnenpunkte S^6 dieser Bildebene durch a^7 bis a^6 zieht; darauf wird über die 5. Bildebene, deren Sonnenpunkt F^5 in unendlicher Entfernung 45° über dem Horizonte liegt, ein durch a^6 gehender, vom Horizonte um 45° abweichender Strahl $a^6 a^5$ gezogen und dieser von a^5 aus nach dem Strahlen-Verschwindungspunkte N^4 der 4. Bildebene über diese fortgesetzt, bis er die vorher construirte gebrochene Schlagschattenlinie, und zwar in a^1 schneidet. — Ebenso wird an dem Theile der Thurmperspective, welcher auf der 6. Bildebene liegt, an die dem Beschauer abgewandte Hälfte der unteren Grundfläche eine Tangente aus dem Sonnen-Fußpunkte F^6 gezogen und dadurch die Cylinderseite $b^0 b$ bestimmt, in welcher die Objectschatten-grenze liegt. Die entsprechende Schlagschattengrenze wird gefunden, wenn man wieder die Tangente bis b^4 verlängert, wo der Schlagschatten die lothrechte Vorderfläche des Stadttheiles II trifft, an dieser $b^4 b^3$ lothrecht empor-, und dann abermals von F^6 durch b^3 bis b^2 zieht. $b^2 b^1$ auf der horizontalen Dachfläche ist dann wieder horizontal gerichtet. b^1, der Schlag-schatten von b, wird wieder bestimmt, wie vorher a^1, indem man von S^6 einen Strahl durch b bis b^5, und seine Fortsetzung $b^5 b^1$ um 45° vom Horizonte abweichend zieht. — Hiernach sind a^1 und b^1 Schlagschatten der Punkte a und b der oberen Grundfläche des Thurmes. Die Schlagschatten anderer Punkte derselben, wie z. B. e^1, werden wie a^1 und b^1 ermittelt.

§. 499. Das hier angewandte Verfahren — welches **entweder** nur gerad-linig begrenzte Schlagschatten ergiebt, während diese hier doch von Curven begrenzt sein sollen, welche, wie auch die Strahlen selbst, der Sinuslinie ähnlich sind, **oder** aber die Zerlegung des Panoramacylinders in eine sehr große Anzahl ebener Bildflächen erfordern würde — kann zum Theil vereinfacht werden, wenn man, wie dies in der Figur bei den Stadt-theilen IV und V vorgeführt ist, im Grundrisse zuvor die geometrischen Projectionen der Schlagschatten darstellt und dann die Perspectiven q, m, t, l, k, v, h, i, u u. s. w. von günstig gelegenen Punkten Q, M, T u. s. w. der Grenzen derselben nach der Grundriß-Methode construirt, wodurch man die Krümmung jener Curven zugleich sicherer feststellt.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Hülfsconstructionen.

§. 500. Die Anwendung von Hülfsconstructionen in den Fällen, wo der Sonnenpunkt und sein Fußpunkt außerhalb des Constructionsraumes

Digitized by Google

liegen, ist so umständlich, daß es fast immer vorzuziehen ist, die ganze Construction zuvor in kleinerem Maßstabe auszuführen und hernach in die erforderte Größe zu übertragen. Wo dies aber durchaus umgangen werden soll, finden sowohl hinsichtlich der nach dem Sonnenpunkte gerichteten Strahlen, als der nach dem Sonnen-Fußpunkte gerichteten Hülfslinien und Schlagschattengrenzen die in dem Abschnitte C des Kapitels 5 gezeigten Hülfsconstructionen Anwendung. Für anderweitige Hülfsconstructionen können die folgenden Paragraphen bei der großen Zahl der Möglichkeiten nur einige Fingerzeige bieten.

§. 501. Ist CE in Fig. 142 (Taf. 21) ein lothrechter Stab, dessen Schlagschatten C e auf der Grundebene gesucht werden soll unter der Annahme, daß die Sonne 46° rechts der Verticalebene und 30° über dem Horizonte hinter der Bildebene stehe, daß aber der Sonnenpunkt S und sein Fußpunkt F auf der Grundebene außerhalb des Constructionsraumes liege, so kann man in Ermangelung des Fußpunktes F die perspectivische Richtung des Schlagschattens dadurch feststellen, daß man, da derselbe dem Stande der Sonne nach um 46° von der Verticale, d. i. um 44° von der Bildebene abweichen muß, an eine durch C gelegte, der Grundlinie parallele Linie C ε den Winkel von 44° trägt, die zur Bildebene normale Tangente h g desselben in h i (h γ geometrisch gleich h g gemacht) perspectivisch darstellt und eine Linie von C durch i zieht. Da man nun die perspectivische Länge dieses Schlagschattens hier nicht durch einen Strahl abschneiden kann, so stellt man sie zuvor dadurch in C ε geometrisch fest, daß man den Complementwinkel von 60° zu dem gegebenen Höhenwinkel der Sonne an C E in E anträgt und dadurch C ε in ε schneidet, und überträgt sie dann, da hier ω, der herabgeschlagene Gesichtspunkt zu der Grenzlinie (Lichtachse) S F, zugleich der Theilpunkt zu den in F verschwindenden Linien ist, durch eine von ω durch ε gezogene Linie perspectivisch in C e.

§. 502. Will man aber dem Verfahren treu bleiben, welches in Kap. 19 bei der Construction der dem Sonnenlichte entsprechenden Schatten gezeigt worden, so kann man den außerhalb des Constructionsraumes fallenden Sonnenpunkt und seinen Fußpunkt für je eine Schatten

Digitized by Google

werfende Linie durch näherliegende Punkte ersetzen, wenn man dabei Folgerungen aus dem Inhalte des §. 120 benutzt.

Ist z. B. A B in derselben Fig. 142 ein lothrechter Stab, dessen über die Grundebene fallender Schlagschatten A b bei demselben Sonnenstande, wie vorher, construirt werden soll, so zieht man B P und A P, theilt auf einer von ihnen, etwa auf B P, einen beliebigen Bruchtheil ihrer Länge, etwa ein Drittel, in B β geometrisch ab und zieht durch β eine der Verticale parallele Linie $\alpha\beta$, und durch α und β dem Horizonte parallele Linien o φ und α f. Trägt man darauf auf der verlängerten $\beta\alpha$ in βO_3 gleichfalls ein Drittel der gegebenen Distanz (P O) auf, trägt man ferner an βO_3 in O_3 den 46° großen Abweichungswinkel der Sonne von der Verticalebene an und schneidet dadurch o φ in φ, macht man darauf φ o geometrisch gleich φO_3, legt an erstere in o den 30° großen Höhenwinkel der Sonne und schneidet dadurch eine durch φ gezogene Lothrechte in s, so ist dies ein den Sonnenpunkt S ersetzender Punkt, um den Strahl B b ziehen zu können. Der Schnittpunkt f aber von s φ und α f ist der den Fußpunkt F ersetzende Punkt, um die Richtung A b des Schlagschattens bestimmen zu können.

Entsprechend der vorweg als ein Drittel von B P bezeichneten Länge B β sind hier die erzielten Hülfspunkte s, φ und f aus einer Construction hervorgegangen, in welcher bei der stets eingehaltenen Aehnlichkeit der Figuren alle Stücke ein Drittel der Größe und Länge haben, welche die gleichnamigen Stücke in der durch den Raum nicht beschränkten Construction haben.

§. 503. Im Anschlusse an dieses Verfahren sind denn auch die Schlagschatten schiefer Linien zu ermitteln.

Soll z. B. in Fig. 143 (Taf. 23) bei dem Stande der Sonne hinter der Bildebene, 48° links der Verticalebene und 39° über dem Horizonte, zunächst der Schlagschatten des lothrechten Stabes A B auf der Grundebene construirt werden, so ist, wenn man wegen zu großer Entfernung der Punkte S und F das eben gezeigte Verfahren anwendet und dabei B β gleich der Hälfte von B P macht, der näher liegende Punkt s, um den Strahl B b ziehen zu können, und der Punkt f als sein Fußpunkt für den Schatten des Stabes A B zu

Digitized by Google

benutzen. Handelt es sich nun darum, den Schlagschatten N b des schiefen, der Bildebene parallelen Stabes N B zu construiren, so ergiebt — wie in der unbeschränkten Construction eine durch den Sonnenpunkt mit N B parallel gezogene Lichtachse S F^1 im Punkte F^1 — in der beschränkten Construction eine durch s mit N B parallel gezogene Linie s f^1 in ihrem Schnittpunkte f^1 mit der Grundebene, d. i. mit der verlängerten α f, einen Punkt, welcher als Sonnen-Fußpunkt zu N B benutzt werden kann.

Soll in derselben Figur der Schlagschatten M b des doppelt- §. 504.
schiefen Stabes M B construirt werden, der in M die Grundebene trifft und, einer lothrechten Ebene angehörend, deren Grenzlinie X H ist, im Punkte X der letztern verschwindet, so würde in der unbeschränkten Construction S X die Lichtachse, und deren Schnittpunkt F^2 mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt sein; es ist demnach in der eingeschränkten Construction der Punkt x in der Lothrechten x h als Verschwindungspunkt zu behandeln, und ergiebt eine von s durch x bis zum Punkte f^2 gezogene Linie in letzterem einen den Fußpunkt F^2 vertretenden Punkt, durch welchen von M aus M b gleichfalls gezogen werden kann.

Bei der Construction der Schlagschatten schief stehender Objecte §. 505.
auf engbegrenzter Constructionsfläche ist es im Allgemeinen leichter, die Schatten einzelner Punkte derselben vermittelst lothrechter, bis an die Schatten fangende Ebene gezogener Linien zu ermitteln, so, wie in Fig. 124, Taf. 20 (§§. 440 und 441), die Construction der Schattenpunkte b und b° vermittelst der lothrechten Linien B β und B β° geschehen ist.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Spiegelbilder.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

A. Ebene Spiegel.

§. 506. Die in §. 17 der Optik hervorgehobenen, den scheinbaren Ort der Spiegelbilder betreffenden Regeln:

1) die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles (Ausfallstrahles) bis zum Spiegelbilde ist gleich der Länge des einfallenden Strahles und bildet mit der Spiegelfläche denselben Winkel, welchen der einfallende Strahl mit ihr bildet,

2) das Spiegelbild liegt im Schnittpunkte des verlängerten Hauptstrahles mit der Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles (Ausfallstrahles),

3) das Spiegelbild liegt in dem verlängerten Hauptstrahle so weit hinter der Spiegelfläche, wie der gespiegelte Punkt davor liegt,

geben ausreichenden Anhalt für das Verfahren bei der Construction der Perspectiven der Spiegelbilder.

§. 507. In den meisten Fällen, besonders bei ebenen Spiegeln, kann von dem bei der Spiegelung auf der Spiegelfläche selbst stattfindenden

Digitized by Google

Vorgange und von dem Operiren auf der Perspective der Spiegelfläche abgesehen, vielmehr die Perspective des Spiegelbildes unter Berücksichtigung des Abstandes des Objectes vom Spiegel so construirt werden, als wäre sie die Perspective eines zweiten, gleichen, nur verkehrten Objectes hinter der Spiegelfläche.

Sind nun in Fig. 144 (Taf. 24) die Flächen B C E F und A B F G spiegelnde Wände, von denen die erstere mit der Bildebene zusammenfällt, während die zweite zu dieser normal steht, wie in Fig. 145 (Taf. 24) der geometrische Grundriß (A B normal zu B C) zeigt, und ist ferner die Fläche A B C H ein spiegelnder Fußboden, und es sollen die Perspectiven der Spiegelbilder einer normal auf dem Fußboden stehenden dreieckigen Fläche J K L construirt werden, so wird §. 508.

1) das Spiegelbild auf dem Fußboden folgendermaßen ermittelt: Die Bilder der Punkte J und K, die selbst in der Fußbodenebene liegen, fallen mit diesen Punkten selbst zusammen. Um aber das Bild l^1 des Punktes L zu finden, verlängert man nach der in §. 506 unter 3) gegebenen Regel den Hauptstrahl L K über K hinaus und macht die Verlängerung K l^1 gleich K L. Es liegen alsdann in der Linie K l^1 die Spiegelbilder aller zwischen K und L gelegenen Punkte, d. h. K l^1 ist das Spiegelbild der Dreiecksseite K L. Danach muß denn auch die Verbindungslinie zwischen J und l^1 das Spiegelbild der Seite J L, und das Dreieck J K l^1 das des Dreiecks J K L sein.

2) Das Bild in dem mit der Bildebene zusammenfallenden Spiegel B C E F wird gefunden, wenn man zunächst von dem Punkte K gegen den Spiegel den Hauptstrahl, d. i. eine perspectivisch normale, in P verschwindende Linie K m zieht und ihre Verlängerung m k^2 über m hinaus vermittelst des Distanzpunktes perspectivisch gleich m K, nämlich dem aus Fig. 145 geometrisch entnehmbaren Abstande des Punktes K von M, macht. Macht man alsdann noch auf gleiche Art k^2 i^2 perspectivisch gleich K J, so ist k^2 i^2 das Spiegelbild von K J. Und errichtet man in k^2 eine Lothrechte, schneidet sie durch eine von L nach P gezogene Linie in l^2 und verbindet l^2 mit i^2 durch eine Linie, so ist das §. 509.

Digitized by Google

Dreieck $i^2 k^2 l^2$ das Spiegelbild des gegebenen Dreiecks J K L auf der Wand B C E F.

§. 510. Construirt man in Fig. 145 geometrisch das Spiegelbild $i^2 k^2$ von J K und zieht nach ihm die Gesichtslinien $O i^2$ und $O k^2$, so schneiden diese die Spiegelfläche in den Punkten v und u, welche auf letzterer die Projectionen der reflectirenden Punkte sind. Der Abstand dieser Punkte von der Verticalebene ist gleich dem normalen Abstande der Punkte i^2 und k^2 von der Verticale in Fig. 144, weshalb man diese Punkte hier auch dadurch ermitteln kann, daß man die Maße P v und P u aus Fig. 145 in p v und p u der Fig. 144 überträgt und die verlängerte J K durch Linien schneidet, die lothrecht durch v und u gezogen werden.

§. 511. 3) Das Spiegelbild in der Wand A B F G (Fig. 144) wird dem Vorhergehenden entsprechend gefunden, wenn man gegen sie perspectivische Normalen, d. h. der Grundlinie parallele Linien J ι, K ϰ u. s. w. von den Punkten J, K und L aus zieht und deren Verlängerungen ιi, ϰk u. s. w. hinter der Wand gleich den Abständen jener Punkte selbst von der Wand macht.

§. 512. Das, der in §. 506 gegebenen ersten Regel entsprechende Verfahren, welches bei diesem Beispiele umständlicher, jedoch bei weiter unten folgenden Constructionen, besonders der Bilder im cylindrischen Spiegel vortheilhaft ist, wäre folgendes:

Nachdem man in dem geometrischen Grundrisse, Fig. 145, z. B. für K die Projection R des reflectirenden Punktes auf dem Spiegel A B festgestellt und in Fig. 144 in der Grundlinie A B desselben Spiegels die Perspective r dieses Punktes construirt hat, ist hier K r ein horizontaler Einfallstrahl, dessen Verschwindungspunkt Z ist. Trägt man nun den Winkel P O Z, um welchen dieser Strahl von dem Spiegel A B F G, oder, was dasselbe ist, von der Verticalebene nach rechts abweicht, links an die Verticale und schneidet den Horizont in W, so ist dies der Verschwindungspunkt für den entsprechenden horizontalen, natürlich nicht in das Auge gehenden Ausfallstrahl r s und seine Rückwärtsverlängerung r W. Mißt man darauf vermittelst des Theilpunktes t die Länge des Einfallstrahles, so ist er gleich r q, und überträgt man

Digitized by Google

r q nach links r q' und schneidet die Rückwärtsverlängerung r W durch eine nach dem Theilpunkte tw gezogene Linie q' tw in k, so ist r k perspectivisch gleich K r gemacht und das Spiegelbild k von K vermittelst des horizontalen Einfallstrahles K r construirt.

Die Perspective des in das Auge reflectirten Einfallstrahles, der an sich eine schiefe Linie ist, ist K k; die Perspective des wirklich in das Auge gelangenden Ausfallstrahles nebst seiner Rückwärtsverlängerung ist der eine Punkt k; denn dieser Ausfallstrahl ist, weil er nach dem Auge gerichtet ist, eine schiefe Linie der in §. 43 erwähnten Art.

In gleicher Weise, durch die horizontalen Einfallstrahlen J y und L λ und durch die der Verticale geometrisch parallelen Rückwärtsverlängerungen y i und λ l der entsprechenden Ausfallstrahlen, sind auch die Bilder i und l der Punkte J und L zu construiren. Das entsprechende Verfahren bei der Construction der Spiegelbilder in der Wand B C E F ist schon in §. 510 angedeutet worden.

Das in §. 512 vorgeführte Verfahren kürzt sich bedeutend ab, §. 513.
wenn man, um die Messung des Einfallstrahles K r und der Rückwärtsverlängerung r k zu umgehen, der in §. 506 gegebenen zweiten Regel folgt und r W sofort durch die Verlängerung des Hauptstrahles K κ in k schneidet.

Je nach der Auffassung kommen der Linie r W verschiedene §. 514.
Geltungen zu:

1) kann man sie als eine lothrechte Linie der Spiegelebene A B F G ansehen, und hat sie dann, da in ihr die Reflexionspunkte der horizontalen Einfallstrahlen K r und L λ und auch der in das Auge reflectirten Einfallstrahlen K k und L l liegen, in Beziehung zu der Linie K L die Bedeutung der reflectirenden Linie des Spiegels;

2) kann man sie als die Perspective einer unendlich langen horizontalen Linie ansehen, nämlich als das Spiegelbild der unendlich langen horizontalen Linie r Z. Ihr Verschwindungspunkt W ist bei dieser Auffassung das Spiegelbild des Verschwindungspunktes Z:

Digitized by Google

3) kann man sie als Spiegelbild der Grenzlinie (s. die folgende Nr. 4) Z e auffassen;

4) kann sie als Grenzlinie der lothrechten Ebene angesehen werden, die durch die Gesammtheit der nach dem Auge und der Standlinie hin reflectirten Ausfallstrahlen und deren Rückwärtsverlängerungen gebildet wird, so wie andererseits Z e als die Grenzlinie der lothrechten Ebene aufzufassen ist, die durch die Gesammtheit der entsprechenden Einfallstrahlen gebildet wird.

§. 515. Auf noch eine andere Art sind die Spiegelbilder der Eckpunkte des Dreiecks J K L, z. B. das Bild k des Punktes K dadurch zu finden, daß man, nachdem vermittelst einer besondern geometrischen Hülfsconstruction, wie sie in Fig. 146 (Taf. 24) vorliegt, zuvor ermittelt worden, um welchen Winkel das Bild k des Punktes K, der gegebenen Höhe des Auges wegen, gehoben erscheinen müsse, die Perspective k nach der ihr zukommenden perspectivischen Höhe in der Linie r W construirt. In Fig. 146 ist in der Lothrechten r W die lothrechte Linie des Spiegels dargestellt, in welche der Fig. 145 nach das Bild des Punktes K und der ganzen Dreiecksseite K L fällt, also die reflectirende Linie des Spiegels; r K ist gleich der Länge R K in Fig. 145; die Lage des Auges O zur reflectirenden Linie ist dadurch bestimmt, daß r o° gleich R O in Fig. 145, und die Höhe o° O gleich p P in Fig. 144 gemacht ist. Nachdem man nun in Fig. 146 r $\varkappa$ gleich r K gemacht und $\varkappa$ O gezogen, ergiebt sich, daß k 1) um 19° unter dem Horizonte O W, oder 2) um $9\frac{1}{2}$° gehoben über eine von O nach r gezogene Linie, oder 3) um 19° über der Grundebene liegt, was hier dasselbe wie 1) besagt, da die Winkel α, β und γ augenscheinlich einander gleich sein müssen.

Ist nun, was die Auffassung 1) betrifft, r W in Fig. 144 die reflectirende Linie, und man sieht sie als Grenzlinie (W Hauptpunkt, tw herabgeschlagener Gesichtspunkt) an und trägt an W tw in tw unterhalb den Winkel von 19° an, so schneidet man r W im Bildpunkte k. Sieht man aber die durch Z Lothrechte als Grenzlinie (Z Hauptpunkt, tz herabgeschlagener Gesichtspunkt) der durch r K gehenden lothrechten Einfallstrahlen-Ebene (§. 514, Nr. 4) an, trägt

Digitized by Google

an Z tz in tz unterhalb den Winkel von 19° an, schneidet dadurch die Grenzlinie in e und zieht von e durch K, so schneidet man r W ebenfalls in k.

Legt man, was die Auffassung 2) betrifft, an eine von tw nach r gezogene Linie in tw oberhalb den Winkel von $9\frac{1}{2}$° an, so schneidet man r W ebenfalls in k.

Trägt man aber, der Auffassung 3) entsprechend, an die in der Grundebene liegende Horizontale r q (oder an r q^1), deren Länge als die geometrische Länge von r K ermittelt war, oberhalb in q (oder in q^1) den Winkel von 19° an, so schneidet man r W gleichfalls in k, u. s. w. —

Aus diesen verschiedenen, an sich unbedeutend scheinenden Auffassungen desselben Zieles ergiebt sich für weiter unten folgende Constructionen der Bilder in cylindrischen Spiegeln der nöthige Anhalt.

§. 516. Da es hier nur darauf ankam, das bei der Construction einzuschlagende Verfahren zu zeigen, so sind in der Figur im Ganzen nur drei Spiegelbilder vorgeführt. Bei der gegebenen Stellung des Objectes und des Auges zu den Spiegeln würden in Wirklichkeit sieben Bilder sichtbar und hier demnach eigentlich zu construiren sein.

§. 517. Wie das Spiegelbild auf dem Fußboden in Fig. 144 werden die Spiegelbilder auf Wasserflächen construirt. Man hat sich hierbei, wie im Allgemeinen, vor dem häufig vorkommenden Irrthume zu hüten, daß Spiegelbilder wie nur umgekehrte Wiederholungen der Perspectiven der Objecte selbst, oder daß sie wohl gar auf solchen spiegelnden Flächen dargestellt werden, auf welche sie nicht fallen können.

§. 518. Um in Fig. 147 (Taf. 22) die Perspectiven des Spiegelbildes des Hauses und des hinter diesem befindlichen Thurmes zu construiren, muß man zuvor die Umfassungsmauern der Gebäude nach unten bis an die verlängert gedachte Wasserfläche verlängern und von dem Schnitte beider aus die Längen der Höhenkanten in das Spiegelbild übertragen. Dabei würde dann z. B. die Kante H A in dem Punkte α ihrer Verlängerung von der Wasserfläche geschnitten werden, und würde demnach h a ihr Spiegelbild sein. So würde

Digitized by Google

auch, um das Bild des Thurmes zu construiren, zuvor wenigstens der Punkt β zu ermitteln sein, in welchem die Verlängerung der einen seiner Höhenkanten die verlängerte Wasserfläche schneidet. Die Bilder aller lothrechten Kanten fallen mit diesen je in eine Linie, die Bilder der horizontalen Kanten sind mit diesen selbst perspectivisch parallel; es verschwinden demnach die Bilder in P verschwindender Kanten gleichfalls in P.

Wegen der weiteren Entfernung des Thurmes wird sein Bild von dem Bilde des an der Façade des Hauses angebrachten, an sich niedrigeren Flaggenstockes überragt. Die Bäume, nach unten verlängert, würden die verlängerte Wasserfläche etwa in den Punkten φ und γ schneiden, weshalb ihre Höhen φF und γC von diesen Punkten aus nach unten zu übertragen sind. Um das Spiegelbild des rechts in das Wasser ragenden Hügels darzustellen, muß zuvor zu einem Punkte desselben, wie etwa E, die Projection ε auf der Wasserfläche festgestellt und danach die Höhe εE in εe übertragen werden u. s. w.

§. 519. Nähme man links im Vordergrunde ein Stück einer polirten Tischplatte an, so wäre es fehlerhaft, darauf die Spiegelbilder irgend welcher Theile der vorliegenden Objecte, wie etwa das Bild f des Baumgipfels F zu construiren, da eine Verlängerung der Tischfläche bis in jene Bäume sofort ergeben würde, daß der Schnitt beider so hoch liegt, daß die Bilder weit außerhalb der gegebenen Grenzen der Tischfläche fallen müßten. —

Beispiel 53.

§. 520. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 148 (Taf. 24) die Perspective einer **Pyramide** gegeben, deren Basis BCER auf der Grundebene steht; außerdem in dem Viereck HJKL die perspectivisch rechteckige Begrenzung eines **einfach-schiefen Spiegels**, dessen Ebene die durch V lothrechte Linie zur Grenzlinie (V Hauptpunkt, X Verschwindungspunkt für normale Linien; $\frac{1}{n}$ Theilpunkt für die in X verschwindenden Linien) hat — es soll darauf die Perspective des Spiegelbildes der Pyramide construirt werden.

Digitized by Google

Ausführung. Der in §. 506 gegebenen 3. Regel nach sind die Bilder der Eckpunkte der Basis dadurch zu finden, daß man von ihnen gegen die Spiegelfläche normale, d. h. nach X gerichtete Linien (Hauptstrahlen) zieht und deren Verlängerungen hinter dem Spiegel unter Benutzung des Theilpunktes tx ihnen gleich, also z. B. ϱr perspectivisch gleich ϱR macht. Zieht man darauf in dem so construirten Spiegelbilde bcer der Basis die Diagonalen, und durch deren Schnittpunkt a eine Lothrechte, so ist diese das Spiegelbild der Achse und der darin durch eine von F nach X gezogene Linie bestimmte Punkt f das der Spitze F, wonach die Verbindungslinien zwischen dieser und den Punkten b, r und e die Bilder der ansteigenden Pyramidenkanten ergeben. §. 521.

Die Richtigkeit der Construction kann man noch dadurch sicherstellen, daß man, wie für die Seiten der Basis des Objectes selbst, die Verschwindungspunkte ihrer Spiegelbilder benutzt. Wie nämlich die beiden in Z verschwindenden Seiten RE und BC der Basis von der in V verschwindenden Schnittlinie HJ des Spiegels mit der Grundebene um den Winkel von 16° nach rechts abweichen, so müssen die Spiegelbilder dieser Seiten von der Schnittlinie HJ um denselben Winkel nach links abweichen. Trägt man demnach an den Parallelstrahl OV in O links den Winkel von 16° und bestimmt dadurch im Horizonte den Punkt z, so ist dieser der Verschwindungspunkt für die Seiten re und bc des Spiegelbildes, und so das Spiegelbild des Verschwindungspunktes Z. §. 522.

In gleicher Weise ist der Verschwindungspunkt y (das Spiegelbild des Verschwindungspunktes Y) für die Spiegelbilder rb und ec der Seiten BR und EC der Basis zu ermitteln.

Als ein Ergebniß dieses Constructionsverfahrens ist hier die weiter unten öfter zu verwerthende Regel hervorzuheben, daß das Spiegelbild einer Linie mit der Spiegelebene denselben Winkel bildet, welchen die Linie selbst mit dieser bildet. §. 523.

Verlängert man die Spiegelbilder der Seiten der Basis bis zur Schnittlinie HJ, so schneiden sie diese in denselben Punkten, in welchen die Verlängerungen der Seiten selbst die HJ schneiden. Z. B. er sowohl, wie ER schneiden mit ihren Verlängerungen die HJ im Punkte τ. Aber auch die Verlängerungen der Diagonalen der Basis selbst, z. B. CR, und die ihrer Spiegelbilder, z. B. cr, schneiden die Schnittlinie HJ in denselben Punkten, hier z. B. δ. Jene Verlängerungen eτ und Eτ sind nämlich als die gleichen Seiten des, der Construction gemäß, gleichschenkligen Drei- §. 524.

Digitized by Google

ecks $r E e$ anzusehen. In einem solchen Dreiecke aber schneiden sich die gleichen Seiten stets in der in dem Halbirungspunkte (ε) der Grundlinie ($E e$) auf dieser errichteten Normalen ($\varepsilon \tau$), d. i. HJ.

Hiernach kann man also auch, nachdem man nur zwei Punkte, etwa a und r, des Spiegelbildes nach der erstgezeigten Ausführung (§. 521) construirt hat, die Bilder der anderen Eckpunkte und der Seiten der Basis einfacher durch Verlängerung der Seiten und der Diagonalen derselben bis zur Schnittlinie HJ finden.

Was hiermit für die Bilder horizontaler Linien gesagt ist, trifft auch für die Bilder schiefer Linien zu. Denn denkt man sich durch die schiefe Pyramidenkante FR eine zur Spiegelfläche normale Ebene, so ist deren Schnittlinie mit der Spiegelfläche eine durch φ und ϱ gehende Linie, von deren Punkte λ aus man das Spiegelbild rf ziehen kann, nachdem man FR bis zum Schnitte mit ihr verlängert hat.

Es kann hiernach als Regel festgestellt werden, daß eine gerade Linie und ihr Spiegelbild sich, beiderseits verlängert, in einem und demselben Punkte der Spiegelebene schneiden.

Beispiel 54.

§. 525. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 149 (Taf. 26) die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz) eines mit seiner Grundfläche KGR auf der Grundebene stehenden **Prismas** gegeben; außerdem in dem Viereck $LMNQ$ die perspectivisch rechteckige Begrenzung eines mit seiner der Bildebene parallelen Grundlinie LM ebenfalls auf der Grundebene stehenden **einfach-schiefen Spiegels**, welcher, wie die Winkel bei M veranschaulichen, $21\frac{1}{2}°$ hinter die Bildebene, d. i. $68\frac{1}{2}°$ über die Grundebene geneigt ist. Die Grenzlinie der Spiegelebene ist demnach eine oberhalb der Figur die Verticale im Punkte H rechtwinklig durchschneidende Linie, H^1 ist der Verschwindungspunkt für Linien, welche normal zu der Spiegelebene sind, Δ^1 ist ein Theilpunkt für diese Linien — es soll die Perspective des Spiegelbildes des Prismas construirt werden.

§. 526. **Ausführung.** Nach dem im vorhergehenden Beispiele zuerst gezeigten Verfahren hat man von den Eckpunkten des Prismas normale, d. h. nach H^1 gerichtete Linien (Hauptstrahlen) gegen die Spiegelebene zu ziehen und deren Verlängerungen hinter dem Spiegel den Hauptstrahlen selbst

Digitized by Google

perſpectiviſch gleich lang zu machen. So conſtruirt iſt in der Figur das Bild r des Punktes R. Der Punkt ϱ, in welchem der Hauptſtrahl R ϱ die nach unten verlängert gedachte Spiegelebene trifft, iſt dort dadurch beſtimmt, daß zunächſt die Grundlinie L M des Spiegels durch eine von R nach P gezogene Linie in λ geſchnitten, darauf R H¹ gezogen, und dieſe durch eine andere von H durch λ gezogene Linie in ϱ geſchnitten wurde. Die Länge ϱ r iſt ſchließlich vermittelſt des Diſtanzpunktes Δ^1 der Länge ϱ R perſpectiviſch gleich gemacht worden. Hat man auf dieſelbe Art die Bilder der anderen Eckpunkte conſtruirt, ſo ſind jene nur noch durch gerade Linien entſprechend zu verbinden, um in r e b g k das ſchiefe Spiegelbild des Prismas zu vollenden.

Der gegebenen Stellung des Spiegels wegen fällt ein Theil des Bildes außerhalb der Grenzen des Spiegels, nämlich unterhalb ſeiner Grundlinie L M, und iſt deshalb ſo weit eigentlich nicht ſichtbar.

Um die Conſtruction fernerhin nicht durch die an ſich willkürliche Spiegelbegrenzung zu beengen, wird in den folgenden Beiſpielen von dieſer ganz abgeſehen und nur die Lage der Spiegelebene, und zwar vornehmlich durch Angabe ihrer Grenzlinie bezeichnet werden.

§. 527. Nachdem man die Spiegelbilder der Eckpunkte der unteren Grundfläche conſtruirt, konnte man kürzer ſogleich die der Höhenkanten nach der in §. 523 hervorgehobenen Regel conſtruiren und darin durch Hauptſtrahlen, von den Eckpunkten der oberen Grundfläche aus nach H¹ gezogen, die Bildpunkte e, b und a abſchneiden. Da nämlich die Höhenkanten des Prismas lothrecht ſind und deshalb von der ſchiefen Spiegelebene um $21\frac{1}{2}°$ abweichen, ſo müſſen ihre Bilder von dieſer ebenfalls um $21\frac{1}{2}°$, von der lothrechten Bildebene alſo, oder von den lothrechten Kanten ſelbſt um 43° abweichen und darum nach dem oberhalb der Figur in der Verticale gelegenen Verſchwindungspunkte H² — welcher darin durch den um $21\frac{1}{2}°$ von D H und um 43° von D X abweichenden Parallelſtrahl D H² abgeſchnitten wird — gerichtet ſein.

Die ſo eingehaltene Winkelabweichung der Bilder der lothrechten Kanten von dieſen ſelbſt um 43° entſpricht dem Spiegelungsgeſetze, „daß die Winkelgeſchwindigkeit der Spiegelbilder doppelt ſo groß iſt, wie die des Spiegels", mit anderen Worten: daß der Abweichungswinkel der Spiegelbilder von den entſprechenden Objecten doppelt ſo groß iſt, wie der des Spiegels von dieſen.

Digitized by Google

§. 528. Der am Schlusse des §. 524 gegebenen Regel folgend kann man die Construction ferner dadurch abkürzen, daß man zunächst die Bilder, z. B. e und b einzelner Punkte E und B construirt, dann die Seiten A E und A B der oberen Grundfläche selbst bis zu ihren in der Linie F S liegenden Schnittpunkten ε und β mit der Spiegelebene verlängert, und nun durch e und b die Bilder e a und b a von ε und β aus zieht, wobei sich dann Punkt a von selbst ergiebt. So hat auch g k in der Figur vom Punkte γ aus durch g gezogen werden können, da die verlängerte K G die Spiegelebene im Punkte γ schneidet. Die Linie F S, in welcher die Schnittpunkte ε und β der Kanten A E und A B mit dem Spiegel liegen, ist dadurch leicht zu finden, daß man die schon vorhandene Linie H λ durch eine von E nach P, also horizontal, wie die obere Grundfläche ist, gezogene Linie in l schneidet und durch diesen Punkt F S parallel der Grundlinie L M des Spiegels zieht.

§. 529. **Wie die Bilder von Linien um denselben Winkel, wie die Linien selbst, von der Spiegelebene abweichen (§. 523), so weichen auch die Bilder von ebenen Flächen um denselben Winkel, wie diese selbst, von der Spiegelebene ab.**

Wie nämlich in der Figur die Grundflächen des Prismas von der Spiegelebene um den Winkel von $90° + 21\frac{1}{2}°$, d. i. $111\frac{1}{2}°$ abweichen, so gehören auch ihre Bilder Ebenen an, die sich zur Spiegelebene um $111\frac{1}{2}°$ neigen. Denn legt man an D H in D den Winkel H D H^3 von $111\frac{1}{2}°$ an und schneidet die Verticale in H^3, so ist die durch diesen Punkt parallel dem Horizonte gehende Linie die Grenzlinie (H^3 Hauptpunkt, Δ^3 Distanzpunkt, O^3 herabgeschlagener Gesichtspunkt) dieser Ebenen. In ihr liegen die Verschwindungspunkte für die gespiegelten Seiten der Grundflächen, und zwar wie Spiegelbilder der Verschwindungspunkte der entsprechenden Seiten selbst. Wie z. B. der Verschwindungspunkt Y der horizontalen Prismakante K R von der Verticale nach links um den Winkel P O Y abweicht, so weicht sein Spiegelbild, der Verschwindungspunkt y (rechts außerhalb der Figur gelegen) für r k, von der Verticale nach rechts um den gleichen Winkel $H^3 O^3 y$ ab. Oder aber, wie Spiegelbilder immer in dem vom Objecte normal zum Spiegel gezogenen und dahinter verlängerten Hauptstrahle liegen, so ist auch hier y der Schnittpunkt des von Y durch H^1, den Verschwindungspunkt für alle zum Spiegel normalen Linien, gezogenen Hauptstrahles mit der Grenzlinie $\Delta^3 H^3$. Da hiernach die Punkte dieser Grenzlinie als Spiegelbilder entsprechender Punkte des Horizontes angesehen werden können, so ist die Grenzlinie selbst als Spiegelbild des Horizontes anzusehen.

Digitized by Google

Will man zur Construction des Spiegelbildes des Prismas die Grenz- §. 530.
linie $\Delta^3 H^3$ benutzen, und es fallen dabei Verschwindungspunkte, wie hier etwa der von r g, zu weit außerhalb des Constructionsraumes, so kann man z. B. die Spiegelbilder g und r der Punkte G und R auch dadurch finden, daß man von G und R aus bis zur Schnittlinie L M der erweitert gedachten Grundfläche K G R mit der Spiegelebene in P verschwindende Linien G i und R λ, darauf i H^3 und λH^3 zieht, und in letzteren vermittelst des Distanzpunktes Δ^3 die Stücke i g und λ r perspectivisch gleich G i und R λ macht. Doch gelangt man kürzer zu den Punkten g und r, wenn man i H^3 und λH^3 sogleich durch von G und R nach H^1 gezogene Linien in g und r schneidet, da doch die Spiegelbilder g und r in von G und R normal zum Spiegel gezogenen Linien liegen müssen. So sind auch die Spiegelbilder e und b der Punkte E und B dadurch zu finden, daß man die Schnittlinie F S der obern erweitert gedachten Grundfläche mit dem Spiegel durch Linien, von E und B nach P gezogen, in l und v schneidet, und dann Linien, von diesen Punkten nach H^3 gezogen, durch andere Linien, von E und B nach H^1 gezogen, in e und b schneidet.

Da die Punkte λ und i in der Spiegelebene selbst liegen, die Punkte §. 531.
r und g aber die Spiegelbilder von G und R sind, so sind die Linien λ r und i g als Spiegelbilder der Linien R λ und G i anzusehen. Daraus folgt, daß die durch beide Linien λ r und i g denkbare unbegrenzte Ebene das Spiegelbild der durch R λ und G i gehenden horizontalen Grundebene ist — wie denn auch schon in §. 529 die Grenzlinie $\Delta^3 H^3$ als das Spiegelbild des Horizontes bezeichnet ist. Es bestätigt sich hierdurch zunächst die in §. 527 hervorgehobene Regel, da hier, nach der Lage des Punktes H^3 zu der des Punktes P zu urtheilen, die Ebene λ i H^3 von der horizontalen Grundebene selbst — diese als Object gedacht — um den doppelten Neigungswinkel des Spiegels abweicht.

Ferner darf, da die beiden Ebenen λ i H^3 und R λ i G sich der Construction gemäß in der durch λ und i gehenden Linie des Spiegels schneiden, die in §. 524 gegebene Regel dahin erweitert werden, daß eine Ebene und ihr Spiegelbild sich in einer und derselben Linie der Spiegelebene schneiden.

Beispiel 55.

Aufgabe. In Fig. 150 (Taf. 26) ist gegeben die Perspective §. 532.
(P Hauptpunkt, P O Distanz) eines auf seiner horizontalen

Digitized by Google

Grundfläche CBA stehenden **Prismenstumpfes**, an welchem die Kanten BG und AF lothrecht sind und an dessen doppeltschiefe andere Grundfläche CGF ein anderes **dreiseitiges Prisma** angefügt ist, dessen Kanten CL, GK und FE zu den Grundflächen CGF und LKE normal, und zwar perspectivisch nach dem unten außerhalb der Construction liegenden Punkte H^1 gerichtet sind. Seine Grundflächen haben die Linie $(\lambda)\varepsilon$ zur Grenzlinie (H Hauptpunkt, H^1 Verschwindungspunkt für normale Linien). Es ist ferner gegeben die Grenzlinie St (P Hauptpunkt) eines unbegrenzten, die Grundebene in der Linie JP schneidenden **einfach-schiefen Spiegels**, dessen Ebene, dieser Angabe nach normal zur Bildebene, um 13° über die Verticalebene vornüber neigt — es soll die Perspective des Spiegelbildes der beiden Prismen construirt werden.

§. 533. **Ausführung.** Der Aufgabe nach weicht die Verticale PV von der Grenzlinie PS des Spiegels um 13° nach rechts ab; es müssen deshalb die Bilder der der Verticale parallelen, also lothrechten Linien, wie z. B. die Bilder von BG und AF, um 13° nach links von der Grenzlinie des Spiegels abweichen und wie Pv gerichtet sein. Und da der Horizont, z. B. das Stück QP, mit der Grenzlinie PS den Winkel von 77° bildet, so muß sein Spiegelbild, insbesondere Pq, um einen ebenso großen Winkel von der Grenzlinie abweichen und müssen die Bilder aller dem Horizonte parallelen Linien parallel Pq sein. Das Spiegelbild q aber eines im Horizonte gegebenen Punktes Q ist, wie bisher immer, dadurch zu construiren, daß man von Q den Hauptstrahl Qu gegen den Spiegel, hier dessen Grenzlinie, zieht und seine Verlängerung uq hinter demselben geometrisch gleich uQ, oder daß man kürzer das Stück Pq des Spiegelbildes des Horizontes gleich PQ des wirklichen Horizontes macht. So ist auch das für die Construction gebrauchte, vor den Spiegel fallende Bild α° des hinter dem Spiegel liegenden Verschwindungspunktes α zu bestimmen. Wie ferner die Linie $(\lambda)\varepsilon$, welche von der Grenzlinie PS des Spiegels um den Winkel $S s \varepsilon$ abweicht, Grenzlinie (H Hauptpunkt, H^1 Verschwindungspunkt für normale Linien) für die schiefen Grundflächen des oberen Prismas ist und die Verschwindungspunkte für deren Seiten, z. B. ε für KE und GF u. s. w., enthält, so ist die durch s gehende, von PS um den gleichen Winkel $S s \varepsilon^\circ$ abweichende Linie ε° (λ°) das Spiegelbild der Grenzlinie $(\lambda)\varepsilon$, und selbst Grenzlinie (h Hauptpunkt, h^1 Verschwindungspunkt für normale Linien) für die Spiegelbilder jener Grundflächen. Auch enthält

Digitized by Google

sie die Verschwindungspunkte für die Seiten der letzteren, z. B. ε° für k e und g f u. s. w. Wie endlich der unten außerhalb der Figur liegende Punkt H^1 der Verschwindungspunkt für die Kanten G K, F E und C L ist, so ist sein Spiegelbild, der ebenfalls unten außerhalb der Figur liegende Punkt h^1, der Verschwindungspunkt für die Spiegelbilder g k u. s. w. jener Kanten. Er ist dadurch zu construiren, daß man die Verlängerung des von H^1 normal gegen die Grenzlinie S t des Spiegels gezogenen Hauptstrahles diesem gleich macht. Dabei muß h^1 zugleich in das Spiegelbild h P der schiefen Verticale H P fallen.

Zur Construction selbst übergehend findet man zunächst das Spiegelbild b des Punktes B, wenn man B π geometrisch parallel P Q, π b parallel P q zieht und π b durch eine durch B geometrisch parallel Q q gezogene Linie, den Hauptstrahl, schneidet. $\pi\tau$, parallel der Grenzlinie des Spiegels gezogen, weiset zum Uebersflusse nach, daß die Verlängerung τ b hiernach in der That gleich dem Hauptstrahle τ B ist. Wie b sind auch die Bilder a und c leicht zu finden. — Verlängert man hierauf C B bis β, und B A bis δ in der Schnittlinie J P des Spiegels mit der Grundebene, so ergeben von β und δ durch b gezogene Linien die Richtungen der Spiegelbilder b c und b a der Linien B C und B A. Zieht man danach durch b und a Linien, welche geometrisch parallel P v sind, und schneidet diese und auch b c durch andere Linien, welche geometrisch parallel Q q durch G, F und C gezogen werden, in g, f und c, so ist das Dreieck g f c das Spiegelbild der Grundfläche G F C. Um das Spiegelbild des oberen Prismas zu vollenden, hat man nur noch von dem oben erwähnten Punkte h^1 aus Linien durch g, f und c zu ziehen und dieselben abermals durch Hauptstrahlen, parallel Q q durch K, E und L gezogen, in den Punkten k, e und l zu schneiden. Eine kurze Untersuchung ergiebt schließlich, daß, wie B A, K E und K L in den Punkten α, ε und λ, so b a, k e und k l in deren Spiegelbildern α°, ε° und λ° verschwinden.

Auf eine andere Art kann man die Spiegelbilder k, l und e, und §. 534.
dadurch ohne Benutzung des Punktes h^1 die Richtungen der Kanten g k, c l und f e finden, wie dies in der Figur mit Punkt k gezeigt ist; nämlich vermittelst der perspectivischen Grundrißprojectionen jener Punkte. Nimmt man, um z. B. die Projection K° des Punktes K zu bestimmen, durch die gebrochene Linie B G K eine lothrechte Ebene an, so ist, weil B G lothrecht ist und G K in H^1 verschwindet, eine durch H^1 gezogene lothrechte Linie die Grenzlinie dieser Ebene. Für die Schnittlinie derselben Ebene mit der Grundebene, d. i. die Grundrißprojection der Linie B G K auf letzterer, ist aber nach §. 309 der Punkt m (rechts außerhalb der Figur), in welchem

Digitized by Google

jene Grenzlinie den Horizont schneidet, der Verschwindungspunkt, so daß von diesem aus durch B die Projection BK° gezogen und darin durch eine durch K gezogene Lothrechte die Projection K° des Punktes K abgeschnitten werden kann. Hiernach ist nur K° $\varkappa$ parallel QP bis $\varkappa$ in der Linie JP, darauf $\varkappa$ k° parallel Pq zu ziehen und $\varkappa$ K° geometrisch gleich zu machen, und eine durch k° parallel Pv gezogene Linie durch eine andere, durch K parallel Qq gezogene im Punkte k zu schneiden, um in letzterem das Bild von K zu erhalten.

§. 535. Die am Schlusse des §. 531 hervorgehobene Regel bestätigt sich auch hier, da sowohl die Prismafläche GKEF, als ihr Spiegelbild gkef — wie die Verlängerungen der Seiten KE und ke, GF und gf, KG und kg ergeben — sich in der durch die Punkte η, φ und γ gehenden Linie schneiden. Daß diese aber die Schnittlinie der genannten Prismafläche mit dem Spiegel ist, erweiset sich daraus, daß sie einerseits durch den (oben außerhalb der Figur liegenden) Punkt r, in welchem sich die Grenzlinie $H^1\varepsilon$ der Prismafläche und die der Spiegelebene schneiden, und andererseits durch den Schnittpunkt n der Linie JP des Spiegels mit der Linie iw geht, in welcher letztern die verlängerte Prismafläche die Grundebene schneiden würde.

So auch schneiden sich die Prismafläche BGFA und ihr Spiegelbild bgfa in der Linie $\varphi\delta$ der Spiegelebene, und zwar ist $\varphi\delta$ die Schnittlinie letzterer mit jener Prismafläche; denn sie geht einerseits durch den (unten außerhalb der Figur liegenden) Punkt t, welcher der Schnittpunkt der Grenzlinie der Spiegelebene mit der Grenzlinie $\varepsilon\alpha$ der Prismafläche ist, andererseits durch den Punkt φ, welcher ein Punkt der als der Spiegelebene angehörig bekannten Linie (r)n ist, u. s. w.

Beispiel 56.

§. 536. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 151 (Taf. 25) die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz) einer Gruppe geometrischer Körper gegeben, bestehend aus einem auf der Grundebene liegenden **Prisma**, dessen horizontale Kanten in den Distanzpunkten D und D^1 verschwinden, aus einem auf dem Prisma stehenden **Kegel**, dessen Achse AS, und dessen Grundfläche kreisförmig ist, und einem gegen den Kegel gestützten **Cylinder**, dessen Achse MN ist. Die einander parallelen kreisförmigen Grundflächen des Cylinders sind um 25° unter die Grundebene und um 45° zur Verticalebene geneigt, wonach

Digitized by Google

D^1T ihre Grenzlinie (H^2 Hauptpunkt; O^2 nach unten herabgeschlagener Gesichtspunkt; H^3, oben außerhalb der Figur gelegen, Verschwindungspunkt für normale Linien, wie die Cylinderachse und die Cylinderseiten sind) ist. Es ist außerdem die um $29\frac{1}{2}°$ von der Verticalebene nach links abweichende Schnittlinie WX der Grundebene mit einem **doppelt-schiefen**, unbegrenzten **Spiegel** gegeben, welcher, hintenüber geneigt, sich um $72\frac{1}{2}°$ über die Grundebene erhebt — es soll die Perspective des Spiegelbildes der Körpergruppe construirt werden.

Ausführung. Der letzten Angabe zufolge ist zunächst die Grenzlinie des Spiegels dadurch zu construiren, daß man im Horizonte den zu X correspondirenden Verschwindungspunkt Y (rechts außerhalb der Figur) bestimmt, YO um Y in den Horizont in $Y\omega$ überträgt, an den Horizont in ω den Neigungswinkel der Spiegelebene von $72\frac{1}{2}°$ anträgt und dadurch eine durch Y gezogene Lothrechte in J (rechts oben außerhalb der Figur) schneidet, wonach eine von J durch X gezogene Linie die Grenzlinie (H Hauptpunkt; H^1, rechts außerhalb der Figur gelegen, Verschwindungspunkt für normale Linien, d. h. Hauptstrahlen) des Spiegels ist. §. 537.

Um nun, hieran anknüpfend, wegen des Spiegelbildes des Prismas sogleich das Spiegelbild des Horizontes festzustellen, trägt man in ω an ω (J), von welcher der Horizont links um $107\frac{1}{2}°$ abweicht, denselben Winkel rechts an und schneidet dadurch die durch Y Lothrechte im Punkte i, wonach eine von i durch X gezogene Linie (i) p das Spiegelbild des Horizontes (H^4 Hauptpunkt; O^4 nach unten herabgeschlagener Gesichtspunkt; H^5, oben außerhalb der Figur gelegen, Verschwindungspunkt für normale Linien, wie die Spiegelbilder der lothrechten Kanten des Prismas und der Cylinderachse sind) ergiebt.

Geht man bei der Construction des Spiegelbildes selbst von dem Punkte B aus, so ist dessen Bild b dadurch zu finden, daß man $B\pi$ parallel der horizontalen Grundlinie gegen WX zieht und darauf das Spiegelbild $b\pi$ davon und zwar folgendermaßen sucht: Da $B\pi$ von WX, wie bei O die Parallelstrahlen beider, O (V) und OX, zeigen, $60\frac{1}{2}°$ nach links abweicht, trägt man an den aus O^4 nach X gerichteten Parallelstrahl in O^4 denselben Winkel rechts an und schneidet dadurch das Spiegelbild (i) p des Horizontes in v, dem Verschwindungspunkte für die Spiegelbilder aller der horizontalen Grundlinie parallelen Linien. Zieht man hierauf π v und schneidet sie durch einen von B nach H^1 gezogenen Hauptstrahl in b, so ist $b\pi$ das Bild von $B\pi$ und b damit gefunden.

Digitized by Google

In gleicher Weise sind auch die Spiegelbilder f, z u. s. w. der Punkte F und Z u. s. w. der unteren Prismafläche zu construiren. Linien, von f, b und z u. s. w. nach dem Verschwindungspunkte H^5 gezogen und durch Hauptstrahlen, von E, C u. s. w. nach H^1 gezogen, in den Punkten e, c u. s. w. abgeschnitten, ergeben in diesen die Eckpunkte des Spiegelbildes der obern Grundfläche. Nachdem man jedoch den Punkt b ermittelt, kann man f und z auch dadurch finden, daß man, der in §. 524 enthaltenen Regel gemäß, F B und Z B bis β und W in der Schnittlinie W X verlängert, von β und W Linien durch b zieht und dieselben durch Hauptstrahlen, aus den Punkten F und Z gezogen, in f und z abschneidet.

§. 538. Wären außer den Kanten b f und b z noch viele ihnen parallele andere Linien zu construiren, so daß die Anwendung ihrer Verschwindungspunkte δ und δ^1 wünschenswerth wäre, so erzielt man die letzteren folgendermaßen: Der Parallelstrahl O D der Kante B Z weicht von dem Parallelstrahle O X der Spiegel-Grundlinie um $15^1/_2{}^\circ$ nach links ab; trägt man nun an den Parallelstrahl O^4 X denselben Winkel X O^4 δ rechts an und schneidet das Spiegelbild des Horizontes im Punkte δ, so ist dieser der Verschwindungspunkt für b z und die mit ihr parallelen Linien; und trägt man, gleichwie der Verschwindungspunkt D^1 der Kante F B von D um einen rechten Winkel abweicht, an den Parallelstrahl O^4 δ den rechten Winkel an und schneidet dadurch das Spiegelbild des Horizontes in dem rechts unten außerhalb der Figur liegenden Punkte δ^1, so ist dieser der Verschwindungspunkt für b f und die hiermit parallelen Linien.

Schneller aber erzielt man diese Verschwindungspunkte δ und δ^1 nach dem am Schlusse des §. 529 vorgeführten Verfahren, nämlich dadurch, daß man, von den Punkten D und D^1 des Horizontes Hauptstrahlen nach H^1 ziehend, das Spiegelbild des Horizontes in δ und δ^1 schneidet. Wie δ und δ^1, so liegen auch alle anderen, theils schon genannten, auf das Spiegelbild des Horizontes bezüglichen Hülfspunkte in Hauptstrahlen. Nicht allein p, das Spiegelbild des Hauptpunktes P, liegt in einer von H^1 durch P gezogenen Linie, und dabei, wie die Parallelstrahlen O^4 δ und O^4 p zeigen, um 45° von δ nach links abweichend, sondern auch O^4 liegt wie ein Spiegelbild des herabgeschlagenen Gesichtspunktes O in einem von H^1 durch O gehenden Hauptstrahle; ja, der Verschwindungspunkt H^5 für die Kanten fe, b c u. s. w. liegt in einem durch H^1 gehenden, nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Verschwindungspunkte der lothrechten Kanten F E, B C u. s. w. gerichteten, nämlich lothrechten Hauptstrahle, so wie andererseits v, der Verschwindungspunkt für die Spiegelbilder der mit der horizontalen Grundlinie parallelen Linien, wie π h, in einem durch H^1 gehenden,

Digitized by Google

nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Verschwindungspunkte von Linien, wie πB, gerichteten, nämlich horizontalen Hauptstrahle.

Bei der Construction des Spiegelbildes der Grundfläche des Kegels §. 539. bietet nur die Ermittelung der perspectivischen Länge des Radius für den perspectivischen Ort des Achspunktes a Aufenthalt. Man findet diese Länge dadurch, daß man das Spiegelbild r der Projection R der Kegelachse auf der Grundebene bestimmt, dann $R\varrho$ parallel der horizontalen Grundlinie, und $\varrho\tau$ parallel der Grenzlinie $(H^1)\,p$ zieht, und, nachdem man vermittelst der Linie δr in $\varrho\tau$ den Punkt α abgeschnitten, in $\alpha\gamma$ die aus der Perspective des Kegels selbst entnehmbare Länge des Radius der Basis auf- und von hier zunächst auf die parallel $(H^1)\,p$ gezogene ru in ru perspectivisch überträgt. Durch r und u nach H^5 gezogene Linien schneiden dann auf der parallel $(H^1)\,p$ durch a gezogenen Linie den hier zur Construction der Kreisperspective verwendbaren, der Bildebene parallelen Radius ab. Die Kreisperspective ist nun vermittelst desjenigen der sie einschließenden Quadrate (Distanzpunkt $\mathcal{A}^4$) zu construiren, dessen eines Seitenpaar in H^4 verschwindet, während das andere der Grenzlinie $(H^1)\,p$, d. h. der Bildebene parallel ist.

Kürzer noch wäre der Radius für den Ort a zu finden gewesen, wenn man den Radius für A auf einer durch A gehenden, der Grenzlinie p(i) parallelen Linie geometrisch auf- und von hier vermittelst nach H^1 gerichteter Linien auf die durch a gehende, derselben Grenzlinie parallele Linie übertragen hätte.

Der Spitzpunkt s liegt im Schnittpunkte der nach H^5 gerichteten Achse mit dem von S nach H^1 gezogenen Hauptstrahle. Tangenten, aus s an die zuletzt construirte Kreisperspective gezogen, vollenden das Spiegelbild des Kegels. Doch sind sie nicht die Spiegelbilder der in der gegebenen Kegelperspective als Umrisse vorliegenden Seiten. Will man in dieser Beziehung Ermittelungen anstellen, so muß dies stets durch nach H^1 gerichtete Hauptstrahlen geschehen.

Die Construction des Spiegelbildes des schief stehenden Cylinders §. 540. beginnt am zweckmäßigsten mit der Construction des Spiegelbildes $(\mathcal{A}^6)\,(\delta^1)$ der Grenzlinie $T\,D^1$ der Grundflächen des Cylinders selbst. Wie $T\,D^1$ durch den Punkt D^1 des Horizontes geht und sich 25° unter diesen neigt, indem sie die Spiegel-Grenzlinie in U schneidet, so muß auch $(\mathcal{A}^6)\,(\delta^1)$ einerseits durch den Punkt δ^1 des Spiegelbildes p(i) des Horizontes, andererseits durch den Punkt U und durch den 25° unter p(i) liegenden Punkt t gehen, welcher in einer durch δ gehenden, zu p(i) normalen Linie $H^5\,\delta$ (H^8 darin Hauptpunkt; O^8 herabgeschlagener Gesichtspunkt;

Digitized by Google

O^8 t um 25° von dem Parallelstrahle $O^8\,\delta$ abweichend) liegt, wie T in einer durch D gehenden, zum Horizonte normalen Linie. Da aber t offenbar das Spiegelbild von T sein und demnach in einem von T nach H^1 gezogenen Hauptstrahle liegen muß, erzielt man die Grenzlinie $(\mathcal{A}^6)\,(\delta^1)$ einfacher, wenn man die durch δ zu ziehende Linie $H^5\,\delta$ sogleich durch den Hauptstrahl $T\,H^1$ in t schneidet und dann t U nach beiden Seiten verlängert zieht. Der Hauptpunkt dieser Grenzlinie ist H^6; O^6 der herabgeschlagene Gesichtspunkt; H^7, oben außerhalb der Figur gelegen, der Verschwindungspunkt für normale Linien, wie etwa die Spiegelbilder der Cylinder-Achse und -Seiten sind. O^6 und H^7 liegen wie Spiegelbilder von O^2 und H^3 in Hauptstrahlen, welche von H^1 durch diese Punkte gehen.

Nachdem man hiernach das Spiegelbild s g der Kegelseite S G construirt und durch den von L nach H^1 gezogenen Hauptstrahl in l geschnitten, ferner l k nach t gerichtet gezogen, wie L K nach T gerichtet ist — g k verschwindet in δ, wie G K in D — und in l k den Punkt m durch den Hauptstrahl $M\,H^1$ abgeschnitten, ist hierdurch das Spiegelbild des Mittelpunktes M der untern Cylinder-Grundfläche festgestellt, und ergiebt sich nun das Spiegelbild n im Schnittpunkte des von N nach H^1 gezogenen Hauptstrahles mit der von m nach H^7 zu ziehenden Cylinderachse. — Den der Bildebene, d. h. der Grenzlinie $(\mathcal{A}^6)\,(\delta^1)$ parallelen Radius m q der um m zu construirenden Kreisperspective findet man, wenn man wieder den der Grenzlinie $T\,D^1$ geometrisch parallelen Radius $M\,Q^\circ$, vermittelst dessen die Kreisperspective um M selbst construirt worden, auf der der m q geometrisch parallelen Linie M Q zuvörderst geometrisch auf-, und dann von hier durch die Hauptstrahlen $M\,H^1$ und $Q\,H^1$ perspectivisch in m q überträgt. Die nunmehr vermittelst des einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in H^6 verschwindet, zu construirende Kreisperspective muß schließlich durch die Spiegelbilder l und k der Punkte L und K gehen, in welchen der Cylinder den Kegel einer- und das Prisma andererseits berührt. Die perspectivische Länge des m q entsprechenden Radius der oberen Grundfläche um n wird von m q aus durch nach H^7 gerichtete Linien bestimmt.

---

§. 541. Aus der Menge der hier vorgeführten Constructionsmittel lassen sich leicht diejenigen herausfinden, welche es ermöglichen, ein Spiegelbild darzustellen, wozu nicht die Perspective des Objectes, sondern nur dessen Maße und außerdem die Lage des Spiegels gegeben sind — ein Fall, der dann vorliegt, wenn die Perspective des Objectes selbst außerhalb der Bildgrenzen fällt. Man hat dann die

Digitized by Google

Perspective des Spiegelbildes an dem selbstverständlich zuvor festzustellenden perspectivischen Orte hinter dem Spiegel wie die Perspective eines körperlichen Objectes, nur durch die Lage des Spiegels modificirt, zu behandeln.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Spiegelbilder der Schatten.

§. 542. Auch das hierbei einzuschlagende Verfahren folgert sich aus dem Vorhergehenden von selbst. Man wird zum Theil die Spiegelbilder einzelner Punkte der Schattengrenzen so, wie die der Objecte selbst, construiren können, anderentheils wird es vortheilhaft sein, für das Spiegelbild des Objectes zuvor das Spiegelbild des leuchtenden Punktes und das seines Fußpunktes festzustellen und hiernach, ohne Rücksicht auf das Object selbst, die Schattengrenzen zu bestimmen.

Wäre in Fig. 151 (Taf. 26) z. B. T die Perspective des Punktes der Sonne, wenn diese als vor der Bildebene stehend angenommen wird, und wäre D dazu der Fußpunkt für die Construction der auf horizontale Flächen fallenden Schlagschatten lothrechter Kanten, wie FE und BC, so würden für das Spiegelbild: t als Sonnenpunkt und δ als der entsprechende Fußpunkt für die Schatten der Kanten fe und bc zu verwenden sein.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

B. Gekrümmte Spiegel.

§. 543. Wenn man an einem Körper, welcher von krummen polirten Flächen begrenzt und der deshalb ein gekrümmter Spiegel zu nennen ist, den Ort des höchsten Lichtes, wie dies ein gleicher Körper

Digitized by Google

mit matter Oberfläche zeigen würde, und den des Objectschattens sucht, so wird deren Wahrnehmung sowohl, wie die der Oberfläche überhaupt, durch den Glanz, d. i. das Auftreten der mehr oder minder vollkommenen Spiegelbilder der leuchtenden Objecte gehindert, welche den Körper umgeben. Die einzelnen hellen Spiegelbilder, deren Ort selbstverständlich stets von dem Orte des denselben leuchtenden Objecte entsprechenden sogenannten höchsten Lichtes verschieden ist, nennt man Glanzlichter.

Da das Auge, je vollkommener polirt die Oberfläche des spiegelnden Körpers ist, desto weniger diese selbst wahrzunehmen vermag, so ist es zum großen Theil darauf angewiesen, aus der Figur, Anordnung, Größe und Vollkommenheit der Glanzlichter auf die Gestalt und Wölbung des spiegelnden Körpers zu schließen. Um die Perspective eines solchen vollendet darzustellen, ist es deshalb nothwendig, die Construction der Perspectiven solcher Glanzlichter, d. h. überhaupt der Spiegelbilder in gekrümmten Spiegeln, zu kennen. Für den vorliegenden Zweck wird es ausreichen, wenn hier als gespiegeltes Object stets nur ein leuchtender Punkt, oder eine leuchtende gerade Linie angenommen wird. —

§. 544. Da die Reflexion eines einzelnen Lichtstrahles doch immer nur auf je einem einzelnen Punkte einer Spiegelfläche stattfindet, so gelten die in §. 11 der Optik für ebene Spiegel angeführten Reflexionsgesetze auch für gekrümmte Spiegel. Weil auf letzteren aber die Einfallslothe nicht, wie auf ebenen Spiegeln, mit den Hauptstrahlen parallel sind, und außerdem die Richtung der einzelnen Strahlen eines Lichtbüschels nach der Reflexion stärker divergirend, oder parallel, oder convergirend, je nach der Wölbung des Spiegels, ist, so sind die in §. 17 der Optik hinsichtlich des scheinbaren Ortes der Spiegelbilder angeführten Gesetze bei der perspectivischen Construction der Bilder in krummen Spiegeln nur unter entsprechenden Modificationen verwendbar.

§. 545. Die gekrümmten Spiegel sind zu unterscheiden in convexe und concave Spiegel. In Bezug auf beide ist zunächst das etwas umständliche Verfahren zu zeigen, durch welches auf ihnen — vorausgesetzt daß sie die Krümmung der Kugel haben — der

Digitized by Google

reflectirende Punkt zu ermitteln ist, wenn man diesen nicht, wie es beim praktischen Construiren oft ausreichend erscheint, durch Probiren zu finden suchen will.

§. 546. Ist nämlich in Fig. 152 (Taf. 28) der kleinere Kreis um C die Projection eines gekrümmten Kugelspiegels, dessen innere Fläche sowohl als seine äußere als spiegelnd angenommen werden, ist ferner L ein leuchtender Punkt, O das Auge, und sind alle drei Stücke als in Einer Ebene, der Reflexionsebene, liegend gegeben, so sind die reflectirenden Punkte des Spiegels in seinen Schnittpunkten (R auf der convexen, und R° auf der concaven Fläche) mit einer Curve zu finden, welche man folgendermaßen construirt:

Man beschreibt mit dem Radius CL einen Kreis um C, und einen zweiten Kreis durch die Punkte C und L, deren Abstand von einander als Durchmesser angenommen. In letzterem Kreise nimmt man einen Punkt a beliebig an, zieht La bis b in der Peripherie des größten Kreises verlängert, und schneidet darauf eine von C durch a gezogene Linie durch eine andere, von b durch O gezogen, in r. Wiederholt man dieses Verfahren mit möglichst vielen, in dem Kreise CL beliebig angenommenen Punkten a^1, a^2, a^3 u. s. w., so erzielt man in r^3, r^2, r^1, r ... x u. s. w. Punkte, durch welche die gedachte, in jedem Falle auch durch die Punkte L, C und O gehende Curve zu zeichnen ist. In ihr liegen, bei Festhaltung des leuchtenden Punktes in L und des Auges in O, die reflectirenden Punkte aller um C möglichen, kreisförmig gekrümmten, convexen und concaven Spiegel, deren Radius sei Cr, CR oder Cϱ. Da hier also die Curve den gegebenen Spiegel in den Punkten R und R° schneidet, sind diese die reflectirenden, und hätte es zu ihrer Ermittelung nur des Stückes rϱ der Curve bedurft. Die anderen beiden Schnittpunkte Y und Z haben eine den Punkten R und R° ähnliche, jedoch nur theoretische Bedeutung.

Die Richtigkeit dieser Lösung der unter dem Namen des Alhazenischen Problems bekannten Aufgabe, auf Kugelspiegeln die reflectirenden Punkte zu finden, ist folgendermaßen zu beweisen:

Da jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter ist, so ist Winkel CaL ein rechter und Ca deshalb normal zu aL.

Digitized by Google

Da ferner der zu einer Sehne normale Radius dieselbe stets halbirt, Radius C d aber normal zu der Sehne L b ist, so sind deren Stücke L a und a b einander gleich. Faßt man hiernach in C a den Punkt r ins Auge und zieht r L und r b, so müssen die beiden Dreiecke r L a und r b a wegen Gleichheit je zweier Seiten (r a gleich r a, L a gleich b a) und des von diesen (beiderseits bei a) eingeschlossenen Winkels congruent sein und darum beiderseits bei r gleiche Winkel a r L und a r b haben. Da nun r a als Verlängerung des Radius C r normal zu der Peripherie des durch r um C zu beschreibenden Kreises ist, so sind für den Punkt r die Eigenschaften eines reflectirenden Punktes nachgewiesen, wenn man r a dazu als Einfallsloth, die Dreiecksseite L r als den einfallenden Strahl, und die durch das Auge O gehende Dreiecksseite r b als den reflectirten Strahl ansieht. Und was für den Punkt r nachgewiesen, gilt vermöge ihrer Construction für alle Punkte, also auch für die Punkte R und R° der construirten Curve.

§. 547. Die Ermittelung der reflectirenden Punkte auf anders als kreisförmig, z. B. elliptisch gekrümmten Spiegeln greift in das Gebiet der höheren Mathematik und ist so umständlich, daß die dabei aufgewandte Mühe zu dem Resultat für das praktische Construiren in keinem Verhältnisse steht, weshalb hierbei der Weg des Probirens anzurathen ist. Um aber hieraus entspringenden Irrthümern möglichst auszuweichen, wird im Folgenden überall nur der kreisförmig gekrümmte, convexe und concave Spiegel, als Kugel-, Cylinder- und Kegelspiegel, in Betracht genommen werden.

Achtundzwanzigstes Kapitel.

a) Convexe Spiegel.

§. 548. Ueber den scheinbaren Ort der Bilder in diesen Spiegeln ist Folgendes anzuführen:

Digitized by Google

Ist in Fig. 153 (Taf. 24) der Kreisbogen um C die Projection eines convexen Kugelspiegels, L ein Punkt einer Lichtflamme, so werden von den von L ausgehenden Strahlen L f, L r, L r^1, L r^2, L r^3 und L r^4 der erstere, als der zum Spiegel normale, nach dem Mittelpunkte C gerichtete Hauptstrahl, in sich selbst, die anderen aber in die Richtungen r O, r^1 O^1, r^2 O^2, r^3 O^3 und r^4 O^4 reflectirt, so daß ein Auge an den verschiedenen Orten O, O^1, O^2, O^3, O^4 ein Spiegelbild von L stets in der Richtung des reflectirten Strahles O r, O^1 r^1 u. s. w. und zwar — dem zweiten der in §. 506 hervorgehobenen Gesetze gemäß — stets in den Schnittpunkten l, l^2, l^3 und l^4 der rückwärts verlängerten, reflectirten Strahlen mit dem verlängerten Hauptstrahle L C sieht. Hiernach fällt das Spiegelbild l für ein dem Hauptstrahle möglichst nahe befindliches Auge O sehr nahe dem Halbirungspunkte F des mit dem Hauptstrahle zusammenfallenden Radius C f des Spiegels, während für ein seitab vom Hauptstrahle befindliches Auge O^4 das Bild sogar außerhalb des Spiegels, in l^4 fiele. Kein Bild aber fällt zwischen den Mittelpunkt C und den Halbirungspunkt F. — Der letztere wird, ohne hier die seinem Namen entsprechende Bedeutung zu haben, der *Brennpunkt* genannt.

Vergegenwärtigt man sich nun, daß zur Bildung eines richtigen Urtheils über den Ort des Gesehenen jedesmal die Thätigkeit *beider* Augen erforderlich ist, und man betrachtet in Fig. 154 (Taf. 24), wo a und c die in der Nähe des Hauptstrahles L f befindlichen beiden Augen eines Beobachters B, und h und e die beiden seitab vom Hauptstrahle befindlichen Augen eines andern Beobachters B^1 bedeuten, die Sehrichtungen der beiden Augenpaare und die Orte ihrer Schnittpunkte, so findet man, daß dort die mäßig convergirenden Sehrichtungen a γ und c δ sich und den Hauptstrahl beinahe in *Einem* Punkte l in der Nähe des Brennpunktes schneiden, wonach der Beobachter B bei l ein ziemlich vollständiges, nur verkleinertes Spiegelbild der Lichtflamme sehen muß. Die sehr stark convergirenden Sehrichtungen e π und h ϱ des andern Beobachters B^1 jedoch schneiden sich schon in der Nähe des Punktes π; den Hauptstrahl aber in zwei von einander entfernten Punkten l^1 und l^2.

Digitized by Google

Es wird der Beobachter B^1 daher sowohl wegen der starken Convergenz der Augenachsen überhaupt, als auch deswegen nur ein sehr unvollkommenes Bild von L sehen, weil von weitab vom Hauptstrahle einfallenden Lichtbüscheln deren Elemente nach der Reflexion zu weit zerstreut werden. Während nämlich von den beiden gleichbreiten Lichtbüscheln $\gamma L \delta$ und $\pi L \varrho$ das erstere nach der Reflexion nur innerhalb der Grenzen γa und δc zerstreut wird, wird das letztere innerhalb der stark divergirenden Grenzen πe und ϱh zerstreut, derart, daß in das Sehloch je eines Auges des Beobachters B^1 stets nur ein kleiner Theil stark zerstreuter Partikeln des von L kommenden Lichtes gelangen kann. Es kann daher der Beobachter B^1, auch wenn er nur mit einem Auge sähe, statt eines Spiegelbildes nur eine unbestimmt begrenzte glänzende Stelle in der Nähe des Punktes π wahrnehmen.

§. 549. Um ein einigermaßen vollkommenes Spiegelbild zu sehen, müssen demnach die beiden Augen so situirt sein, daß der Schnittpunkt der Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen in der Verlängerung des Hauptstrahles liegt, und wird hierbei das Bild um so vollkommener sein, je näher dieser Schnittpunkt dem Brennpunkte fällt, d. h. je mehr die Augen des Beobachters sich dem Hauptstrahle nahe befinden.

§. 550. Die immerhin starke Divergenz der von einem convexen Spiegel reflectirten Strahlen macht es auch erklärlich, daß das von einem solchen Spiegel hervorgebrachte Schirmbild einer Lichtflamme wegen Zerstreuung seiner Theile kaum wahrnehmbar ist.

§. 551. Hinsichtlich der scheinbaren Größe der Spiegelbilder ist zu bemerken, daß, weil die Hauptstrahlen zu convexen Spiegeln nicht, wie die zu ebenen Spiegeln, unter sich parallel, sondern nach dem Spiegel-Mittelpunkte gerichtet sind, die in ihren Verlängerungen liegenden Bilder von Punkten gedrängter liegen müssen, als diese an den Objecten selbst, und daß daher die Bilder in solchen Spiegeln kleiner als die Objecte erscheinen müssen.

§. 552. Ist nun der Kreisbogen um C in Fig. 155 (Taf. 24) die geometrische Projection eines convexen Kugelspiegels, P F die Projection eines Objectes, etwa eines Pfeiles, O die des Auges, und

Digitized by Google

Alles in Einer Ebene, der Reflexionsebene, gedacht, so sind dem Vorhergehenden nach, wenn π und φ die reflectirenden Punkte für das Auge O sind, p und f, als Schnittpunkte der rückwärts verlängerten reflectirten (Ausfall-) Strahlen mit den entsprechenden Hauptstrahlen, die Bilder von P und F, und fallen die Bilder der zwischen diesen gelegenen Punkte in eine schwache Curve zwischen p und f.

§. 553. Daß die Bilder in convexen Spiegeln, wie in ebenen Spiegeln, eine Verwechselung des Rechts und Links zeigen, bedarf keiner besondern Erklärung; weshalb aber und unter welchen Umständen die Bilder gerader Linien sich als Curven darstellen müssen, werden die unten folgenden Beispiele verständlicher begründen.

§. 554. Faßt man die Beschaffenheit von cylindrischen und konischen Spiegeln ins Auge, so begreift man leicht, daß die Bilder in diesen nicht wie in dem durchaus gleichartig gekrümmten Kugelspiegel construirt werden können, daß vielmehr die Bilder im cylindrischen Spiegel der Länge desselben nach, wegen der Parallelität seiner Seiten, wie im ebenen Spiegel, und nur seiner Querausdehnung nach wie im gekrümmten Spiegel zu behandeln sind; daß endlich vom konischen Spiegel, wegen seiner Verjüngung nach der Spitze, nur bedingt dasselbe gilt, und hier außerdem die Bilder in der Nähe der Spitze verhältnißmäßig gedrängter und an sich schmäler, als in der Nähe der Basis auftreten müssen.

§. 555. Für das Verfahren bei der perspectivischen Construction ist schließlich noch zu bemerken, daß man mancher unten deutlicher werdenden Schwierigkeiten wegen genöthigt ist, das Spiegelbild bald als hinter der Spiegelfläche, bald als auf ihr gelegen zu behandeln, was, da das an letzterem Orte aufgefaßte Bild mit dem am ersten Orte aufgefaßten perspectivisch zusammenfällt, doch immer dasselbe Resultat ergeben muß. Auch erfordert die meist nothwendige Feststellung der reflectirenden Punkte, oder der reflectirenden Linien, die Anwendung von geometrischen Hülfsconstructionen, wie denn hier überhaupt die Grundrißmethode in vielen Fällen die näher liegenden Constructionsmittel darbietet.

Digitized by Google

Beispiel 57.

§. 556. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 156 (Taf. 25) gegeben die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz, ap Grundlinie) einer im Punkte a auf der Grundebene ruhenden **spiegelnden Kugel** mit dem Mittelpunkte c; ferner die Perspective FL einer in F auf der Grundebene stehenden **lothrechten Linie**, und außerdem der Strahlen-Verschwindungspunkt N der als vor der Bildebene, 30° links der Verticalebene, und 35° über dem Horizonte stehend angenommenen **Sonne** — in Fig. 157 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßstabe geometrisch vor — es sollen die Perspectiven der Spiegelbilder der Linie FL und der Sonne construirt werden.

§. 557. **Ausführung.** Nachdem man der Einfachheit wegen von allen Punkten der Linie FL zur Construction ihres Spiegelbildes nur etwa drei charakteristisch gelegene, nämlich ihre beiden Endpunkte F und L und den Punkt M, in gleicher Höhe mit dem Kugel-Mittelpunkte, ausersehen und von diesen Punkten die Hauptstrahlen nach c gezogen, erscheint es, da die Spiegelbilder offenbar in diesen Hauptstrahlen liegen müssen, am einfachsten, durch eine besondere Hülfsconstruction zuvor die Abstände der Bilder vom Kugel-Mittelpunkte geometrisch festzustellen, und darauf die Perspectiven dieser Abstände zu construiren.

Um die geometrischen Orte der Bilder und dadurch ihre geometrischen Abstände von C kennen zu lernen, bedarf es der Ermittelung der den Punkten F, M und L entsprechenden reflectirenden Punkte, und hierzu der Kenntniß der geometrischen Lage der drei Stücke: „Object, Kugel-Mittelpunkt und Auge" zu einander innerhalb ihrer Reflexionsebenen.

In Fig. 158 (Taf. 25) liegen in FC, MC und LC die geometrischen Abstände der drei Punkte F, M und L vom Kugel-Mittelpunkte vor, nachdem hierher aus der in halbem Maßstabe gegebenen Fig. 157 der Abstand CF der Linie FL von der Kugel verdoppelt in αF übertragen, und FL gleich der aus Fig. 156 entnehmbaren geometrischen Länge ab der Linie FL gemacht worden. Zugleich ergeben OF, OM und OL die geometrischen Abstände der drei Punkte F, M und L vom Auge, wenn ωF gleich zweimal OF (Fig. 157), und ωO gleich der Höhe pP (Fig. 156) des Auges gemacht worden.

In Fig. 159 (Taf. 25) sind diese Ermittelungen zur Feststellung der geometrischen Orte der Bilder verwendet. Nachdem hier zunächst der geometrische Abstand CO des Auges vom Kugel-Mittelpunkte dadurch fest-

Digitized by Google

gestellt worden, daß $\alpha\omega$ gleich zweimal CO (Fig. 157), und ωO, normal zu $\alpha\omega$, gleich der Höhe pP des Auges gemacht wurde, sind sowohl CF, CM und CL, als OF, OM und OL den gleichnamigen Stücken in Fig. 158 gleich gemacht worden, so daß hiernach die Eckpunkte der Dreiecke FCO, MCO und LCO als die Projectionen der je in ihren Reflexionsebenen geometrisch vorliegenden Stücke „Object, Spiegel-Mittelpunkt und Auge" zu behandeln sind. Demnach sind denn hier als reflectirende Punkte r und r^1 ermittelt, wovon der erstere zufällig der reflectirende Punkt zugleich für L und M ist; es sind die Hauptstrahlen FC, MC und LC durch die Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen r^1O und rO in φ, μ und λ, den geometrischen Orten der Bilder von F, M und L, geschnitten worden, so daß nunmehr in Cφ, Cμ und Cλ die Abstände der Bilder vom Kugel-Mittelpunkte geometrisch vorliegen.

Denkt man sich nun, um diese Abstände in Fig. 156 perspectivisch darzustellen, hier durch die drei Hauptstrahlen eine lothrechte Ebene, so weicht dieselbe, der Grundriß-Fig. 157 nach, von der Verticalebene um 27° nach rechts ab, und ist demnach die durch Punkt Z lothrechte Linie ihre Grenzlinie (Z Hauptpunkt, tz herabgeschlagener Gesichtspunkt und zugleich Theilpunkt für in Z verschwindende, also horizontale Linien). V, Z und W darin sind die Verschwindungspunkte der drei Hauptstrahlen, tv, tz und tw dazu die Theilpunkte, so daß, wenn man von den vorher ermittelten Abständen zwei, nämlich cφ und cλ, von c aus auf die lothrechte Kugelachse, und den dritten, cμ, auf die horizontale Kugelachse geometrisch auf- und vermittelst der Theilpunkte auf die entsprechenden Hauptstrahlen perspectivisch in cf, cm und cl überträgt, die Punkte f, m und l die Spiegelbilder der Punkte F, M und L, und eine durch sie gezeichnete Curve das Spiegelbild der Linie FL ergeben.

§. 558. Die Figur weiset hiernach selbst darauf hin, daß, um die Längen der Hauptstrahlen Fc, Mc und Lc geometrisch kennen zu lernen, es nicht der Fig. 158 bedurft hätte, da sie sich in der Construction selbst durch die nach den entsprechenden Theilpunkten zu ziehenden Hülfslinien F tv, M tz und L tw in den Längen ch, ck und cg nebenher ergeben. Inwiefern man für Fig. 159 auch den geometrischen Abstand OC des Auges vom Kugel-Mittelpunkte auf andere Weise, als vorher geschehen, ermitteln konnte, ist aus dem Folgenden zu entnehmen.

Nach der in Fig. 159 geschehenen Feststellung der geometrischen Abstände der Spiegelbilder φ, μ und λ von C ließen sich in Fig. 156 die perspectivischen Orte f, m und l derselben einzeln auch so bestimmen, wie dies beispielsweise nur mit Punkt m gezeigt ist. Für die durch Punkt M,

Digitized by Google

durch den Kugel-Mittelpunkt und das Auge anzunehmende, natürlich schiefe Reflexionsebene ist offenbar die von M durch c gehende Linie M Z die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeschlagener Gesichtspunkt), und das Stück e i davon die Perspective des an sich einen größten Kugelkreis bildenden Schnittes der Kugel mit dieser Reflexionsebene. Vergleicht man nun die perspectivische Lage der drei Stücke, auf welche es in der Reflexionsebene ankommt, das Auge, den Objectpunkt M und den durch C gehenden größten Kugelschnitt, zu einander in Fig. 156 mit der geometrischen Lage derselben Stücke zu einander in Fig. 159, so ergiebt sich, daß hier die Länge C O und die Winkel C O M, e O i und C O μ einzeln geometrisch gleich sind den entsprechenden Stücken in Fig. 156, nämlich der Länge c O^1 und den Winkeln c O^1 M, e O^1 i und c O^1 m, und daß man hier also den Punkt m auch dadurch construiren konnte, daß man an c O^1 in O^1 den aus Fig. 159 zu entnehmenden Winkel C O μ geometrisch antrug und dadurch die Grenzlinie M Z in m schnitt. — Auf gleiche Art sind die Bildpunkte f und l zu construiren. Es müssen dabei die den Grenzlinien F V und L W entsprechenden herabgeschlagenen Gesichtspunkte selbstverständlich immer einen c O^1 gleichen Abstand von c haben.

§. 559. Das Spiegelbild s der Sonne wird dem Vorhergehenden entsprechend construirt. Wie die Grundriß-Fig. 157 zeigt, weicht die Richtung S N der Sonnenstrahlen von der der Gesichtslinie O C um $52\frac{1}{2}°$ ab. Trägt man nun in Fig. 159 diesen Winkel an O C in C an und zieht C S, so ist dies die Projection des Hauptstrahles der Sonne, und kommt es, da die Strahlen der letztern als parallel gelten, darauf an, denjenigen derselben zu ermitteln, welcher unter zum Einfallslothe gleichen Einfalls- und Reflexionswinkeln nach O reflectirt wird. Als dieser ergiebt sich der im reflectirenden Punkte r^2 einfallende Strahl S r^2. Schneidet man hiernach den Hauptstrahl S C durch die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles r^2 O in σ, so ist C σ der geometrische Abstand des gesuchten Spiegelbildes von C, und kann dessen Perspective nunmehr in Fig. 156 innerhalb des Hauptstrahles N c, wozu t*n* in der Grenzlinie N x der Theilpunkt ist, construirt werden. Es geschieht dies dadurch, daß man hier c σ geometrisch gleich jenem Abstande C σ (Fig. 159) macht und den über c verlängerten Hauptstrahl N c durch eine von t*n* durch σ gezogene Linie in s, dem Spiegelbilde der Sonne, schneidet.

Beispiel 58.

§. 560. **Aufgabe.** Es sind in Fig. 160 (Taf. 23) gegeben die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz, a p Grundlinie) eines

Digitized by Google

auf der Grundebene lothrecht stehenden **spiegelnden Cylinders**, dessen Achse durch Punkt a geht, und die Perspective einer im Punkte R auf der Grundebene stehenden **lothrechten Linie** RL; ferner die Perspective N des Strahlen-Verschwindungspunktes der **Sonne**, unter der Annahme, daß diese **vor** der Bildebene 47° links der Verticalebene und 30° über dem Horizonte stehe; und endlich die Perspective S der **Sonne**, unter der Annahme, daß diese **hinter** der Bildebene 47° links der Verticalebene und 30° über dem Horizonte stehe — in Fig. 161 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßstabe geometrisch vor — es sollen die Perspectiven der Spiegelbilder der Linie RL und der in zwei verschiedenen Ständen gegebenen Sonne construirt werden.

Ausführung. Wie schon in §. 554 hervorgehoben worden, sind die Bilder in einem cylindrischen Spiegel, der Längenausdehnung desselben nach, wie im ebenen Spiegel, und nur seiner Querausdehnung nach wie im gekrümmten Spiegel zu behandeln. Da nun hier das erstgegebene Object vollends eine lothrechte, den Seiten des Cylinders parallele Linie ist, so muß ihr Bild offenbar auch eine gerade, lothrechte Linie sein und zwar hinter der Cylinderseite zu liegen, oder vielmehr mit der Cylinderseite zusammenzufallen scheinen, welche sich als die reflectirende Linie des Cylinders ergiebt. Diese Seite am Cylinder wird am einfachsten ermittelt, wenn man von allen durch das Auge, den Cylinder und durch Punkte der Linie RL denkbaren, mit dem Cylinder elliptische Schnitte bildenden Reflexionsebenen die eine in Betracht nimmt, welche, die Linie RL im Punkte K und den Cylinder in einem Kreise schneidend, mit der Horizontebene zusammenfällt, und in welcher deshalb die genannten drei Stücke wie in der gegebenen Grundriß-Fig. 161 liegen. Stellt man dann hier den reflectirenden Punkt k fest und überträgt den Winkel POk in die Construction und bestimmt dadurch hier den Punkt $\varkappa$ im Horizonte, oder, was dasselbe ergiebt, überträgt man den Abstand P$\varkappa$ aus Fig. 161 verdoppelt in P$\varkappa$ der Construction — so muß eine hier durch $\varkappa$ gezogene Lothrechte $\varrho\,\delta$ die reflectirende, d. h. das Spiegelbild enthaltende Cylinderseite sein. §. 561.

Wie in §. 514 die Linie rW, so kann nun hier $\varrho\,\delta$ als Perspective und Grenzlinie ($\varkappa$ Hauptpunkt, t$\varkappa$ herabgeschlagener Gesichtspunkt) der Ebene angesehen werden, in welcher alle reflectirten Strahlen (Ausfallstrahlen) und deren Rückwärtsverlängerungen liegen, $\varkappa$ selbst als Verschwindungspunkt der reflectirten horizontalen Strahlen und ihrer Rückwärtsverlängerungen. Dem entsprechend ist auch eine durch $\varrho\,\delta$ und die §. 562.

Digitized by Google

Linie RL anzunehmende lothrechte Ebene als diejenige aufzufassen, in welcher alle Einfallstrahlen liegen', und ist die durch M lothrechte NX die Grenzlinie (M Hauptpunkt und Verschwindungspunkt der horizontal einfallenden Strahlen, *tm* herabgeschlagener Gesichtspunkt) dazu. Die Spiegelbilder aller in dieser Ebene anzunehmenden Punkte und Linien fallen in die Schnittlinie $\varrho\delta$ dieser Ebene mit dem Cylinder, demnach auch das Bild einer Linie wie ϱR. Faßt man endlich in Fig. 161 die Richtung des Einfallslothes uk und den Schnittpunkt Y seines Parallelstrahles OY mit der Bildebene ins Auge und bestimmt hiernach Punkt Y im Horizonte der Construction, so muß dieser der Verschwindungspunkt für alle Einfallslothe sein.

§. 563. In der reflectirenden Cylinderseite $\varrho\delta$ sind nun die Bilder r und l der Punkte R und L auf verschiedene Arten perspectivisch festzustellen:

1) Man kann, um etwa das Bild r zu finden, R als einen Punkt des horizontal einfallenden Strahles Rϱ behandeln. Da Inhalts des vorhergehenden Paragraphen das Bild der Linie Rϱ in die Linie $\varrho\delta$ fällt, so muß, wenn Rϱ über R unendlich verlängert wird, $\varrho\varkappa$ das Bild dieser unendlich langen horizontalen Linie sein und selbst als eine horizontale, in $\varkappa$ verschwindende Linie aufgefaßt werden. Macht man nun in $\varrho\varkappa$, wie dies ähnlich in §. 512, in der reflectirenden Linie rW des ebenen lothrechten Spiegels geschah, ϱr perspectivisch gleich ϱR, so ist in r das Bild von R gefunden. Es geschieht dies, wenn man zuvor vermittelst des Theilpunktes *tm* die perspectivische Länge ϱR mißt, dieselbe in ϱq geometrisch darstellt, in ϱq^1 überträgt und von hier vermittelst des der Linie $\varrho\varkappa$ entsprechenden Theilpunktes *tx* in ϱr perspectivisch überträgt. — Das Bild l des Punktes L ist selbstverständlich ebenso, unter Verwendung des horizontal einfallenden Strahles Lλ zu finden.

§. 564. 2) Man kann aber auch, dem in §. 515 beim ebenen Spiegel angewandten Verfahren entsprechend, die Bilder r und l vermittelst ihrer Höhenwinkel in der spiegelnden Cylinderseite construiren, nachdem man die Größe dieser Winkel in einer Hülfsconstruction, wie sie in Fig. 162 (Taf. 23) vorliegt, ermittelt hat. Es ist hier in $\varrho\delta$ die spiegelnde Cylinderseite, in RL die gegebene Linie, in O das Auge, die beiden letzteren in ihren aus dem Grundrisse (Fig. 161) entnehmbaren Abständen vom Punkte k — Alles in Eine Ebene, die Zeichnungsebene versetzt — geometrisch dargestellt, und sind dann r und l als reflectirende Punkte ermittelt. Von diesen liegt, je nachdem man sie als Punkte der Einfallstrahlen Rr und Ll, oder als Punkte der Ausfallstrahlen rO und lO auffaßt,

a) der Punkt r um 17° über den horizontalen Einfallstrahl Rϱ

Digitized by Google

gehoben, der Punkt l um $12^1/_2{}^\circ$ unter den horizontalen Einfallstrahl L λ gesenkt, oder

b) der Punkt r ist um 17° unter die Horizontebene O $\varkappa$ gesenkt, und der Punkt l um $12^1/_2{}^\circ$ über diese gehoben.

Um nun in Fig. 160 der Auffassung a) gemäß zu verfahren, hat man in der Grenzlinie X N der Einfallstrahlen-Ebene — indem man an M $t\varkappa$ in $t\varkappa$ oben den Winkel von 17°, unten den von $12^1/_2{}^\circ$ anträgt — in X den Verschwindungspunkt für um 17° gehobene, in V den Verschwindungspunkt für um $12^1/_2{}^\circ$ gesenkte Linien festzustellen und die beiden unendlich langen Perspectiven R X und L V der Einfallstrahlen zu ziehen, um damit in der Cylinderseite $\varrho\,\delta$ die Punkte r und l abzuschneiden.

Der Auffassung b) gemäß hingegen schneidet man in der $\varrho\,\delta$, da diese nach §. 562 (s. daselbst) selbst die Grenzlinie der Ausfallstrahlen-Ebene ist, die Punkte r und l dadurch ab, daß man an $\varkappa\,t\varkappa$ in $t\varkappa$ unterhalb den Winkel von 17°, oberhalb den Winkel von $12^1/_2{}^\circ$ anträgt.

3) Schneller noch findet man die Bildpunkte r und l, wenn man vorweg die den Punkten R und L entsprechenden Reflexionsebenen in Betracht nimmt. Da nämlich in diesen offenbar auch die den Punkten r und l entsprechenden, an sich horizontalen und dem §. 562 nach in Y verschwindenden Einfallslothe liegen, so muß Y ein diesen Ebenen gemeinschaftlicher Punkt, und müssen von R und L durch Y gezogene Linien die Perspectiven und zugleich die Grenzlinien dieser Ebenen sein. Wenn nun aber die Bildpunkte r und l sowohl in diesen Ebenen, als in der spiegelnden Linie $\varrho\,\delta$ liegen sollen, so müssen sie sich in den Schnittpunkten der letztern mit R Y und L Y ergeben. — §. 565.

Faßt man hiernach das Viereck R e i L als die Perspective einer lothrechten rechteckigen Fläche auf, welche verlängert durch die Cylinderachse gehen würde, so muß, da die Bilder der in der Cylinderfläche liegenden Punkte e und i mit diesen selbst zusammenfallen, die auf zwei Seiten von Curven begrenzte Figur r e i l das Spiegelbild der gedachten Fläche sein. Zur Zeichnung der Curven e r und i l, welche die Bilder von e R und i L sind, würden sich die nöthigen mehreren Punkte dadurch ergeben, daß man zwischen e und R, und zwischen i und L beliebige Punkte annimmt, und deren Bilder wie vorher r und l construirt. e r ϱ und i l λ sind die Bilder der Dreiecke e R ϱ und i L λ. §. 566.

Die Linie ϱ r ferner ist offenbar das Bild des ganzen Dreiecks ϱ R r; insbesondere ist sie als das Bild des horizontalen Einfallstrahles R ϱ, außerdem als die Perspective der Rückwärtsverlängerung des R ϱ entsprechenden Ausfallstrahles $\varrho\,\varrho^1$ aufzufassen ($\varphi\,\varrho$ ist die Perspective des

Digitized by Google

dem Strahle R ϱ entsprechenden Einfallslothes). Der eine Punkt r ist das Bild des Punktes R und des ganzen nach der Reflexion in das Auge gelangenden Einfallstrahles R r, und zugleich die Perspective des in das Auge gelangenden Ausfallstrahles nebst seiner Rückwärtsverlängerung (in Fig. 162: r O und r r°). Die Perspective des R r entsprechenden Einfallslothes fällt mit R r zusammen. —

Man sieht schließlich, daß, wenn man nach Ermittelung der reflectirenden Linie von der cylindrischen Wölbung des Spiegels absieht und die drei wesentlichsten Stücke bei der Spiegelung, das Auge, die reflectirende Linie und die gegebene Linie als Object in Eine Ebene versetzt, wie sie hier in Fig. 162 innerhalb der Zeichnungsebene projicirt vorliegen, die für die Construction der Bilder in ebenen Spiegeln geltenden Gesetze ausreichenden Anhalt auch für die Construction der Bilder im cylindrischen Spiegel geben.

§. 567. Den vorhergehenden Ausführungen entsprechend werden die Spiegelbilder n und s der Sonne in den gegebenen beiden Ständen construirt.

In Fig. 161 ergiebt sich zufällig der Punkt k zugleich als derjenige, welcher von allen parallel dem Hauptstrahle (S) A einfallenden Sonnenstrahlen einen, Z k nämlich, in das Auge O reflectirt; es muß deshalb auch in Fig. 160 das Sonnenbild n in der durch ϰ gehenden lothrechten reflectirenden Linie ϱ δ liegen und, wie Fig. 162 erläutert, sich darin um 30° über den Horizont erheben. Trägt man demnach an den Horizont in tϰ oberhalb den Winkel von 30° an, so schneidet man dadurch die ϱ δ in dem gesuchten Punkte n. Nach der oben in §. 565 gezeigten dritten Constructionsart jedoch kann man, da bei dem gegebenen Sonnenstande Y auch hier der Verschwindungspunkt des Einfallslothes u k ist, den Punkt n in der Linie ϱ δ einfacher durch eine von N durch Y gezogene Linie (die Grenzlinie und Perspective der entsprechenden Reflexionsebene) abschneiden.

§. 568. Zu der hinter der Bildebene gegebenen Sonne S ist nach Fig. 161 der Punkt b der reflectirende, und liegt demnach das Sonnenbild s in Fig. 160 in der durch β Lothrechten und zwar, der Aufgabe gemäß, darin 30° über dem Horizonte. Man hat deshalb an β tβ in tβ oberhalb den Winkel von 30° anzutragen und dadurch jene Lothrechte in s zu schneiden. Nach der obigen dritten Constructionsart kann man jedoch auch vermittelst des mit dem Einfallslothe b A parallelen Parallelstrahles O W in Fig. 161 den Verschwindungspunkt W der Einfallslothe ermitteln, denselben nach Fig. 160 übertragen, und hier, von W nach S ziehend, jene durch β Lothrechte im Punkte s schneiden.

Digitized by Google

Beispiel 59.

Aufgabe. Es sind in Fig. 163 (Taf. 27) die Perspectiven (P Hauptpunkt, PO Distanz, Grundlinie durch Punkt A gehend) eines auf der Grundebene stehenden **spiegelnden normalen Kegels**, dessen Achse rA ist, und einer im Punkte K auf der Grundebene stehenden **lothrechten Linie** KL gegeben — in Fig. 164 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke geometrisch vor — es soll die Perspective des Spiegelbildes der geraden Linie in dem Kegel construirt werden. §. 569.

Ausführung. Obgleich der Kegel gerade Seiten wie der Cylinder hat, so bilden dennoch die Spiegelbilder weder lothrechter, noch mit einer Kegelseite paralleler Linien gerade Linien, da wegen der Krümmungsverschiedenheit der Kegelfläche die den Punkten jener Linien entsprechenden reflectirenden Punkte in verschiedene Kegelseiten fallen. Nur die Bilder solcher geraden Linien, welche durch die Spitze des Kegels gehen und solcher, welche mit dem Auge und der Achse des Kegels in Einer Ebene liegen, fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach in je Eine Kegelseite und bilden deshalb gerade Linien. §. 570.

Da hiernach das Bild der gegebenen Linie KL eine Curve bilden muß und man, um in dieser die Bilder gewisser Punkte, wie k und l, feststellen zu können, genöthigt ist, die Curve als mehrfach gebrochene gerade Linie zu behandeln, so ist die Aufgabe nur mit annähernder Richtigkeit zu lösen, und hierbei etwa folgendes, der Construction der Spiegelbilder im Cylinder zu entlehnende Verfahren einzuschlagen. §. 571.

Um wie am Cylinder zunächst die reflectirende, wie gesagt, hier krumme Linie zu construiren, in welche das Spiegelbild fällt und in welcher deshalb schließlich nur noch die perspectivischen Orte der Bilder k und l der Endpunkte K und L der gegebenen Linie bestimmt werden müssen, erscheint es am zweckmäßigsten, einzelne ihrer Punkte dadurch festzustellen, daß man durch beliebige Punkte der gegebenen Linie, etwa durch ihre Endpunkte und allenfalls auch durch einen Punkt R ihrer Verlängerung, solche Ebenen annimmt, welche rechtwinklig die der Linie KL nächste Kegelseite rv durchschneiden und zugleich durch das Auge gehen, daß man dann in einer Hülfsconstruction die elliptischen Schnitte dieser Ebenen mit dem Kegel geometrisch darstellt, auf ihnen die reflectirenden Punkte ermittelt, deren Perspectiven auf dem Kegelmantel construirt, und durch diese die reflectirende Linie zeichnet:

Digitized by Google

Da sich die Kegelseiten um 57° über die Grundebene erheben, so müssen die gedachten Ebenen sich um 33° unter die Grundebene neigen. Verlängert man deshalb in der Construction den Radius v A bis α im Horizonte, macht hier $\alpha\, t\alpha$ gleich α O, trägt an den Horizont in $t\alpha$ unterhalb den Winkel von 33° an und schneidet dadurch eine durch α Lothrechte in x, so sind von K, L und R durch x gezogene Linien die Grenzlinien jener Ebenen. Die Stücke dieser Grenzlinien, so weit diese innerhalb der Perspective des Kegels und seiner Verlängerung nach unten liegen, sind zugleich die Perspectiven der vorerwähnten elliptischen Schnitte der Ebenen mit dem Kegel, und zwar ist, wenn man vorläufig nur die Grenzlinie L x (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeschlagener Gesichtspunkt) in Betracht nimmt, a der Punkt, in welchem die durch L angenommene Ebene die Kegelachse schneidet. Das Stück c f zeigt die größte perspectivische Ausdehnung ihres Schnittes mit dem Kegel, während sie in der That in dem Punkte e der Seite r v in den Kegel, und in dem in der Seite r y liegenden Punkte i aus dem Kegel tritt. — Die durch K angenommene Ebene tritt in e^2 in den Kegel und schneidet dessen Achse in a^2; ihre Grenzlinie ist K x (H^2 Hauptpunkt, O^2 herabgeschlagener Gesichtspunkt). Die Grenzlinie der Ebene durch R kommt nicht zur Anwendung.

Um nun die elliptischen Schnitte der gedachten Ebenen mit dem Kegel geometrisch darzustellen, zunächst etwa den der durch L angenommenen Ebene, wie er in Fig. 166 (Taf. 27) vorliegt, bedarf es einer besondern, hier in Fig. 165 (Taf. 27) gegebenen Hülfsconstruction. In dieser ist r m s der geometrische Aufriß des Kegels, und sind der Punkt L sowohl, als das Auge O in ihren aus den Figuren 163 und 164 entnehmbaren Höhen und Abständen je von der Kegelachse r A geometrisch dargestellt. Von einer hier von dem Punkte L aus rechtwinklig zu der ihm nächsten Kegelseite r m, also 33° unter K s geneigten, durch den Kegel gezogenen Linie L i muß das Stück e i die Länge einer Sehne des elliptischen Schnittes sein, um welchen es sich handelt, und ist a der Punkt, in welchem sie die Kegelachse schneidet. Die Länge einer zweiten Sehne derselben Ellipse findet sich in dem Stück o o^1 einer vom Auge O durch den Punkt a gezogenen Linie O o^1. Noch andere Sehnen ergeben sich in geraden Linien, welche von beliebigen Punkten einer durch das Auge und den Punkt L gedachten geraden Linie durch den Punkt a des Kegels gehen. Die Projection der gedachten Linie selbst wäre hier nicht anwendbar; wohl aber einzelne in ihr anzunehmende Punkte, welche man geometrisch darstellen kann, wenn man in [O] die Höhe und den Abstand des Auges vom Punkte L feststellt — wobei K [ω] gleich K O der Fig. 164 sein muß —

Digitized by Google

und dann zunächst [O] L zieht. Nimmt man hierauf in Fig. 164 in der Linie O K beliebig den Punkt B als einen Punkt jener Linie an, überträgt den Abstand K B nach Fig. 165 in K [β] und schneidet hier die Linie [O] L durch eine durch [β] gezogene Lothrechte in [B], so ergiebt dieser Punkt die geometrische Höhe des angenommenen Punktes; und überträgt man ferner aus Fig. 164 den Abstand A B des Punktes B von der Kegelachse geometrisch nach Fig. 165 in A β und macht hier eine durch β gezogene Lothrechte β B gleich [β] [B], so ist in B die geometrische Lage des angenommenen Punktes zum Kegel bestimmt, und eine von B aus durch den Punkt a der Kegelachse gezogene Linie B b^1 ergiebt in dem Stücke b b^1 die Länge einer dritten Sehne der gesuchten Ellipse. Um die Länge einer vierten Sehne zu haben, nimmt man in Fig. 164 in der verlängerten Linie O K einen zweiten beliebigen Punkt T an, überträgt die Abstände K T und A T nach Fig. 165 in K [τ] und A τ, schneidet hier ferner die verlängerte [O] L durch die Lothrechte [τ] [T] in [T], und macht dann die Lothrechte τ T gleich [τ] [T], wonach T die geometrische Lage des zweiten beliebig angenommenen Punktes ist und eine von T durch Punkt a der Kegelachse gezogene Linie in dem Stücke d d^1 die Länge einer vierten Sehne zu dem elliptischen Schnitte ergiebt u. s. w. Dieser selbst ist nunmehr in Fig. 166 durch Auftragung der Längen der vier durch den Punkt a gehenden Sehnen folgendermaßen geometrisch darzustellen:

Man zieht hier eine beliebige gerade Linie L i und trägt in ihr von L aus die aus Fig. 165 entnehmbaren Längen L e, L a und L i geometrisch auf, wonach e und i zwei Punkte der Ellipse sind. Man nimmt ferner aus Fig. 165 die Länge L [O] und a O als Radien in den Zirkel und schlägt mit ihnen in Fig. 166 um die Punkte L und a Kreisbogen, welche sich im Punkte O^1 schneiden und hierin die in der Ebene des elliptischen Schnittes liegende Projection des Auges ergeben. Zieht man aus diesem Punkte eine Linie durch a und überträgt auf diese von O^1 aus die aus Fig. 165 entnehmbaren Längen O o und O o^1, so erzielt man in o und o^1 zwei andere Punkte der Ellipse. Man zieht hierauf von O^1 durch L eine gerade Linie und bezeichnet in ihr die vorher angenommenen Punkte B und T dadurch, daß man sie von dem Punkte a aus durch Kreisbogen schneidet, deren Radien die Längen a B und a T der Fig. 165 sind. Zieht man endlich von B und T aus Linien durch a und macht in ihnen B b und B b^1, und T d und T d^1 gleich den gleichnamigen Längen in der Fig. 165, so liegen in b, b^1, d und d^1 noch vier andere Punkte des gesuchten Kegelschnittes vor und kann dessen Umfang durch die erzielten acht Punkte nunmehr aus freier Hand gezeichnet werden. —

Digitized by Google

Nachdem hiernach auf dem Umfange der reflectirende Punkt 1° geometrisch festgestellt worden, muß dieser nach Fig. 163 perspectivisch übertragen werden und findet sich hierzu das einfachste Mittel bei dem Vergleiche des eben in Fig. 166 Construirten mit dem in Fig. 163 schon Vorhandenen. Zieht man nämlich in ersterer Figur aus dem Auge O^1 tangirende Gesichtslinien $O^1 f$ und $O^1 c$ an die Ellipse, außerdem Gesichtslinien sowohl nach den Punkten e und i, als nach den Punkten 9 und 10, in welchen Tangenten aus L die Ellipse berühren und dadurch Punkte der Objectschattengrenze am Kegel bezeichnen, so findet man, daß sowohl der Abstand $a O^1$, als die Winkel $a O^1 L$, $e O^1 i$ und $c O^1 f$ den gleichnamigen Stücken in Fig. 163 geometrisch gleich sind, und daß man folgerecht in dieser auch die Perspective des reflectirenden Punktes 1° dadurch bestimmen kann, daß man hier den Winkel $a O^1 1°$ dem gleichnamigen Winkel der Fig. 166 geometrisch gleich macht und dabei die Grenzlinie L x in 1°, dem ersten Punkte zu der gesuchten reflectirenden Linie, schneidet.

In gleicher Weise kann man beiläufig auch die aus Fig. 166 entnehmbaren Winkel $a O^1 9$ und $a O^1 10$ in Fig. 163 an $a O^1$ in O^1 geometrisch antragen, dadurch die Grenzlinie L x in 9 und 10 (Punkt 10 fällt auf den abgewandten Theil des Kegels) schneiden und hierdurch Punkte auf dem Kegelmantel bestimmen, welche diejenigen Kegelseiten bezeichnen, mit denen die Perspectiven der Objectschattengrenzen des Kegels zusammenfallen, wenn L allein als ein leuchtender Punkt angesehen wird. Bei dieser Annahme wäre auch die durch e gehende Kegelseite die am hellsten erleuchtete und der Punkt e darin der Ort des höchsten Lichtes.

Verfährt man nun analog dem Vorhergehenden bei der geometrischen Darstellung des elliptischen Schnitts, welchen die durch K angenommene Ebene mit dem Kegel bildet und wovon, ebenfalls durch die Hülfsconstruction Fig. 165 ermittelt, in Fig. 167 (Taf. 27) ein ausreichendes Stück mit ähnlicher Benennung der entsprechenden Theile vorliegt, überträgt dann den hier festgestellten reflectirenden Punkt k° so, wie 1° übertragen wurde, perspectivisch nach Fig. 163, so hat man hier in k° einen zweiten Punkt der reflectirenden Linie bestimmt.

Ein dritter Punkt dazu muß die Kegelspitze r selbst sein, durch welche die durch Punkt R rechtwinklig zur Kegelseite r v gedachte Ebene geht; denn da der Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel den kleinsten Kegelschnitt, nämlich einen Punkt bildet, so fällt der reflectirende Punkt selbstverständlich mit diesem zusammen.

Digitized by Google

Ein vierter Punkt endlich muß der in der nach unten verlängerten Kegelseite r v liegende Berührungspunkt W der gegebenen, nach unten verlängert gedachten Linie K L mit dem verlängerten Kegel sein.

Eine hiernach durch die vier reflectirenden Punkte W, k°, 1° und r gezeichnete Curve ist die reflectirende Linie, das Spiegelbild der Linie W R. Es fällt darin das Bild des Punktes W mit diesem selbst zusammen. Die Bilder anderer Punkte der Linie W R sind in der reflectirenden Curve nur annähernd richtig und zwar dadurch zu construiren, daß man die letztere als in geradlinige, ebenen Spiegeln angehörige Stücke gebrochen auffaßt, von einem Punkte wie L, dessen Bild l man sucht, eine zu ihr rechtwinklige Linie L h zieht und deren Bild innerhalb des Stückes h r wie im ebenen Spiegel — wie dies im vorhergehenden Beispiele, im cylindrischen Spiegel, mit dem Bilde ϱ r der Linie r R geschah — sucht. Es muß das Bild h l hierbei zwar in das Stück h r der reflectirenden Linie fallen, jedoch wie in der zu r h rechtwinkligen Ebene des über h verlängerten Einfallstrahles L h liegend behandelt werden.

Um zunächst den Punkt h selbst und dadurch die perspectivische Länge von L h, und dann die ihres Bildes h l zu bestimmen, bedarf es der Construction der in der Grenzlinie u z der letztgedachten Ebene liegenden Verschwindungspunkte u für L h, und p für h l. Um aber die Grenzlinie u z zu finden, ist — indem man das Stück 1° r der reflectirenden Curve als gerade und der Kegelseite r 5 angehörig annimmt — zuvor die durch diese Kegelseite und den Punkt L denkbare, zu jener vorerwähnten Ebene normale Ebene ins Auge zu fassen und deren Grenzlinie (n) g zu construiren. Diese geht einerseits durch den Verschwindungspunkt n der Kegelseite r 5, d. i. der Schnittpunkt der über r verlängerten r 5 mit der durch λ Lothrechten, andererseits durch den Verschwindungspunkt g des Einfallstrahles L 1°, welcher Punkt in der Linie L x dadurch abzuschneiden ist, daß man, nachdem in Fig. 166 zu L 1° der Parallelstrahl O^1 (g) gezogen worden, den Winkel a O^1 (g) von hier nach Fig. 163 über- und zwar an a O^1 in O^1 anträgt. Nachdem man durch n und g die Grenzlinie n g (H^3 Hauptpunkt, O^3 herabgeschlagener Gesichtspunkt, O^3 n Parallelstrahl zu der Kegelseite r 5, z Verschwindungspunkt für normale Linien) gezogen, schneidet man sie in u durch Antragung des rechten Winkels an O^3 n in O^3, und kann nun jenen zu der Kegelseite r 5 rechtwinkligen, sie in h schneidenden Einfallstrahl L u ziehen. Wenn aber z der Verschwindungspunkt für die zu der Ebene der Kegelseite normalen Linien ist, so muß u z die Grenzlinie (H^4 Hauptpunkt, O^4 herabgeschlagener Gesichtspunkt, *tu* Theilpunkt für in u verschwindende, *tp* Theilpunkt für

Digitized by Google

in p verschwindende Linien) der erstgedachten, durch L und zugleich rechtwinklig durch die Kegelseite r 5 gehenden Ebene sein, und ihr Schnittpunkt p mit h r kann nunmehr als der Verschwindungspunkt für das als mit L h in derselben Ebene liegend aufzufassende Bild h l angesehen und demnach verwandt werden.

Hiernach ist nur noch h l perspectivisch gleich h L zu machen, und stellt man zu dem Zwecke vermittelst des Theilpunktes tu die Länge von h L in h j erst geometrisch dar und überträgt dieselbe darauf vermittelst des Theilpunktes tp perspectivisch in h l, wonach in l die Perspective des Spiegelbildes des Punktes L vorliegt. —

Nach demselben Verfahren ist in der reflectirenden Linie auch das Bild k des Punktes K zu finden. Einen kürzeren Weg jedoch, ebenfalls annähernd richtig die vom normalen Einfallstrahl abweichende Lage des Bildpunktes zu bestimmen, wenn erst die reflectirende Linie vorhanden ist, zeigt die Hülfsconstruction, Fig. 168 (Taf. 27), wo, um den Ort etwa des Spiegelbildes k zu finden, in r 6 die als gerade Kegelseite aufgefaßte reflectirende Linie dargestellt und der Punkt k° darin dadurch festgestellt ist, daß in Fig. 163 durch eine von k° nach $\varkappa$ im Horizonte gezogene perspectivisch horizontale Linie die Kegelachse im Punkte 4 geschnitten, der Abstand r 4 dieses Punktes von der Spitze nach Fig. 168 übertragen und darauf hier die Kegelseite r 6 durch eine durch Punkt 4 gezogene Horizontale in k° geschnitten wurde. Nimmt man hiernach aus Fig. 167 die Längen k° K und k° O^2 als Radien in den Zirkel und schlägt damit in Fig. 168 Kreisbogen um k° als Mittelpunkt, und schneidet diese durch andere Kreisbogen, wozu die Spitze r der Mittelpunkt und die Längen r K und r O in Fig. 165 die Radien sind, in den Punkten (K) und O^5, so bezeichnen diese geometrisch die Höhe und den normalen Abstand des Punktes K der gegebenen Linie K L und des Auges von der reflectirenden Kegelseite — in der Anordnung, welche diese drei Stücke, in Eine Ebene, die Zeichnungsebene versetzt, zu einander haben würden — und es kann nun auf der Kegelseite der für das Auge O^5 mit dem scheinbaren Bildpunkte 8 zusammenfallende, wirklich reflectirende Punkt k construirt werden, wie wenn r 6 einem ebenen Spiegel angehörte. Hiernach ist die Kegelachse durch eine durch k zu ziehende Horizontale im Punkte 3 zu schneiden, das Maß r 3 nach Fig. 163 in die Kegelachse in r 3 geometrisch zu übertragen und hier wieder die verlängerte Kegelseite r 6 durch eine von $\varkappa$ im Horizonte durch Punkt 3 der Achse gezogene perspectivisch horizontale Linie im Punkte (k) zu schneiden, wonach in diesem die Perspective des Bildes von K vorliegt.

Digitized by Google

In Fig. 168 ist auf dieselbe Art, nur daß dabei die Linie r 6 als Kegelseite r 5 behandelt ist, auch der Ort des Bildpunktes von L geometrisch festgestellt und die der Fig. 163 analoge Lage der Punkte 1°, h und l vorgeführt. Das Stück h (l) der hier als verlängerter Hauptstrahl auftretenden Linie (L) (l) ist hier dasjenige, als dessen Perspective in Fig. 163 h l behandelt worden ist. —

Die Uebertragung der in Fig. 163 construirten Punkte l und (k) von den geraden Kegelseiten r 5 und r 6 auf die krumme reflectirende Linie W k° l° r muß schließlich nach Gutdünken geschehen. Der Punkt l kann dabei wohl ohne erheblichen Verstoß gegen die Richtigkeit in seiner Lage belassen werden, wogegen der Punkt k in der Curve um ein Geringes der Kegelspitze näher liegen muß, als der Punkt (k).

Neunundzwanzigstes Kapitel.

b) Concave Spiegel.

§. 572. Der scheinbare Ort des subjectiven Spiegelbildes eines leuchtenden Punktes liegt im concaven wie im convexen Kugelspiegel im Schnittpunkte des Hauptstrahles mit dem reflectirten Strahle. Ist L in Fig. 169 (Taf. 24) ein leuchtender Punkt, O das Auge, ist der Kreisbogen V X um C die Projection eines convexen, der Kreisbogen A N um C die Projection eines concaven Kugelspiegels, Alles in Einer Ebene, der Reflexionsebene, liegend, so ist L C zu beiden Spiegeln der Hauptstrahl, r und r^1 sind die reflectirenden Punkte, und fällt das dem concaven Spiegel entsprechende Bild von L in den Schnittpunkt l^1 des Hauptstrahles mit dem reflectirten Strahle r^1 O, in diesem Falle vor den Spiegel, während das dem convexen Spiegel entsprechende Bild von L hinter den Spiegel, in den Punkt l fällt.

§. 573. Der scheinbare Ort des Bildes im concaven Spiegel kann ein sehr verschiedener sein; er kann wie in Fig. 169 vor dem Spiegel, ja in unendlicher Entfernung vor demselben, jedoch auch, wie die nachfolgend angeführten Fälle zeigen werden, hinter dem Spiegel

Digitized by Google

liegen, und es kann je nach der Entfernung des Objectes vom Spiegel das Bild desselben umgekehrt, vergrößert oder verkleinert erscheinen:

§. 574. 1) Ist in Fig. 170 (Taf. 24) der Kreisbogen 9 h 4 um C die Projection eines concaven Kugelspiegels und ist als Object ein leuchtender Punkt in unendlicher Entfernung, z. B. der Mittelpunkt der Sonne S gegeben, deren Strahlen S h, (S^1) 1, (S^2) 2 u. s. w. als parallel anzusehen sind, so mag sich das Auge in C, in O^1, O^2, O^3, O^4 oder in O^5 befinden, es fallen die Schnittpunkte der bei h, 1, 2, 3, 4 u. s. w. reflectirten einzelnen Strahlen mit dem durch C gehenden Hauptstrahle sämmtlich vor den Spiegel, in die Nähe eines gewissen Punktes F, welcher der Halbirungspunkt der Strecke des Hauptstrahles zwischen der Fläche des Spiegels und dessen Krümmungs-Mittelpunkte C ist.

Wie vor dem convexen Spiegel zeigt sich dem in der Nähe des Hauptstrahles befindlichen Auge ein vollkommeneres subjectives Bild, als dem seitab vom Hauptstrahle befindlichen, und ist vollends bei dem Sehen mit beiden Augen — wenn hier z. B. O^1 und O^2 als die beiden Augen Eines Beobachters angesehen werden — der Eindruck der beiden vereinigten Bilder ein um so vollkommenerer, je näher der Schnittpunkt der entsprechenden beiden reflectirten Strahlen mit einander und mit dem Hauptstrahle dem Punkte F liegt. Betrachtet man im Gegensatze hierzu O^3 und O^4 als die beiden Augen eines andern Beobachters, so fällt von den ihnen entsprechenden Bildern das eine nahe bei F, das andere in s^4, und muß dieser Beobachter aus ähnlichen Gründen, wie sie bei dem convexen Spiegel angeführt wurden, den Eindruck eines unvollkommenen Bildes empfangen, zumal der Schnittpunkt der beiden Sehrichtungen selbst weit außerhalb des Hauptstrahles, im Punkte 8, liegt.

§. 575. Wie Fig. 170 veranschaulicht, findet die Kreuzung der mehrsten reflectirten Strahlen, zumal derjenigen, welche unter sehr spitzen Winkeln in der Nähe des Punktes h reflectirt werden, dicht bei dem Punkte F statt, und es tritt hier deshalb außer einer bedeutenden Wärmehäufung, derenwegen der Punkt F der Brennpunkt des Spiegels genannt wird, eine besonders starke Lichtconcentrirung

Digitized by Google

ein. Diese Lichterscheinung, welche übrigens, jedoch mit geringerer Intensität, den Raum zwischen dem Brennpunkte und der Spiegelfläche einnimmt, ist, wenn in der Figur die Punkte 9 und 4 die Grenzen des Spiegels bezeichnen, beiderseits durch eine Curve, die sogenannte katakaustische oder Brennlinie begrenzt, wie sie in der Figur einerseits zwischen den Punkten 9 und F gezeichnet, andererseits durch die, aus der Kreuzung der bei 4, 3, 2, 1 u. s. w. reflectirten Strahlen entstehende, gebrochene Linie 4. 8. 7. F erklärt vorliegt.

Wenn schon jedes spiegelnde cylindrische Gefäß auf seinem Boden diese Lichterscheinung zu zeigen vermag, so ist dieselbe noch vollkommener zu beobachten, wenn man die von einem wirklichen Hohlkugel-Spiegel reflectirten Strahlen der Sonne in Dampf oder Rauch auffängt. Es bildet hierin alsdann die Gesammtheit jener Strahlen eine sehr helle, einem Kegel mit eingewölbten Seiten ähnliche Figur, die an der Spitze, am Brennpunkte, besonders lichtstark ist. Fängt man diese Lichterscheinung aber, statt in jenen Medien, auf einem Schirme auf, so tritt sie auf diesem, wenn die Verlängerung seiner Fläche gerade durch den Brennpunkt geht, als ein helles objectives Bild der Sonne auf. Wird der Schirm dem Spiegel genähert oder von diesem entfernt, d. h. außer der Brennweite (h F) gerückt, so wird das objective Bild größer, weniger hell und zugleich unbestimmter begrenzt, und ist alsdann nur in dem Falle noch ein objectives, wenn auch unvollkommenes Sonnenbild, wenn der Spiegel aus einer völligen Halbkugel besteht. Ist letzteres nicht der Fall, so bekommt das Bild eine der des Spiegels selbst ähnliche Begrenzung.

Wegen der Fähigkeit, das Licht und die Wärme der Strahlen im Brennpunkte bis zu dem Grade zu concentriren, daß leicht brennbare Körper dadurch zu entzünden sind, heißen Spiegel dieser Gattung Brennspiegel. Da aber, wie gesagt, hauptsächlich die spitzwinklig reflectirten Strahlen zu jener Licht- und Wärmehäufung beitragen, und die vom Rande des Spiegels unter großen Winkeln reflectirten Strahlen wirkungslos seitabgehen, pflegt man Brennspiegel nicht allein nur in Bogen von wenigen Graden, sondern

Digitized by Google

außerdem auch in einer solchen Krümmung herzustellen, bei welcher auch sämmtliche Randstrahlen nach dem Brennpunkte reflectirt werden, nämlich in der Krümmung der Parabel. —

§. 576. 2) Ist umgekehrt als Object ein leuchtender Punkt gerade im Brennpunkte F des Spiegels gegeben, und man nimmt an Stelle des Hohlkugel-Spiegels sogleich den vollkommeneren paraboloischen Hohlspiegel in Betracht, so müssen, den vorhergehenden Paragraphen zufolge, die von F aus auf den Spiegel einfallenden Strahlen, z. B. F 1, F 2 u. s. w. in parallelen Richtungen, wie 1 (S^1), 2 (S^2) u. s. w., reflectirt werden und kann ein in diesem Strahlencylinder befindliches Auge ein eigentliches subjectives Bild nicht wahrnehmen, weil wegen des Parallelismus der reflectirten Strahlen deren Schnittpunkt mit dem Hauptstrahle h (S), d. i. das Bild, in unendliche Entfernung fällt.

Fängt man aber diesen Cylinder reflectirter Strahlen auf einem Schirme auf, so zeigt sich auf diesem, gleichviel, ob er dem Spiegel nahe oder fern ist, eine Lichterscheinung von einer dem Spiegel gleichen Durchmessergröße und Begrenzung.

§. 577. 3) Ist als Object ein leuchtender Punkt L in der Nähe des Hohlkugel-Spiegels, jedoch in größerer Entfernung davon, als dessen Mittelpunkt C, gegeben, so fällt der scheinbare Ort des subjectiven Bildes l, wie Fig. 171 (Taf. 24) zeigt — das Auge mag sich in O oder O^1 befinden — zwischen den Mittelpunkt C und den Brennpunkt F, und zwar desto näher dem letzteren, je ferner L vom Mittelpunkte ist, und desto näher dem Mittelpunkte, je näher L selbst diesem ist, so daß, wenn Punkt L im Mittelpunkte selbst gegeben ist, sein Bild l mit ihm selbst zusammenfällt. Denn alsdann fallen der Hauptstrahl, der einfallende und der reflectirte Strahl sämmtlich in eine vom Auge durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie.

§. 578. Nimmt man hiernach ein körperliches Object, etwa einen Pfeil P L in Betracht, so fällt für einen, gleichviel, ob in O oder in O^1 befindlichen Beobachter das Bild von L in den Punkt l, das Bild des Punktes P in den Punkt p; so daß p l jedem Beobachterauge, in welches überhaupt reflectirte Strahlen gelangen

Digitized by Google

können, als das subjective, vor dem Spiegel liegende, verkleinerte und umgekehrte Bild von PL erscheint. Und nimmt man an Stelle des Pfeiles ein stark leuchtendes Object, etwa eine Kerzenflamme in Betracht, so zeigt sich, wenn man durch die Punkte l und p einen durchscheinenden Schirm stellt, auf diesem für jeden Beobachterort als objectives Bild eine verkleinerte und umgekehrte Kerzenflamme.

4) Ist umgekehrt in Fig. 171 als Object ein leuchtender §. 579. Punkt l zwischen dem Brennpunkte F und dem Mittelpunkte C gegeben, so ist aus dem Vorhergehenden zu folgern, daß der scheinbare Ort des subjectiven Bildes jenseits des Mittelpunktes liegen muß. Denn da die reflectirten Strahlen eines im Mittelpunkte C befindlichen leuchtenden Punktes nach C selbst gerichtet sind, die reflectirten Strahlen eines im Brennpunkte F befindlichen leuchtenden Punktes aber, wie oben in §. 576 gesagt ist, parallel ausfallen, so muß der scheinbare Ort des Bildes eines zwischen C und F befindlichen leuchtenden Punktes zwischen dem Mittelpunkte C und dem unendlich entfernten Schnittpunkte der parallelen Strahlen liegen. Es muß deswegen aber auch ein Theil der die Bildung eines vollkommenen Spiegelbildes nicht zulassenden Umstände, wie sie in §. 576 erwähnt sind, eintreten, und kann ein annähernd vollkommenes subjectives oder objectives, und zwar vergrößertes und umgekehrtes Bild nur dann wahrgenommen werden, wenn einerseits der als Object dienende leuchtende Punkt dem Mittelpunkte C hinlänglich nahe gegeben ist, und andererseits das Auge oder der Schirm sich innerhalb des dann auftretenden Kegels reflectirter Strahlen entsprechend nahe dem Mittelpunkte C befinden.

5) Ist endlich das Object innerhalb der Brennweite §. 580. des Spiegels gegeben, so zeigt sich, scheinbar hinter dem Spiegel gelegen, ein sehr vollkommenes subjectives Spiegelbild, ähnlich dem im ebenen Spiegel, aufrecht, mit der Verwechselung des Rechts und Links, jedoch gekrümmt und vergrößert. Ist z. B. in Fig. 172 (Taf. 24) als Object ein Pfeil PL gegeben, so fallen die Bilder seiner Enden P und L, wie im ebenen Spie-

Digitized by Google

gel, in die Schnittpunkte p und l der verlängerten Hauptstrahlen Ch und Ci mit den Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen πO und λO. Da die Hauptstrahlen divergirende Radien des Spiegels sind, so muß das Bild größer als das Object erscheinen und zwar um so größer, je näher sich dieses am Brennpunkte befindet. Rückte das Object in den Brennpunkt selbst, so wäre sein Bild unendlich groß und unendlich entfernt (siehe oben §. 576); befände es sich an der Spiegelfläche, so fiele sein Bild mit ihm zusammen.

Das auf einem vor dem Spiegel aufgestellten Schirme aufgefangene Bild einer innerhalb der Brennweite als Object gegebenen Flamme tritt auf, wie das vom ebenen Spiegel herrührende Schirmbild, als eine Lichterscheinung von einer der des Spiegels ähnlichen Begrenzung, und in einer von der Entfernung des Schirmes und der des Objectes vom Spiegel abhängigen Größe. Wegen der Divergenz der reflectirten Strahlen kann es von nur geringer Helligkeit sein.

§. 581. Bei der Beobachtung des vom Hohlspiegel hervorgerufenen subjectiven Spiegelbildes mit beiden Augen tritt, ausgenommen bei der im vorhergehenden Paragraphen angeführten Stellung des Objectes zum Spiegel, meist der Fall ein, daß die Netzhautbilder in den beiden Augen eine größere Verschiedenheit haben, als bei dem Sehen nach dem Objecte selbst. Da außerdem das jedem Auge entsprechende subjective Bild scheinbar an einem andern Orte im Raume auftritt, so vermögen die Augen erst nach einiger Anstrengung, und auch nicht immer, die Achsenrichtung und die Einrichtung zu finden, in welcher sich für den Beobachtenden die beiden Bilder zu der Wahrnehmung Eines, in seinen Theilen dann meist doch noch etwas verschobenen, subjectiven Bildes vereinigen. Ganz besonders gilt dies von dem, von einem zwischen dem Mittelpunkte und dem Brennpunkte gegebenen Objecte herrührenden subjectiven Bilde, da hier die den beiden Augen entsprechenden einzelnen Bilder, an sich schon unvollkommen und sehr verschieden von einander, räumlich besonders weit aus einander fallen.

Digitized by Google

Beispiel 60.

Aufgabe. Es ist in Fig. 173 (Taf. 26) in der Ellipse um C die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz, ap Grundlinie) der Begrenzung einer im Punkte a auf der Grundebene ruhenden **Halbkugel** gegeben, **deren innere Fläche spiegelt**; ferner die Perspective KL einer im Punkte K auf der Grundebene stehenden **lothrechten geraden Linie** — in Fig. 174 liegt in halbem Maßstabe die geometrische Grundrißprojection der gegebenen Stücke vor — es soll die Perspective des Spiegelbildes der geraden Linie construirt werden. §. 582.

Ausführung. Es ist am zweckmäßigsten, wie bei dem convexen Kugelspiegel, in der gegebenen geraden Linie außer ihren Endpunkten K und L noch einen dritten, und zwar den in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte C des Kugelspiegels gelegenen Punkt M zur Construction auszuersehen, und darauf in einer, in Fig. 175 (Taf. 26) vorgeführten Hülfsconstruction geometrisch festzustellen: 1) in CO den Abstand des Auges vom Mittelpunkte des Spiegels, 2) in den Maßen LC, MC und KC die Abstände der ausersehenen drei Punkte der gegebenen geraden Linie vom Punkte C, und 3) in den Maßen (O) L, (O) M und (O) K die Abstände des Auges von denselben drei Punkten — um dann schließlich in einer andern Hülfsconstruction, wie sie Fig. 176 zeigt, die **geometrischen Abstände der** in den Hauptstrahlen gelegenen **Bilder** l, m und k vom Mittelpunkte C zu ermitteln. §. 583.

Ist dieses Alles nach Anleitung des §. 557 geschehen, und man zieht, um wie in jenem Beispiel 57 die **geometrischen Abstände** der Bilder von C nunmehr **perspectivisch** darzustellen, in Fig. 173 von den Punkten L, M und K durch C hindurch die Hauptstrahlen, so ergiebt sich zunächst für den horizontalen Hauptstrahl MC der links im Horizonte liegende Punkt Z als Verschwindungspunkt, und tz im Horizonte als der entsprechende Theilpunkt; die Verschwindungspunkte W und V aber der anderen beiden Hauptstrahlen nebst den entsprechenden Theilpunkten tw und tv liegen sämmtlich in einer durch Punkt Z lothrechten Grenzlinie. Demnach sind denn in diesen Hauptstrahlen die aus Fig. 176 hervorgegangenen geometrischen Abstände Cl, Cm und Ck der Bildpunkte vom Spiegel-Mittelpunkte C leicht perspectivisch darzustellen, und ergeben sich dadurch die Punkte l, m und k als die Perspectiven der Spiegelbilder der Punkte L, M und K, und eine durch jene Punkte gezeichnete Curve — deren Richtigkeit man allenfalls durch Construction der Bilder noch mehrerer zwischen L

Digitized by Google

und K anzunehmenden Punkte sichern kann — als das Spiegelbild der gegebenen geraden Linie.

Beispiel 61.

§. 584. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 177 (Taf. 26) die Perspective J H G B A K (P Hauptpunkt, P O Distanz, p G Grundlinie) der untern Hälfte eines mit seiner Seite K G auf der Grundebene liegenden **Cylinders**, dessen Achse C^1C^2 mit der Bildebene zusammenfällt und **dessen innere Fläche spiegelt**, gegeben; ferner die Perspective F L einer im Punkte F auf der Grundebene stehenden und den Cylinder im Punkte N berührenden **lothrechten geraden Linie** — in Fig. 178 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßstabe geometrisch vor — es soll die Perspective des Spiegelbildes sowohl des Stückes L N der gegebenen Linie, als der gegebenen **Begrenzung des Cylinders** selbst, soweit davon überhaupt ein Spiegelbild sichtbar werden kann, construirt werden.

§. 585. **Ausführung.** Um, was als das Zweckmäßigste erscheint, zunächst das Bild des Punktes L zu construiren, muß zuvor vermittelst einer geometrischen Hülfsconstruction, wie sie in Fig. 179 (Taf. 26) vorliegt, diejenige Cylinderseite (reflectirende Linie) festgestellt werden, in welche dieses Bild fällt. Zu dem Zwecke wird in Fig. 179 zuvörderst neben einem dem Querschnitte des Cylinders entsprechenden Halbkreise um C, in dem aus Fig. 178 entnehmbaren Abstande (2 mal P O) von C G, eine Lothrechte ω O errichtet und deren Länge gleich der aus Fig. 177 ersichtlichen Höhe p P des Auges gemacht; ferner wird eine den Halbkreis in N berührend zu ziehende Lothrechte F L gleich der geometrischen Länge der in Fig. 177 perspectivisch gegebenen Linie F L gemacht. Ermittelt man hierauf in der Peripherie des Halbkreises, L als Object und O als Auge genommen, den reflectirenden Punkt 1, so bezeichnet dieser im Cylinder-Querschnitt geometrisch den Ort derjenigen Cylinderseite, in welcher das eigentliche Bild von L zu suchen ist. Die Perspective aber dieser Cylinderseite ist in Fig. 177 dadurch zu construiren, daß man hier die Perspective 3 1 einer der Bildebene parallelen horizontalen Linie darstellt, welche in der Grundebene perspectivisch so weit hinter der Cylinderseite K G liegt, wie in Fig. 179 der Punkt 3 — in welchem die Rückwärtsverlängerung von 1 O die Grundebene F ω schneidet — geometrisch weit links von G liegt; denn offenbar muß in der Construction die gesuchte reflectirende Cylinderseite mit dieser Linie 3 1 perspectivisch zusammenfallen.

Digitized by Google

Um hiernach den Ort des eigentlichen Bildpunktes l in der reflectirenden Cylinderseite zu bestimmen, kann man diese als reflectirende Linie eines ebenen Spiegels auffassen und damit in einer andern geometrischen Hülfsconstruction, Fig. 180, folgendermaßen verfahren: Nachdem man hier in rr^1 die reflectirende Linie, und zwar in der Länge des geometrischen Abstandes mp (Fig. 177) der gegebenen Linie FL von der Verticalebene dargestellt, darauf in rO^1, normal zu rr^1, die aus Fig. 179 entnehmbare Länge des reflectirten Strahles $1O$ — also den normalen Abstand des Auges von der reflectirenden Cylinderseite — und endlich in r^1L, normal zu rr^1, die ebenfalls aus Fig. 179 entnehmbare Länge des einfallenden Strahles $L1$ — also den normalen Abstand des Punktes L von der reflectirenden Cylinderseite — aufgetragen, ergiebt sich, wenn man rr^1 als Spiegel, O^1 als Auge und L als Object nimmt, l als der reflectirende Punkt, und zwar in dem Abstande lr von der Verticalebene. Die Perspective von l findet man aber in Fig. 177, wenn man jenen Abstand rl hierher in die Cylinderachse in $\varrho\lambda$ geometrisch überträgt, um λ die Perspective eines zur Cylinderachse normal stehenden Cylinderkreises construirt und mit demselben die reflectirende Cylinderseite 3l in l, als dem gesuchten Spiegelbilde von L, schneidet. —

Wie das Spiegelbild l, sind nun auch die Spiegelbilder n, b, e und g des Punktes N und der in der Peripherie der Cylinderbasis beliebig zur Construction ausersehenen Punkte B, E und G zu construiren, und liegen die dabei nöthigen Hülfsconstructionen in den Figuren 179 und 180 mit vor. Es ergeben sich schließlich ib als Spiegelbild eines Stückes der Cylinderseite AB, die Curve ln als Bild des Stückes LN der gegebenen geraden Linie FL, und die Curve beg, zum Theil durch den Cylinder selbst verdeckt, als Bild der Peripherie BEGH der Cylinderbasis.

Beispiel 62.

Aufgabe. Es ist in Fig. 181 (Taf. 27) die Perspective (P Hauptpunkt, PO Distanz, pr Grundlinie) eines mit seiner Spitze auf der Grundebene im Punkte r ruhenden, hohlen und zum Theil ausgeschnittenen **Kegels** von kreisförmiger Grundfläche, dessen Achse mit der Bildebene zusammenfällt und dessen Höhendurchschnitt das Dreieck rms in Fig. 183 ist, gegeben; außerdem die Perspective L eines **leuchtenden Punktes**, dessen perspectivische Horizontalprojection auf der Grundebene der Punkt K ist — in Fig. 182 liegt die geometrische Grundriß-Projection der gegebenen Stücke vor — es §. 586.

Digitized by Google

soll die Perspective des Spiegelbildes des Punktes L auf der **inneren spiegelnden Kegelfläche** construirt werden.

§. 587. Die **Ausführung** geschieht nach Anleitung der im Beispiel 59 gezeigten Construction des Spiegelbildes im convexen Kegelspiegel. Da man aber auch hier schließlich darauf angewiesen ist, mit einer Curve, der reflectirenden Linie, wie mit einer geraden Linie zu verfahren, so kann auch in dieser Aufgabe der perspectivische Ort des Spiegelbildes nur annähernd richtig ermittelt werden.

Wie in dem angeführten Beispiele ist auch hier zunächst die reflectirende Linie, und in dieser alsdann der Ort des Bildes, wie in der reflectirenden Linie eines ebenen Spiegels, zu suchen. Man nimmt zu ersterem Zwecke die durch das Auge, durch den gegebenen Punkt L und zugleich rechtwinklig zu der dem Punkte L fernsten Kegelseite denkbare Ebene in Betracht, stellt ihren Schnitt mit dem Kegel geometrisch dar, bestimmt darin den reflectirenden Punkt, construirt dessen Perspective, und behandelt die durch diese Perspective gehende Kegelseite als reflectirende Linie.

Da die Kegelseiten, der Fig. 183 nach, sich um 57° aus der Grundebene erheben, muß die vorher gedachte Ebene sich um 33° unter letztere neigen, und da die Ebene dieses Neigungswinkels, wie aus der Lage des Punktes L zu der ihm fernsten Kegelseite R U in Fig. 182 ersichtlich ist, parallel der Verticalebene ist, so wird in der Construction in dem Distanzpunkte D an den Horizont unterhalb der Winkel von 33° angetragen und die Verticale dadurch im Punkte x geschnitten, wonach eine durch x und L gezogene Linie die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeschlagener Gesichtspunkt) der gedachten Ebene sein muß. Um den elliptischen Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel, wovon in Fig. 184 (Taf. 27) ein ausreichendes Stück vorliegt, vermittelst durch den Punkt a der Kegelachse gehender Sehnen geometrisch darstellen zu können, dient wieder eine besondere Hülfsconstruction, Fig. 183, wie in dem Beispiele 59, und ist auch hier, wie dort, wenigstens eine durch einen angenommenen Hülfspunkt T gehende Ellipsensehne mit verwendet worden. Nachdem darauf in Fig. 184 auf dem Umfange der Ellipse in 1° der reflectirende Punkt ermittelt worden, wird dessen Perspective 1° in der Grenzlinie x L in Fig. 181 dadurch bestimmt, daß man den Winkel a O^1 1° der Fig. 184 in jener Figur an a O^1 in O^1 anträgt und x L dadurch in 1° schneidet.

1° ist nunmehr ein Punkt der reflectirenden Curve, in welcher die perspectivische Höhe des eigentlichen Bildes von L zu suchen ist. Da diese Curve jedoch nur wenig verschieden von der geraden Linie ist, so ist der Fehler nicht bedeutend, wenn man sie als mit der geraden Kegelseite r r^1

Digitized by Google

zusammenfallend auffaßt. Demgemäß ist, wie in dem Beispiele 59, in einer besondern Hülfsconstruction, Fig. 185 (Taf. 27), $r r^1$ als reflectirende Seite des Kegels darzustellen; in derselben ist 1° vermittelst des ihm gleich hoch in der Achse gelegenen und aus Fig. 181 entnehmbaren Punktes 4 zu bezeichnen; der Lichtpunkt L und das Auge O sind in der ihnen zukommenden Höhe und in ihrem normalen Abstande von der Kegelseite $r r^1$ wieder dadurch zu bestimmen, daß man, 1° als Mittelpunkt genommen, zwei Kreisbögen mit den aus Fig. 184 entnehmbaren Radien 1° L und $1° O^1$ schlägt und dieselben durch andere Kreisbögen, wozu die Kegelspitze r der Mittelpunkt ist und die aus Fig. 183 entnehmbaren Längen r L und r O die Radien sind, in L und O schneidet. Behandelt man darauf L als Object, O als Auge, und $r r^1$ als einem ebenen Spiegel angehörig, so ergiebt sich l als der mit dem scheinbaren Bilde (l) perspectivisch zusammenfallende reflectirende Punkt. Schneidet man endlich die Kegelachse vermittelst einer Horizontalen l 3 in 3, überträgt die Länge r 3 geometrisch nach Fig. 181 in r3, und schneidet hier die Kegelseite $r r^1$ durch die perspectivisch horizontale Linie 3λ im Punkte l, so ist dieser die Perspective des Spiegelbildes von L. —

§. 588. Nachdem in den letzten Kapiteln auch die schwierigeren der bei der perspectivischen Construction vorkommenden Fälle Berücksichtigung gefunden, mahnen vollends die in diesen Kapiteln enthaltenen Beispiele 59 und 62, in welchen, bei der Unausführbarkeit constructiver Manipulationen mit nicht je in einer Ebene liegenden krummen Linien, das Gutdünken zu Hülfe kommen mußte, und die große Umständlichkeit des Verfahrens dabei überhaupt daran, daß mit diesen Beispielen die Grenze zwischen der bildlichen Construction und der Berechnung erreicht und damit die dem Titel dieser Blätter entsprechende Aufgabe wohl erschöpft ist. —

Zum Schlusse folge eine insbesondere wohl Jüngern der Malerei willkommene Erörterung.

Dreißigstes Kapitel.

Anleitung zur Berichtigung der Perspective in einer Skizze und zur Verwendung der letzteren bei der Construction der Perspective im ausgeführten Bilde selbst.

§. 589. Die Vorarbeiten zu einer, menschliche Figuren enthaltenden, bildlichen Darstellung bestehen gewöhnlich in einer Skizze und dem

Digitized by Google

Carton. Erstere pflegt das in der Vorstellung des Künstlers hinsichtlich der Handlung, der Gruppirung und der Farbe vollständig vorhandene Bild in kleinem Maßstabe wiederzugeben. Der Carton dient, als Uebergangsstufe zu dem ausgeführten Bilde selbst, zur Feststellung der Umrisse und der Beleuchtung und ist gewöhnlich in einem dem ausgeführten Bilde gleichen Maßstabe einfarbig ausgeführt.

Da das Gelingen eines Bildes zum großen Theile auf einer geschmackvollen Anordnung bei dem perspectivischen Projiciren der Haupt- und Nebenfiguren auf dunklen, hellen, intensiv-farbigen oder farblosen Hintergründen mitberuht, muß es dem Darsteller darauf ankommen, die in dieser Beziehung in der Skizze niedergelegte Idee auch in dem Bilde selbst durchzuführen und die Ergebnisse der linearperspectivischen Construction mit der Skizze möglichst in Einklang zu bringen.

Als Anhalt bei dieser Erörterung möge Fig. 186 (Taf. 28) dienen, welche ein von dem Verfasser früher ausgeführtes Gemälde zunächst in der Bedeutung als Skizze vorführt. Dasselbe stellt dar den großen Kurfürsten Friedrich Wilhelm (W), zwei Tage vor seinem Tode Abschied nehmend von seinem Sohne (K), dem nachmaligen Könige Friedrich I., und von dem Geheimen Rathe, bestehend aus den sechs Personen: von Reetz (R), Marschall von Schomberg (M), von Grumbkow (G), von Fuchs (F), von Schwerin (S) und von Knyphausen (C). Bekannt sind die Porträts aller Personen; von dem Kurfürsten, dem Kurprinzen und dem Marschall von Schomberg auch die Körpergrößen. Für die anderen Personen müssen dieselben aus dem Eindrucke ihrer vorfindlichen Porträts gefolgert werden. Die Räumlichkeit, in welcher die Handlung vorging, ist nicht mehr vorhanden und mußte componirt werden. Die Skizze bietet ein Bild von ihr, wie es der Darsteller sich dachte, indem er die einzelnen Stücke aus dem Inhalte des Berliner Schlosses entlehnte. Es schien demselben wünschenswerth, die Hauptfiguren, W und K, hell zu beleuchten, und zwar die Figur des Kurprinzen, welcher einen hellblauen Rock trägt, hell von einem dunklen, farblosen Hintergrunde, dem Getäfel der Wand, abzusetzen; hingegen die Figur

Digitized by Google

des Kurfürsten, welcher einen schwarzen Rock trägt, zumeist dunkel theils auf dem halbdunklen rothen Schirme, theils auf den weißen Betten im Stuhle zu projiciren. Die Figur C, in graugelbem Rocke, sollte sich ebenfalls hell von dem Schirme, die Figuren G, M und F sollten sich mit ihren beleuchteten Theilen hell von dem im Hintergrunde befindlichen trübfarbigen Fenster, mit ihren Schattenseiten dunkel davon absetzen; die Figur R sollte sich halbdunkel auf der ziemlich farblosen dunklen Fensterwand projiciren. Es schien günstig, daß von dem Kamine wenigstens so viel, wie die Skizze zeigt, sichtbar sei, und daß die Figur K durchaus nicht die linke Höhenkante desselben verdecke. —

Will man nun derartige künstlerische Geschmacksforderungen zur Geltung bringen, und man nimmt die eben angeführten für das vorliegende Beispiel als gegeben an, so ist deren Vereinbarung mit der linearperspectivischen Construction zu sichern, wenn man folgendermaßen verfährt:

Schon bei der Anfertigung der Skizze ist darauf zu sehen, daß die Fußpunkte der lothrecht stehenden Objecte, der Möbel, und die Standpunkte *) der menschlichen Figuren je nach ihrer beabsichtigten größeren oder geringeren Entfernung vom Beschauer, d. h. also in ihrer horizontalen Lage zu einander, mit vollem Bedacht angeordnet werden. Es erleichtert dies die unumgänglich nothwendige Anfertigung des geometrischen Grundrisses zu dem Bilde, in welchem vorzusehen ist, daß jede Figur auch wirklich den ihr zukommenden Raum habe; daß besonders, wo wie hier die Figuren gedrängt stehen, nicht Theile der einen in die Körper der anderen oder in Möbel hineinragen; daß die menschlichen Figuren nicht unmöglich große Schritte machen, und auch inwieweit dieselben en profil oder en face zu sehen sind u. dergl. mehr.

Der Anfertigung des Grundrisses geht die Feststellung des Fußmaßstabes und des Horizontes der Skizze voran. Den

*) Standlinie möge hier eine durch die Halsgrube der betreffenden menschlichen Figur angenommene, von deren Scheitel bis zum Fußboden reichende lothrechte Linie, Standpunkt der Fußpunkt dieser Linie auf dem Fußboden heißen.

Digitized by Google

ersteren findet man, wenn man die Standlinie einer ihrer Körpergröße nach bekannten menschlichen Figur, hier etwa die der Figur K, welche mit Perrüke und Stiefelabsatz 66 Zoll hoch ist, in 66 Theile theilt und deren je 3 seitlich neben der Skizze mehrfach auf die durch den Standpunkt K gezogene Horizontale aufträgt. Zieht man dann, wie es in figürlichen Darstellungen üblich ist, in der Höhe der Augen eines sitzenden Menschen, d. i. 49 Zoll über dem Fußboden, also hier über dem Standpunkte K, den Horizont, und zieht ferner von einem darin seitlich neben der Skizze beliebig angenommenen Punkte V Linien durch die Theilungspunkte der durch K horizontal gezogenen Linie, so schneiden diese auf der verlängerten Grundlinie der Skizze das ihr entsprechende 3 Zoll-Maß mehrmals ab. Der Raumersparniß wegen ist dasselbe in dem in Fig. 187 (Taf. 28) vorliegenden Grundrisse auf $\frac{1}{3}$ reducirt worden.

Nach dieser Vorbereitung ist der Grundriß in Angriff zu nehmen. Man ordnet darin zunächst die wichtigeren Theile des Zimmers an, die Ecke desselben, den Kamin, den Stuhl der Figur W und deren Standpunkt W in der beabsichtigten Nähe zum Kamin, das Tischchen neben dem Stuhle, den Standpunkt der Figur K; danach das weniger wichtige Geräthe, wie etwa den Bücherschrank im Hintergrunde u. s. w. Die Anordnung des als Hintergrund dienenden Fensters und des Sessionstisches, auf welchen die Figur M die Hand stützt, so wie des Stuhles links im Vordergrunde ist erst nach Feststellung der Standpunkte der übrigen Personen rathsam.

Diese werden nun unter möglichst festem Anhalt an die Skizze, jedoch so angeordnet, daß man jeder Figur den ihr in ihrer besondern Körperstellung zukommenden Raum, allenfalls durch vorhergehende Messungen am lebenden Modelle sichert. Es ist dabei, vollends wenn die Figuren gedrängt stehen, sehr zu empfehlen, den jeder einzelnen zukommenden Raum in dem Grunderisse je durch ein Rechteck von mindestens $1\frac{1}{2}$ Fuß Länge (der Schulterbreite) und von mindestens $\frac{3}{4}$ Fuß Breite (der Brustkastentiefe eines Menschen), wie ein solches um den Standpunkt K vorliegt, zu bezeichnen, da hierdurch außer dem jeder Figur zukommenden Raume zugleich am zuverlässigsten festgestellt wird, in welcher Ansicht, ob ganz oder halb,

Digitized by Google

en profil oder en face die betreffende Figur im Bilde selbst darzustellen ist. Bei dieser Art der Anordnung kann man auch durch Gesichtslinien, welche man durch den Grundriß nach der einstweilen nach Gutdünken anzunehmenden Projection des Gesichtspunktes zieht, und nach deren Anleitung man die Orte der Personen und der Möbel durch Rücken und Probiren überhaupt abwägt, die Durchführung der in der Skizze hinsichtlich des Projicirens auf dem gewünschten Hintergrunde niedergelegten Idee am besten sichern.

Vor welchen Fehlern unter anderen der Grundriß bewahren soll, deutet das den Grundriß des Stuhles links im Vordergrunde vorstellende punktirte Quadrat an. Es läßt erkennen, daß hier der projectirte Stuhl, des Tischfußes wegen, nicht stehen kann, vielmehr so weit, wie das voll ausgezogene Quadrat angiebt, vorgerückt werden muß. In Fig. 188 ist derselbe Fehler perspectivisch vorgeführt.

Nach Anfertigung des Grundrisses sind für die perspectivische Construction die Distanz und der Ort des Gesichtspunktes dadurch festzustellen, daß man im Grundrisse an der Fensterwand und an der Kaminwand die Punkte b und c, bis zu welchen diese Wände, der Skizze nach, gesehen werden und welche demnach den seitlichen Grenzen der letzteren entsprechen, bezeichnet. Nimmt man alsdann, was für ein Intérieur, wie das vorliegende Bild ist, ausreichend erscheint, die Länge b c als Grundlage für die Distanzbestimmung, und macht demgemäß die im Halbirungspunkte d der b c errichtete Normale d e gleich $1\frac{1}{2}$ mal b c, so ist nach §. 25 jeder Punkt der Peripherie des durch die drei Punkte b, c und e, also um h als Mittelpunkt zu construirenden Kreises so gelegen, daß Gesichtslinien, von ihm nach b und c gezogen, stets ein nur 37° großes Gesichtsfeld einschließen, wie dies §. 23 für die Richtigkeit der Distanz bedingt.

Um nun den in der Skizze vorliegenden Dispositionen treu zu bleiben, zieht man, da dort die Standlinie der Person R dicht neben der linken lothrechten Kante des Fenstergewändes liegt, im Grundrisse durch Punkt R eine (Gesichts-) Linie, welche die Fensterwand dicht neben der Projection jener Kante und demnach den

Digitized by Google

Kreisbogen andererseits in o^1 schneidet. Man zieht ferner, da der Skizze nach die Standlinie der Person G zwischen dem Fensterkreuze und der rechten Fensterecke liegen soll, im Grundrisse eine (Gesichts-) Linie, welche das Fenster zwischen dem Kreuze und der rechten Ecke und demnach andererseits den Kreisbogen in dem Punkte o^2 schneidet. Man zieht endlich, da nach der Skizze die Standlinie der Person K zwischen der rechten lothrechten Kante des Bücherschrankes und der linken lothrechten Kante des Kamines liegen soll, im Grundrisse eine (Gesichts-) Linie durch K, welche zwischen den Projectionen jener Kanten hindurchgeht und demnach andererseits den Kreisbogen in dem Punkte o^3 schneidet, u. s. f. Fielen nun die Schnittpunkte dieser Gesichtslinien mit einander und mit dem Kreisbogen zu weit auseinander, so müßte man entweder den mittleren ihrer Schnittpunkte mit dem Kreisbogen als Gesichtspunkt annehmen, oder sich für einen ihrer Schnittpunkte mit einander entscheiden und eine Abweichung von der Skizze hinnehmen. Im vorliegenden Beispiele aber schneiden sich, weil dasselbe sich auf ein ausgeführtes Bild stützt, die drei Gesichtslinien in Einem Punkte O, welcher dem Kreisbogen so nahe liegt, daß man ihn ohne erheblichen Fehler wohl als Gesichtspunkt annehmen darf.

Die in der Skizze vorher durch den Standpunkt K gezogene horizontale Linie geht dort dicht hinter dem Standpunkte R vorbei. Zieht man daher im Grundrisse durch K eine Linie, welche dicht hinter R vorbeigeht, so bezeichnet diese offenbar die Richtung der Bildebene. Ginge diese Linie zufällig noch durch einen Punkt, welcher die Projection einer zur Auftragung der Höhenmaße geeigneten lothrechten Linie oder Kante (Hauptkante, §. 170) wäre, so würde sie ohne Weiteres auch als Ort der Bildebene anzunehmen sein; da jedoch die dicht vor dem Stuhle links angenommene Grundlinie der Skizze verlängert die Kaminwand in nicht zu großer Entfernung treffen muß, und die Auftragung der Höhenmaße auf einer im Schnittpunkte U beider stehenden lothrechten Linie bequem ist, so empfiehlt es sich, die Grundlinie der Skizze beizubehalten, dieselbe im Grundrisse in einer Linie $T T^1$ darzustellen, welche dicht vor dem Stuhle links vorbeigeht und jener durch K gezogenen parallel ist, und

Digitized by Google

diese auch für die Construction als Ort der Bildebene, und zwar als deren Grundlinie anzunehmen.

Eine von O auf diese Grundlinie TT^1 gefällte Normale trifft dieselbe im Punkte P, der Projection des Hauptpunktes der Construction. Mißt man nun die Distanz OP, so ergiebt sich das Maß von $10\frac{1}{2}$ Fuß, welches, da O nicht genau in der Peripherie des Kreisbogens angenommen wurde, zwar nur gleich $1\frac{1}{3}$ der Bildbreite AQ und nicht, wie es streng genommen erforderlich wäre, $1\frac{1}{2}$ mal AQ ist, jedoch wenigstens gleich ist der Diagonale der in dreifachem Maßstabe des Grundrisses vorliegenden Skizze — eine für ein Intérieur keineswegs fehlerhafte Distanz.

Nachdem nun noch im Grundrisse die von der Anordnung der Figuren abhängigen Objecte, beispielsweise der Schirm hinter der Figur W, unter Anwendung von Gesichtslinien wie oben bei Ermittelung des Gesichtspunktes so angeordnet worden, daß sich die Figur W auf ihm projiciren muß; nachdem ferner das Muster des aus verschiedenen Hölzern zusammengesetzten Fußbodens so angeordnet worden, daß es die große Fläche desselben interessanter macht, ohne architektonisch unwahrscheinlich zu sein, u. dgl. m., so kann zur perspectivischen Construction geschritten werden. Einige im Grundrisse gezogenen Linien OA und O (Z) bedeuten die Parallelstrahlen für die Fenster- und die Kaminwand (A ist der Verschwindungspunkt für die horizontalen Kanten des Kamins); O (Y) und O (X) bedeuten die Parallelstrahlen für die horizontalen Kanten der Stühle u. s. w.

Es hängt nun von den für das ausgeführte Bild beabsichtigten Dimensionen ab, ob die Construction in dem Maßstabe des Bildes selbst oder in kleinerem Maßstabe zu unternehmen ist. Wegen der meist zu großen Entfernung einzelner Verschwindungspunkte und der großen Umständlichkeit von Hülfsconstructionen ist es stets räthlich, daß die Construction zunächst in kleinerem Maßstabe ausgeführt und danach auf eine angemessene Weise, allenfalls vermittelst Quadrate, vergrößert auf die Bildfläche selbst übertragen werde.

In Fig. 188 (Taf. 28) liegt die Construction in dreifachem Maßstabe des Grundrisses, d. i. in dem der Skizze, vor. Statt der ganzen

Digitized by Google

Distanz ist darin die aus dem Grundrisse entnehmbare $^1/_3$-Distanz angewendet. Nach den Perspectiven der wichtigeren Theile des Zimmers und des Ameublements sind dem Grundrisse gemäß die Standpunkte der Personen, und unter Anwendung des perspectivischen Maßstabes die perspectivischen Höhen der Standlinien derselben je nach deren bekannten oder angenommenen Körpergrößen construirt worden. —

Hinsichtlich der Beleuchtung der Geräthe und der Personen bedarf es keiner besonderen Anleitung, da dieselbe theils nach den betreffenden Orts gegebenen Regeln zu construiren, theils nach dem lebenden Modell darzustellen ist. —

In Bezug auf die Arbeiten nach dem lebenden Modell ist daran zu erinnern, daß der Darsteller das letztere stets der im Grundrisse vorzusehenden Lichtöffnung gemäß stellen, sich also hüten muß, die einzelnen Modelle zu den verschiedenen Personen in seinem Arbeitsraume stets an derselben Stelle aufzustellen, da sich doch im Bilde jedes Object zu der Lichtöffnung in einer anderen räumlichen Beziehung befindet. Auch muß der Darsteller dabei selbst zu jedem Modelle den sich aus dem Grundrisse ergebenden Abstand und die für das Bild überhaupt angenommene Höhe des Auges einhalten, damit die Perspective in den figürlichen Theilen des Bildes nicht mit der Perspective des Zimmergeräthes in Widerspruch stehe.

In Bezug auf die Beleuchtung, namentlich der im Halbdunkel befindlichen Objecte, wird der Geschmack des Künstlers manches fordern, was auf den ersten Blick als eine Abweichung von der Strenge der Construction erscheinen könnte; es bedarf aber wohl keiner besonderen Erörterung, daß optische Unmöglichkeiten unter keinen Umständen zulässig sind und daß alle die technischen Momente, welche in einer bildlichen Darstellung zu einer naturwahren Wirkung derselben beitragen, dabei aber nicht selten für nothwendige Freizügigkeiten im Interesse der „Stimmung" des Bildes gehalten werden, sämmtlich auf der, häufig unbewußten, Befolgung der Gesetze der Luftperspective, der Optik, beruhen.

Digitized by Google

Tabelle

der

Winkel-Tangenten.

Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.
½	0,0087	15½	0,2773	30½	0,5890
1	0,01745	16	0,2867	31	0,6009
1½	0,0262	16½	0,2962	31½	0,6128
2	0,03492	17	0,3057	32	0,6249
2½	0,0437	17½	0,3153	32½	0,6371
3	0,0524	18	0,3249	33	0,6494
3½	0,0612	18½	0,3346	33½	0,6619
4	0,0699	19	0,3443	34	0,6745
4½	0,0787	19½	0,3541	34½	0,6873
5	0,0875	20	0,3640	35	0,7002
5½	0,0963	20½	0,3739	35½	0,7113
6	0,1051	21	0,3839	36	0,7265
6½	0,1139	21½	0,3939	36½	0,7400
7	0,1228	22	0,4040	37	0,7536
7½	0,1316	22½	0,4142	37½	0,7673
8	0,1405	23	0,4245	38	0,7813
8½	0,1495	23½	0,4348	38½	0,7954
9	0,1584	24	0,4452	39	0,8098
9½	0,1673	24½	0,4557	39½	0,8243
10	0,1763	25	0,4663	40	0,8391
10½	0,1853	25½	0,4770	40½	0,8541
11	0,1944	26	0,4877	41	0,8693
11½	0,2035	26½	0,4986	41½	0,8847
12	0,2126	27	0,5095	42	0,9004
12½	0,2217	27½	0,5206	42½	0,9163
13	0,2309	28	0,5317	43	0,9325
13½	0,2401	28½	0,5430	43½	0,9490
14	0,2493	29	0,5543	44	0,9657
14½	0,2586	29½	0,5658	44½	0,9827
15	0,2679	30	0,5774	45	1

Digitized by Google

Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.
45½	1,0176	60½	1,7675	75½	3,8667
46	1,0355	61	1,8040	76	4,0108
46½	1,0538	61½	1,8418	76½	4,1653
47	1,0724	62	1,8807	77	4,3315
47½	1,0913	62½	1,9210	77½	4,5107
48	1,1106	63	1,9626	78	4,7046
48½	1,1303	63½	2,0057	78½	4,9152
49	1,1504	64	2,0503	79	5,1446
49½	1,1708	64½	2,0965	79½	5,3955
50	1,1918	65	2,1445	80	5,6713
50½	1,2131	65½	2,1943	80½	5,9757
51	1,2349	66	2,2460	81	6,3137
51½	1,2572	66½	2,2998	81½	6,6911
52	1,2799	67	2,3559	82	7,1154
52½	1,3032	67½	2,4142	82½	7,5958
53	1,3270	68	2,4750	83	8,1443
53½	1,3514	68½	2,5386	83½	8,7769
54	1,3764	69	2,6051	84	9,5144
54½	1,4019	69½	2,6746	84½	10,3854
55	1,4281	70	2,7474	85	11,4301
55½	1,4550	70½	2,8239	85½	12,7062
56	1,4825	71	2,9042	86	14,3007
56½	1,5108	71½	2,9887	86½	16,3499
57	1,5399	72	3,0776	87	19,0811
57½	1,5697	72½	3,1716	87½	22,9038
58	1,6003	73	3,2709	88	28,6367
58½	1,6319	73½	3,3759	88½	38,1884
59	1,6643	74	3,4874	89	57,2900
59½	1,6977	74½	3,6059	89½	114,5887.
60	1,7321	75	3,7321		

Digitized by Google

Register zur ersten Abtheilung.

Abendröthe §. 60.
Ablenkungswinkel §. 33.
Achromatische Linsen und Prismen §. 55.
Achse der Linse §. 38.
Aderhaut §. 87.
Aether §. 2.
Auge §. 86.
Augenachse §. 92.
Augenachsen-Winkel §. 125.
Ausfallstrahl §. 11.

Beugung des Lichtes §. 70.
Blendung §. 105.
Brechende Kante am Prisma §. 36.
Brechender Winkel am Prisma §. 36.
Brechung des Lichtes §. 32.
Brechungsexponent §. 34.
Brechungsvermögen §. 55.
Brechungswinkel §. 33.
Brennpunkt, Brennweite der Linse §. 40.
Brillen §. 95.

Camera lucida §. 45.
Camera obscura §. 81.
Complementäre Farben §. 52.

Dispersion §. 49.
Durchsichtige Körper §. 3.
Dunkle Körper §. 3.

Einfallsloth §. 11.
Einfallswinkel §. 11.
Einrichtungsvermögen §. 89.

Farbe §. 47.
Farbe der Luft §. 64.
Farben dünner Schichten §. 74.
Farbenkreisel §. 113.
Farbenzerstreuung §. 49.
Farbestoffe §. 64.
Farbige Nachbilder §. 108.
Farbige Ränder §. 54.
Farbige Schatten §. 109.
Fata Morgana §. 42.
Fernrohr §. 104.
Fraunhofer'sche Linien §. 56.
Fußpunkt des Lichtes §. 8.

Gesichtslinie §. 99.
Gesichtswinkel §. 99.
Glanz §. 24.
Glasfeuchtigkeit §. 87.
Glaskörper §. 87.
Glaslinsen §. 38.

Hauptfarben §. 50.
Hauptstrahl §. 8.
Höchstes Licht §. 9.
Hornhaut §. 87.

Inflexion §. 70.
Innere Reflexion §. 43.
Interferenz §. 69.
Iris §. 87.
Irradiation §. 107.

Kreuzungspunkt im Auge §. 98.
Krümmungs-Mittelpunkt der Linse §. 38.
Krystalllinse §. 87.

Licht §. 2.
Lichtäther §. 2.
Lichtstrahl §. 3. 47.
Luftspiegelung §. 42.
Lupe §. 97. 104.

Medium §. 32.
Mikroskop §. 104.
Mittel §. 32.
Morgenröthe §. 60.

Digitized by Google

Nachbilder §. 105. 108.
Netzhaut §. 87.
Netzhautbild §. 90.
Newton'sche Farbenringe §. 75.

Objectives Bild §. 39.
Optischer Mittelpunkt der Linse §. 38.

Physiologische Farben §. 108.
Physisches Bild §. 90.
Pigmente §. 64.
Polarisation §. 77.
Prismatische Farben §. 48.
Pupille §. 87.

Randstrahlen §. 39.
Reflectirender Punkt §. 11.
Reflectirter Strahl §. 11.
Reflexion §. 11.
Reflexion, innere oder totale §. 43.
» » regelmäßige §. 13.
» » unregelmäßige §. 26.
Refraction §. 32.
Regenbogen §. 57.
Regenbogenhaut §. 87.
Retina §. 87.

Sammellinsen §. 95.
Schatten §. 4.
Scheinbares Bild §. 90.
Schirmbild §. 18.
Schlagschatten §. 4.
Schwingungsgeschwindigkeit des Lichtes §. 49.
Sehloch §. 87.
Sehnerv §. 87.
Sehweite §. 96.
Selbstleuchtende Körper §. 3.
Spectrum §. 48.
Spiegel §. 13.
Stereoskop §. 119.
Strahlenkörper §. 87.
Streiflicht §. 8.
Subjective Farben §. 108.
Subjectives Spiegelbild §. 18.

Totale Reflexion §. 43.

Undurchsichtige Körper §. 3.

Wässerige Feuchtigkeit des Auges §. 87.
Wellenlängen des Lichtes §. 49.

Zerstreuungskreise §. 94.
Zerstreuungslinsen §. 95.
Zerstreuungsvermögen §. 55.

Register zur zweiten Abtheilung.

Abstand des Gesichtspunktes §. 18.
Alhazenisches Problem §. 546.

Berührungspunkte der Tangenten an Kegelschnitten §. 231. 476.
Bildebene §. 14.
Bildfläche §. 7 fg.
Brennlinie, -Spiegel, -Weite §. 575.
Brennpunkt §. 548. 575.

Correspondirende Verschwindungspunkte §. 57.
Cylinder-Perspective §. 232. 233. 268.
» » auf schiefen Ebenen §. 315 bis 318.
Cylinder-Schatten §. 422. 424. 429. 430. 448. 453. 463. 467. 476. 477.
Cylinder-Schnitte s. Schnitte.
» » -Spiegelbild §. 540.
Cylindrischer Spiegel §. 560 bis 568. 584. 585.

Diagonalpunkt §. 150.
Distanz §. 18.
Distanzpunkt §. 34.
Durchschnittsfiguren s. Schnitte.

Fußpunkt des Lichtes §. 402.
» » der Sonne §. 433.

Digitized by Google

Gedrehte Verticale §. 74.
Gehrungen §. 174. 176. 177. 258. 271.
Gehrungsebene, -Linie §. 174.
Gesichtsfeld §. 18.
Gesichtspunkt §. 2. 17. 34.
Gesims-Perspective §. 173 bis 177. 258.
» » -Schatten §. 474.
Gewölbe §. 260 bis 263.
» » -Schatten §. 429. 430.
Glanz, Glanzlichter §. 543.
Gratbogen §. 259 bis 263.
Grenzlinie §. 65.
Grundebene §. 33. 34.
Grundlinie §. 34. 64.
Grundpunkt §. 34.
Grundrißmethode §. 45.
Gurtbogen §. 259 bis 262.

Halbschatten §. 389.
Hauptgesichtslinie §. 24.
Hauptkante §. 170.
Hauptpunkt §. 34.
Herabgeschlagener Gesichtspunkt §. 34.
Höchstes Licht §. 389.
Höhe des Auges §. 17.
Höhenmaßstab, perspectivischer §. 158. 187. 193.
Horizont §. 34.
» » -Ebene §. 34.
Horizontale Grenzlinie §. 34.
Hülfs-Bildebene §. 14. 273.
» -Grundebene §. 168.
» -Grundriß, perspectivischer §. 168.

Kappen s. Gewölbe, Grat- und Gurtbogen.
Katakaustische Linie §. 575.
Kegel-Perspective §. 231. 321.
» -Schatten §. 423. 450. 451. 454. 455. 464. 468. 571.
» -Schnitte s. Schnitte.
» -Spiegel §. 569 bis 571. 586. 587.
» -Spiegelbild §. 539.
Kernschatten §. 389.
Kreis-Perspective §. 218 bis 229. 233. 310.
Kreis-Theilung, perspectivische §. 267.
Kugel-Perspective §. 237 bis 245. 351 bis 359.
Kugel-Pol §. 243. 359. 425. 470.
» -Schatten §. 425. 428. 449. 470.
Kugel-Schnitte s. Schnitte.
» -Spiegel §. 556 bis 559. 582. 583.

Längen-Maßstab, perspectivischer §. 84.
Lichtachse §. 402. 433.
Lichtebene §. 399.
Licht-Fußpunkt §. 402.
Lichtpol der Kugel §. 425. 428. 470.

Maßlinie §. 92.
Maßstab, perspectivischer Höhen- §. 158. 187. 193.
Maßstab, perspectivischer Längen- §. 84.
» » Vergrößerungs- §. 164.
Meridianlinien §. 247 bis 249.

Nischenschatten §. 452. 479.

Objectives Spiegelbild §. 575. 578.
Objectschatten §. 388.

Parabol-Spiegel §. 575.
Parallelität §. 47.
Parallelstrahl §. 52.
Perspective, perspectivisches Bild §. 5.
Pole der Kugel §. 243. 359. 425. 470.

Reflectirende Linie §. 514.
Reflectirender Punkt §. 510. 545 bis 547.
Reflectirtes Licht §. 396.
Reflexe §. 396 fg.

Schirmbild §. 550.
Schlagschatten §. 388.
Schnitte zwischen schiefen Ebenen §. 309. 322 bis 339.
» » zwischen Ebenen und Cylindern §. 342. 344.
» » zwischen Ebenen und Kegeln §. 254 bis 256. 343. 345.
» » zwischen Ebenen und Kugeln §. 243 bis 246. 348 bis 350.
» » zwischen Ebenen und anderen krummen Flächen §. 250 bis 253. 340.
» » zwischen krummen Flächen §. 257 bis 263. 268.
Sonnen-Fußpunkt §. 433.
Standebene, -Linie, -Punkt §. 34.
Subjectives Spiegelbild §. 548.

Digitized by Google

Tangenten an Kegelschnitten §. 231. 476.
Theilpunkt §. 90.
Theilung auf krummen Linien §. 269.

Vergrößerungs-Maßstab §. 164.
Verschwindungslinie §. 65.
Verschwindungspunkt §. 46.
Verschwindungspunkt, correspondirender §. 57.
» » » -Methode §. 45.
Verticale §. 34.
» » gedrehte §. 74.
Verticalebene §. 33.
» » -Linie §. 34.

Berichtigungen.

Seite 179, Zeile 5 v. u., statt: (y), lies: y
» 180, » 14 v. u., sind die Worte: „außerhalb der Figur liegenden" zu streichen.
» 181, » 18 v. o., st.: φ^1, ε u. s. w., l.: φ^1, ε^1 u. s. w.
» 185, » 8 v. o., ist hinter y einzuschalten: und z
» 189, » 13 v. o., st.: A, l.: P
» 194, » 5 v. o., st.: über, l.: unter
» 238, » 2 v. u., st.: F, l.: T
» 255, » 6 v. o., ist hinter $\Delta(\varphi)$ ein Komma zu setzen.
» 278, » 9 u. 10 v. o., st.: H^1, l.: P
» 278, » 9 u. 12 v. o., st.: w x, l.: dem Horizonte
» 278, » 13 v. o., st.: der w x, l.: dem Horizonte
» 283, » 19 v. o., st.: um, l.: in
» 291, » 9 v. o., st.: 3, l.: 1^b
» 302, » 15 v. u., st.: (r), l.: (r^1)
» 310, » 5 v. u., st.: A C, l.: A und C
» 323, » 13 v. u., st.: g, l.: (g)
» 328, » 12 v. o., st.: 8^1 s, l.: 8 s
» 331, » 7 v. o., st.: s e, l.: s z
» 333, » 15 u. 16 v. u., st.: deren Peripherie, l.: dieser selbst
» 356, » 8 v. o., st.: C L, l.: C N
» 393, » 15 v. o., st.: 26, l.: 25

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

kgl. Hofbuchbinder
in
MÜNCHEN
Ledererg. No 25.

Digitized by Google